



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

弹性力学

Elasticity

第4版

上册

徐芝纶

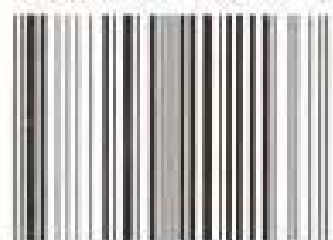


高等教育出版社
Higher Education Press



弹性力学
Elasticity

ISBN 7-04-020213-1



9 787040 202137 >

定价 25.40 元

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

弹性力学

第四版

上册

徐芝纶

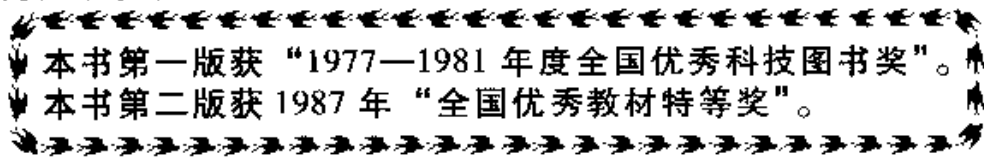
高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。第四版是在保持第三版内容、编排和写作风格不变的基础上修订而成的。本书是“高等教育百门精品课程教材计划”的一个立项项目。

全书分上、下两册。上册为数学弹性力学部分，内容包括：平面问题的基本理论及其直角坐标解答、极坐标解答、复变函数解答；温度应力的平面问题、平面问题的差分解；空间问题的基本理论及其解答；等截面直杆的扭转、能量原理与变分法、弹性波的传播。下册为应用弹性力学部分，内容包括：薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法、差分解法、变分解法；薄板的振动、稳定、各向异性、大挠度问题；壳体的一般理论以及柱壳、旋转壳、扁壳。

本书可作为高等学校工程力学、土建、水利、机械、航空航天等专业弹性力学课程的教材，也可供工程技术人员参考和应用。



图书在版编目(CIP)数据

弹性力学. 上册/徐芝纶. —四版. —北京: 高等教育出版社, 2006. 12

ISBN 7-04-020213-1

I. 弹... II. 徐... III. 弹性力学-高等学校-教材 IV. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 131469 号

策划编辑 黄毅 责任编辑 姜凤 封面设计 张楠
责任绘图 杜晓丹 版式设计 余杨 责任校对 俞声佳
责任印制 尤静

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总机 010-58581000

经销 蓝色畅想图书发行有限公司
印刷 北京铭成印刷有限公司

开本 787×960 1/16
印张 20.25
字数 370 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>
版次 1978年1月第1版
2006年12月第4版
印次 2006年12月第1次印刷
定价 25.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 20213-00

第四版前言

《弹性力学》是徐芝纶教授(1911—1999)为工程力学专业、工科研究生等编著的一部教材,1990年出版了第三版,至今已有16年,为满足教学要求,现修订出版第四版。

第四版在保持第三版的内容、编排和写作风格不变的前提下,进行以下几方面的修订:(1)为方便读者阅读,在正文之前增加了“主要符号表”,(2)按1993年发布的GB 3100~3102—93《量和单位》系列国家标准及有关规定,规范使用量和单位的名称、符号及书写规则。(3)重新绘制了全部插图,少数图示有所改进,图注均用宋体字。(4)在反复斟酌的基础上,对个别字、词及表述作了修订,在“能量原理及变分法”一章中增加了余能概念。

第四版的修订工作由王润富(河海大学)、徐慰祖(北京工业大学)、张元直(高等教育出版社)共同完成。

修订不当之处敬请读者指正。

修订者

2006年7月

第三版前言

在安排本书第三版的内容时，对总的体系未加更改，对次序的先后也只作了很小的变动。

由于国内的大专院校和设计单位都已普遍使用电子计算机(至少已普遍使用微型机)，用手工进行的松弛计算已经失去了实用价值，所以第三版中取消了这方面的内容。

平面问题的位移差分解，与应力函数差分解相比，具有较广泛的适用性，但是，对同样的精度要求说来，方程较多是其缺点。由于电子计算机的使用，这一缺点已无关重要，因此，第三版中增加了位移差分解的内容。

兄弟院校的几位同志建议，增加“解答的唯一性”和“功的互等定理”，还有同志认为，既然空间轴对称问题的应力函数等同于拉甫位移函数，前者就不必介绍了。编者采纳了这两方面的建议。

为了便于教学，第三版中对文句和插图作了不少的修改，对例题和习题也作了一些调整。

徐芝纶 1987年5月

第二版前言

本书在1979年出版以后，曾蒙若干兄弟院校的教师作为教材试用，并先后提出不少宝贵的意见和建议。现在已经按照这些意见和建议进行了修改，择要说明如下。

原书中关于楔形坝体温度应力的一般分析，数学运算较繁，在有限单元法广泛应用于坝体应力分析以后，已经失去了应用价值。原书中关于等截面直杆弯曲问题的解答，虽然属于古典弹性力学上的重大成就，但在工程上很少有人应用。因此，在修订版中删去了这两方面的内容。

修订版在平面问题的基本理论中增加了“斜方向的应变”这一节，是为了适应结构实验分析方面的需要；在薄板小挠度弯曲问题的边界条件中，增加了弹性支承边的边界条件，因为弹性支承是板壳理论中的一个重要概念，而且在很多的板壳结构中，支承构件的弹性也是必须加以考虑的。

原书中关于平面问题应力函数以及应力和位移的复变函数表示，沿用过去文献中的传统推导方法，引用了几个人为的调和函数，显得曲折而不自然。在修订版中，放弃了这些调和函数而用共轭复变数进行推导，比较直观，容易为学生接受。

等曲率扁壳的简化计算，是我国的力学工作者们在50年代末期和60年代初期的重大贡献，至今还不失为国际上的先进成果。因此，在修订版中稍许增多了这方面的内容。

此外，在很多的章节中，文字叙述和数学推导作了某些修改，习题也有些调整。

恳切希望兄弟院校的教师继续对本书进行严格的审查，把发现的缺点和错误及时通知本人，以便再度加以修改或更正，使本书成为比较合用的一部教材。

徐芝纶 1982年4月

第一版前言

本书是为高等学校工科力学专业编写的弹性力学教材。

全书分上下两册，上册先讲平面问题，再讲空间问题，下册先讲薄板问题，再讲薄壳问题。这样安排，大致符合由浅入深、由易到难、循序渐进的原则。

为了训练学生理论推导和实际运算的能力，每章之后都附有难易程度不同的习题，任课教师可按照专业教学计划的要求和学生课外学时的多少，适当布置。

在大多数章的最后，列出了参考教材的目录，以使学生在阅读了这些教材以后，能够更全面、深入地掌握该章的内容。

内容索引和人名对照表，附在下册的书后。

本书承主审人北京航空学院王德荣同志和武汉建筑材料工业学院王龙甫同志，以及同济大学、大连工学院、太原工学院、华北水利水电学院、西南交通大学、天津大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。

徐芝纶 1978年10月

主要符号表

弹性力学

坐标 直角坐标 x, y, z ; 圆柱坐标 ρ, φ, z ; 极坐标 ρ, φ ; 球坐标 r, θ, φ 。

体力分量 f_x, f_y, f_z (直角坐标系); f_ρ, f_φ, f_z (圆柱坐标系); f_ρ, f_φ (极坐标系)。

面力分量 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ (直角坐标系); $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi, \bar{f}_z$ (圆柱坐标系); $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi$ (极坐标系)。

位移分量 u, v, w (直角坐标系); u_ρ, u_φ, w (圆柱坐标系); u_ρ, u_φ (极坐标系)。

边界约束分量 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ (直角坐标系)。

方向余弦 l, m, n (直角坐标系)。

应力分量 正应力 σ , 切应力 τ ; 全应力 p ; 斜面应力分量 p_τ, p_n, p_z (直角坐标系); σ_N, τ_N ; 体积应力 Θ 。

应变分量 线应变 ε , 切应变 γ ; 体应变 θ 。

势能和功 形变势能(应变能) V_e , 外力势能 V , 总势能 E_p , 功 W , 动能 E_k , 应变余能 V_c 。

艾里应力函数 Φ , 扭转应力函数 Φ 。

弹性模量 E , 切变模量 G , 体积模量 K , 泊松比 μ 。

质量 m , 密度 ρ , 重力加速度 g 。

温度场和温度应力

温度 T , 绝热温升 θ 。

热量 Q , 热流密度 q 。

比热容 c , 线胀系数 α 。

导热系数(热导率) λ , 导温系数(热扩散率) a , 运流放热系数(表面传热系数) β 。

薄板力学

挠度 w , 振形函数 W , 振动频率 ω , 抗弯刚度 D 。

中面内力(薄膜内力) 拉压力, 平错力(纵向剪力) $F_{rx}, F_{Ty}, F_{Txz} = F_{lyz}$ (直角坐标系); $F_{T\rho}, F_{T\varphi}, F_{T\rho\varphi} = F_{T\rho\varphi}$ (极坐标系)。

平板内力 弯矩, 扭矩 $M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}$ (直角坐标系); $M_\rho, M_\varphi, M_{\rho\varphi} = M_{\varphi\rho}$ (极坐标系)。

横向剪力, 总剪力 $F_{s_x}, F_{s_y}; F'_{s_x}, F'_{s_y}$ (直角坐标系); $F_{s\rho}, F'_{s\varphi}; F'_{s\varphi}, F'_{s\rho}$ (极坐标系)。

薄壳力学

正交曲线坐标 α, β, γ 。坐标线上微分线段 ds_1, ds_2, ds_3 。

位移 u_1, u_2, u_3 ; 中面位移 u, v, w 。

线应变 e_1, e_2, e_3 ; 切应变 e_{23}, e_{31}, e_{12} 。

中面线应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 。中面切应变 ε_{12} 。中面主曲率 k_1, k_2 。中面主曲率改变 χ_1, χ_2 。中面扭率改变 χ_{12} 。壳体的中面荷载 q_1, q_2, q_3 。

中面内力(薄膜内力) 拉压力 F_{11}, F_{22} ; 平错力 F_{112}, F_{221} 。总平错力 F'_{112}, F'_{121} 。

平板内力 弯矩 M_1, M_2 ; 扭矩 M_{12}, M_{21} 。

横向剪力 F'_{s1}, F'_{s2} 。总剪力 F'_{s1}, F'_{s2} 。

量纲

国际单位制(SI)采用的基本量为, 长度(L), 质量(M), 时间(T), 电流(I), 热力学温度(Θ), 物质的量(N), 发光强度(J)。

目 录

(上 册)

主要符号表	1
第一章 绪论	1
§ 1-1 弹性力学的内容	1
§ 1-2 弹性力学中的几个基本概念	2
§ 1-3 弹性力学中的基本假定	6
第二章 平面问题的基本理论	9
§ 2-1 平面应力问题与平面应变问题	9
§ 2-2 平衡微分方程	10
§ 2-3 斜面上的应力。主应力	12
§ 2-4 几何方程。刚体位移	15
§ 2-5 斜方向的应变及位移	17
§ 2-6 物理方程	20
§ 2-7 边界条件	22
§ 2-8 圣维南原理	23
§ 2-9 按位移求解平面问题	25
§ 2-10 按应力求解平面问题。相容方程	27
§ 2-11 常体力情况下的简化	29
§ 2-12 应力函数。逆解法与半逆解法	32
第三章 平面问题的直角坐标解答	36
§ 3-1 多项式解答	36
§ 3-2 位移分量的求出	38
§ 3-3 简支梁受均布荷载	41

§ 3-4	楔形体受重力和液体压力	45
§ 3-5	级数式解答	48
§ 3-6	简支梁受任意横向荷载	49
第四章	平面问题的极坐标解答	54
§ 4-1	极坐标中的平衡微分方程	54
§ 4-2	极坐标中的几何方程及物理方程	55
§ 4-3	极坐标中的应力函数与相容方程	58
§ 4-4	应力分量的坐标变换式	59
§ 4-5	轴对称应力和相应的位移	61
§ 4-6	圆环或圆筒受均布压力。压力隧洞	63
§ 4-7	曲梁的纯弯曲	67
§ 4-8	圆盘在匀速转动中的应力及位移	70
§ 4-9	圆孔的孔边应力集中	73
§ 4-10	楔形体在楔顶或楔面受力	77
§ 4-11	半平面体在边界上受法向集中力	81
§ 4-12	半平面体在边界上受法向分布力	83
第五章	平面问题的复变函数解答	88
§ 5-1	应力函数的复变函数表示	88
§ 5-2	应力和位移的复变函数表示	89
§ 5-3	各个复变函数确定的程度	91
§ 5-4	边界条件的复变函数表示	93
§ 5-5	多连体中应力和位移的单值条件	94
§ 5-6	无限大多连体的情形	97
§ 5-7	保角变换与曲线坐标	99
§ 5-8	孔口问题	102
§ 5-9	椭圆孔口	106
§ 5-10	裂隙附近的应力集中	112
§ 5-11	正方形孔口	115
第六章	温度应力的平面问题	120
§ 6-1	关于温度场和热传导的一些概念	120

§ 6-2	热传导微分方程	122
§ 6-3	温度场的边值条件	124
§ 6-4	按位移求解温度应力的平面问题	126
§ 6-5	位移势函数的引用	130
§ 6-6	用极坐标求解问题	133
§ 6-7	圆环和圆筒的轴对称温度应力	135
§ 6-8	楔形坝体中的温度应力	139
第七章	平面问题的差分解	145
§ 7-1	差分公式的推导	145
§ 7-2	稳定温度场的差分解	148
§ 7-3	不稳定温度场的差分解	153
§ 7-4	应力函数的差分解	156
§ 7-5	应力函数差分解的实例	161
§ 7-6	温度应力问题的应力函数差分解	163
§ 7-7	位移的差分解	166
§ 7-8	位移差分解的实例	176
§ 7-9	多连体问题的位移差分解	180
§ 7-10	温度应力问题的位移差分解	182
第八章	空间问题的基本理论	190
§ 8-1	平衡微分方程	190
§ 8-2	物体内任一点的应力状态	191
§ 8-3	主应力与应力主向	193
§ 8-4	最大与最小的应力	195
§ 8-5	几何方程-刚体位移、体应变	197
§ 8-6	物体内任一点的形变状态	199
§ 8-7	物理方程 方程总结	202
§ 8-8	轴对称问题的基本方程	204
§ 8-9	球对称问题的基本方程	208
第九章	空间问题的解答	210
§ 9-1	按位移求解空间问题	210

§ 9-2	无限大弹性层受重力及均布压力	212
§ 9-3	空心圆球受均布压力	213
§ 9-4	位移势函数的引用	215
§ 9-5	乐甫位移函数及伽辽金位移函数	218
§ 9-6	半空间体在边界上受法向集中力	220
§ 9-7	半空间体在边界上受切向集中力	223
§ 9-8	半空间体在边界上受法向分布力	225
§ 9-9	两球体之间的接触压力	228
§ 9-10	按应力求解空间问题	231
§ 9-11	等截面直杆的纯弯曲	234
第十章	等截面直杆的扭转	238
§ 10-1	扭转问题中的应力和位移	238
§ 10-2	扭转问题的薄膜比拟	241
§ 10-3	椭圆截面杆的扭转	244
§ 10-4	矩形截面杆的扭转	246
§ 10-5	薄壁杆的扭转	249
§ 10-6	扭转问题的差分解	252
第十一章	能量原理与变分法	257
§ 11-1	弹性体的形变势能	257
§ 11-2	位移变分方程	260
§ 11-3	位移变分法	264
§ 11-4	位移变分法应用于平面问题	266
§ 11-5	应力变分方程	271
§ 11-6	应力变分法	273
§ 11-7	应力变分法应用于平面问题	275
§ 11-8	应力变分法应用于扭转问题	278
§ 11-9	解答的唯一性	281
§ 11-10	功的互等定理	282
第十二章	弹性波的传播	286
§ 12-1	弹性体的运动微分方程	286

§ 12-2 弹性体中的无旋波与等容波	287
§ 12-3 平面波的传播	290
§ 12-4 表层波的传播	293
§ 12-5 球面波的传播	296
内容索引	298
人名对照表	307

第一章 绪 论

§ 1-1 弹性力学的内容

弹性体力学，通常简称为弹性力学，又称为弹性理论，是固体力学的一个分支，其中研究弹性体由于受外力作用或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

对工科力学专业说来，弹性力学的任务，和材料力学、结构力学的任务一样，是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有所需的强度、刚度和稳定性，并寻求或改进它们的计算方法。然而，这三门学科在研究对象上有所分工，在研究方法上也有所不同。

在材料力学里，基本上只研究所谓杆状构件，也就是长度远大于高度和宽度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和位移，是材料力学的主要研究内容。在结构力学里，主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构，也就是所谓杆件系统，例如桁架、刚架等等。至于非杆状的结构，例如板和壳，以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构，则在弹性力学里加以研究。对于杆状构件作进一步的、较精确的分析，也须用到弹性力学。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件，然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外，大都还引用一些关于构件的形变状态或应力分布的假定，这就大大简化了数学推演，但是，得出的解答有时只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件，一般都不必引用那些假定，因而得出的结果就比较精确，并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

例如，在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下的弯曲，就引用了平面截面的假定，得出的结果是：横截面上的正应力(弯应力)按直线分布。在弹性力学里研究这同一问题，就无须引用平面截面的假定。相反地，还可以用弹性力学里的分析结果来校核这个假定是否正确，并且由此判明：如果梁的高度并不远小于梁的跨度，而是同等大小的，那么，横截面上的正应力并不按直线分布，而是按曲线变化的，如图 7-9 所示，并且，材料力学里给出的最大正应力将具有很大的误差。

又例如，在材料力学里计算有孔的拉伸构件，通常就假定拉应力在净截面上均匀分布。弹性力学里的计算结果表明：净截面上的拉应力远不是均匀分布，而在孔的附近发生应力集中，如图 4-9 所示，孔边的最大拉应力比平均拉应力大得多。

弹性力学可以分为数学弹性力学和实用弹性力学两部分。在数学弹性力学里，只用精确的数学推演而不引用关于形变状态或应力分布的假定。本书上册的内容属于数学弹性力学。在实用弹性力学里，和在材料力学里一样，也引用一些关于形变状态或应力分布的假定来简化数学推演，得出具有一定近似性的解答。这样，按照分析的方法和解答的精度说来，实用弹性力学是接近材料力学的；但是，由于其中所研究的问题比较复杂，同时还要用到数学弹性力学中的结果，所以这些研究内容归入弹性力学。本书下册的内容就属于实用弹性力学。

虽然在弹性力学里通常并不研究杆件系统，然而近几十年来，不少人曾经致力于弹性力学和结构力学的综合应用，使得这两门学科越来越密切结合。弹性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析法以后，大大扩展了它的应用范围，使得某些比较复杂的本来是无法求解的问题，得到了解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性，但应用在工程上，通常却是足够精确的。在近五十年间快速发展起来的有限单元法，把连续弹性体划分成有限大小的单元构件，然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解，更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外，对同一结构的各个构件，甚至对同一构件的不同部分，分别用弹性力学和结构力学或材料力学进行计算，常常可以节省很多的工作量，而仍然得到令人满意的结果。

总之，材料力学、结构力学和弹性力学这三门学科之间的界线不是很明显的，更不是一成不变的。我们不应当强调它们之间的分工，而应当更多地发挥它们综合应用的威力，才能使它们更好地为我国的社会主义建设事业服务。

§ 1-2 弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。这些概念，虽然在材料力学和结构力学里都已经用到过，但在这里仍有再加以详细说明的必要。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力，两者也分别简称为体力和面力。

所谓体力，是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。物体各点受体力的情况，一般是不相同的。为了表明该物体在某一点 P 所受体力的方向和大小，在这点取物体的一小部分，它包含着 P 点而它的体积为 ΔV ，图 1-1a。设作用于 ΔV 的体力为 ΔF ，则体力的平均集度为 $\Delta F/\Delta V$ 。如果把所取的那一小部分物体不断减小，即 ΔV 不断减小，则 ΔF 和 $\Delta F/\Delta V$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。现在，命 ΔV 无限减小而趋于 P 点，假定体力为连续分布，则 $\Delta F/\Delta V$ 将趋于一定的极限 f ，即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = f.$$

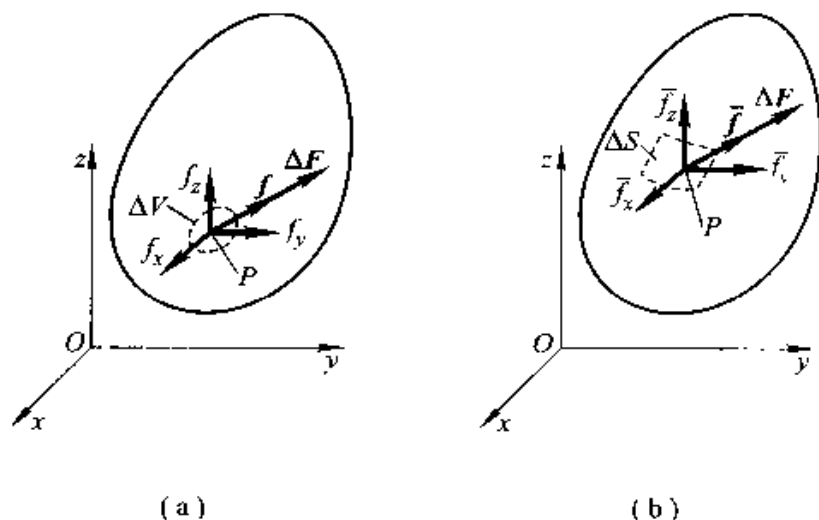


图 1-1

这个极限矢量 f ，就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是标量，所以 f 的方向就是 ΔF 的极限方向。矢量 f 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影 f_x 、 f_y 、 f_z ，称为该物体在 P 点的体力分量，以沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负。它们的量纲是 $L^{-2}MT^{-2}$ 。

所谓面力，是分布在物体表面上的力，例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受面力的情况，一般也是不相同的。为了表明该物体在其表面上某一点 P 所受面力的大小和方向，在这点取该物体表面的一小部分，它包含着 P 点而它的面积为 ΔS ，图 1-1b。设作用于 ΔS 的面力为 ΔF ，则面力的平均集度为 $\Delta F/\Delta S$ 。与上相似，命 ΔS 无限减小而趋于 P 点，假定面力为连续分布，则 $\Delta F/\Delta S$ 将趋于一定的极限 \bar{f} ，即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \bar{f}.$$

这个极限矢量 \bar{f} 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔS 是标量，所以 \bar{f} 的方向就是 ΔF 的极限方向。矢量 \bar{f} 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影 \bar{f}_x 、 \bar{f}_y 、 \bar{f}_z ，称为该物体在 P 点的面力分量，以沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为

负，它们的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$ 。

物体受了外力的作用，或由于温度有所改变，其内部将发生内力。为了研究物体在其某一点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分，而将 B 部分撤开，图 1-2。撤开的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力。取这一截面的一小部分，它包含着 P 点而它的面积为 ΔA 。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔF ，则内力的平均集度，即平均应力，为 $\Delta F/\Delta A$ 。现在，令 ΔA 无限减小而趋于 P 点，假定内力为连续分布，则 $\Delta F/\Delta A$ 将趋于一定的极限 p ，即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = p$$

这个极限矢量 p 就是物体在截面 mn 上的、在 P 点的应力。因为 ΔA 是标量，所以应力 p 的方向就是 ΔF 的极限方向。

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量和物体的形变或材料强度都没有直接的关系。与物体的形变及材料强度直接相关的，是应力在其作用截面的法向和切向的分量，也就是正应力 σ 和切应力 τ ，图 1-2。应力及其分量的量纲也是 $L^{-1}MT^{-2}$ 。

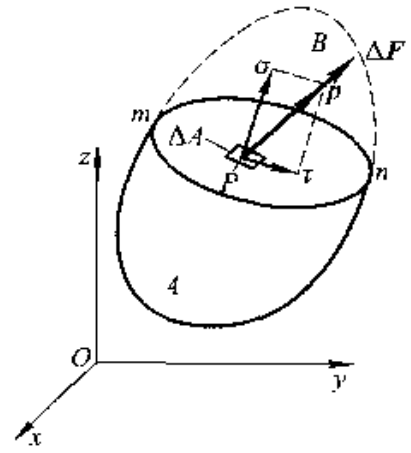


图 1-2

显然可见，在物体内的同一点 P ，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度为 $PA = \Delta x$ 、 $PB = \Delta y$ 、 $PC = \Delta z$ ，图 1-3。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个切应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个坐标角码，例如，正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上，同时也是沿着 x 轴的方向作用的。切应力用 τ 表示，并加上两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，切应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面上的应力分量就以沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负。相反，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面上的应力分量就以沿坐标轴负方向时为正，沿坐标轴正方向时为负。图上所示的应力分量全都是正的。注意，虽然上述正负号规定，对于正应力说来，结果是和材料力学中的规定相同

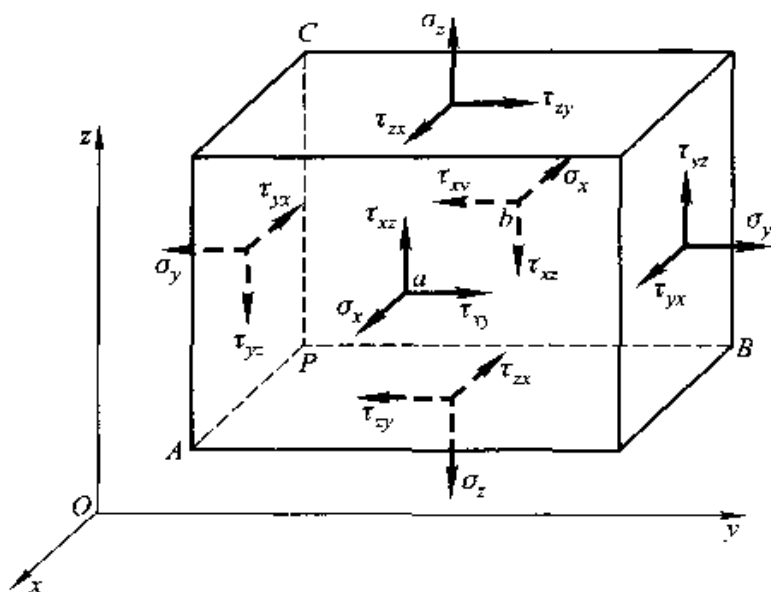


图 1-3

(拉应力为正而压应力为负), 但是, 对于切应力说来, 结果却和材料力学中的规定不完全相同。

六个切应力之间具有一定的互等关系。例如, 以连接前后两面中心的直线 ab 为矩轴, 立出力矩的平衡方程, 得到

$$2\tau_{xz}\Delta z\Delta x \frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{xy}\Delta y\Delta x \frac{\Delta z}{2} = 0。$$

同样可以立出其余两个相似的方程。简化以后, 得出

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}。 \quad (1-1)$$

这就证明了切应力的互等关系: 作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力, 是互等的(大小相等, 正负号也相同)。因此, 切应力记号的两个角码可以对调。

在这里, 我们没有考虑应力由于位置不同而有的改变(也就是把六面体中的应力当做均匀应力), 而且也没有考虑体力的作用。以后可见, 即使考虑到应力随位置不同而有的改变, 并考虑到体力的作用, 仍然可以推导出切应力的互等关系。

顺便指出, 如果采用材料力学中的正负号规定, 则切应力的互等关系将成为

$$\tau_{yz} = -\tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = -\tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = -\tau_{yx},$$

显然不如采用上述规定时来得简单。但也应当指出, 在利用莫尔圆(即应力圆)时, 就必须采用材料力学中的规定。

以后可见, 在物体的任意一点, 如果已知 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{xz} 这六个应力分量, 就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和切应力。因此, 上

述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

所谓形变，就是形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此，物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 P 的形变状态，在这一点沿着坐标轴 x 、 y 、 z 的正方向取三个微小的线段 PA 、 PB 、 PC ，图 1-3。物体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩，称为线应变；各线段之间的直角的改变，用弧度表示，称为切应变。线应变用字母 ε 表示： ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的线应变，余类推。线应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相适应。切应变用字母 γ 表示： γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段（即 PB 与 PC ）之间的直角的改变，余类推。切应变以直角变小时为正，变大时为负，与切应力的正负号规定相适应。线应变和切应变都是量纲为 1 的量。

以后可见，在物体的任意一点，如果已知 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 、 γ_{xy} 这六个应变，就可以求得经过该点的任一线段的线应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此，这六个应变，称为该点的形变分量，可以完全确定该点的形变状态。

所谓位移，就是位置的移动。物体内任意一点的位移，用它在 x 、 y 、 z 三轴上的投影 u 、 v 、 w 来表示，以沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负。这三个投影称为该点的位移分量。位移及其分量的量纲是 L 。

一般而论，弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量，都是随着该点的位置而变的，因而都是位置坐标的函数。

在弹性力学的问题里，通常是已知物体的形状和大小（即已知物体的边界），已知物体的弹性常数，物体所受的体力，物体边界上的约束情况或面力，须要求解应力分量、形变分量和位移分量。

§ 1-3 弹性力学中的基本假定

为了由弹性力学问题中的已知量求出未知量，必须建立这些已知量与未知量之间的关系，以及各个未知量之间的关系，从而导出一套求解的方程。在导出方程时，可以从三方面来进行分析。一方面是静力学方面，由此建立应力、体力、面力之间的关系。另一方面是几何学方面，由此建立形变、位移和边界位移之间的关系。再一个方面是物理学方面，由此建立形变与应力之间的关系。

在导出方程时，如果精确考虑所有各方面的因素，则导出的方程非常复

杂，实际上不可能求解。因此，通常必须按照研究对象的性质和求解问题的范围，作出若干基本假定，从而略去一些暂不考虑的因素，使得方程的求解成为可能。在本教程中，除了个别的章节以外，都采用如下的基本假定。

(1) 假定物体是连续的，也就是假定整个物体的体积都被织成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。这样，物体内的一些物理量，例如应力、形变、位移等等，才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。实际上，一切物体都是由微粒组成的，都不能符合上述假定。但是，可以想见，只要微粒的尺寸，以及相邻微粒之间的距离，都比物体的尺寸小得很多，那么，关于物体连续性的假定，就不会引起显著的误差。

(2) 假定物体是完全弹性的，也就是假定物体完全服从胡克定律——应变与引起该应变的那个应力分量成比例；反映这种比例关系的常数，即所谓弹性常数，并不随应力分量或应变的大小和符号而变。具体地说，当应力分量增大到若干倍时，应变也增大到同一倍数；当应力分量减小到若干分之一时，应变也减小到同一分数；当应力分量减小为零时，应变也减小为零（没有任何剩余形变）；当应力分量反其符号时，应变也反其符号，而且两者仍然保持其同样的比例关系。由材料力学已知：脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，可以作为近似的完全弹性体；塑性材料的物体，在应力未达到屈服极限以前，也可以作为近似的完全弹性体。

(3) 假定物体是均匀的，也就是，整个物体是由同一材料组成的。这样，整个物体的所有各部分才具有相同的弹性，因而物体的弹性常数才不随位置坐标而变，可以取出该物体的任意一小部分来加以分析，然后把分析的结果应用于整个物体。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的，那么，也只要每一种材料的颗粒远远小于物体，而且在物体内部均匀分布，这个物体也就可以当做是均匀的。

(4) 假定物体是各向同性的，也就是，物体内一点的弹性在所有各个方向都相同。这样，物体的弹性常数才不随方向而变。显然，木材和竹材的构件都不能当做各向同性体。至于钢材的构件，虽然它含有各向异性的晶体，但由于晶体很微小，而且是随机排列的，所以钢材构件的弹性（包含无数多微小晶体随机排列时的统观弹性），大致是各向相同的。

凡是符合以上四个假定的物体，就称为理想弹性体。

(5) 假定位移和形变是微小的。这就是说，假定物体受力以后，整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，因而应变和转角都远小于1。这样，在建立物体变形以后的平衡方程时，就可以用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸，而不致引起显著的误差，并且，在考察物体的形变及位移时，转角和应变的二次幂或乘积都可以略去不计。这才可能使得弹性力学中的代数方

保证弹性常数不随应力或应变的变化而变化

保证弹性常数不随位置的改变而改变

保证弹性常数不具有方向性

程和微分方程简化为线性方程。

本教程中所讨论的问题，绝大多数都是理想弹性体的线性问题。

习 题

1-1 试举例说明，什么是均匀的各向异性体，什么是非均匀的各向同性体，什么是非均匀的各向异性体。

1-2 一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体？一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体？

1-3 试回忆，在学习材料力学时，曾经遇到过哪些非线性问题。它们的解答和线性问题的解答有什么重大的差别？

参 考 教 材

[1] 钱伟长，叶开沅编. 弹性力学[M]. 北京：科学出版社，1956：第一章.

[2] Н. И. 别茹霍夫著. 弹性与塑性理论[M]. 杜庆华，庞家驹，黄克智，张福范，解伯民译. 北京：高等教育出版社，1956：§ 1，§ 2，§ 11.

第二章 平面问题的基本理论

§ 2-1 平面应力问题与平面应变问题

任何一个弹性体都是空间物体，一般的外力都是空间力系，因此，严格地说来，任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。但是，如果所考察的弹性体具有某种特殊的形状，并且承受的是某种特殊的外力，就可以把空间问题简化为近似的平面问题。这样处理，分析和计算的工作量将大大地减少，而所得的成果却仍然能满足工程上对精度的要求。

第一种平面问题是平面应力问题。设有很薄的等厚度薄板，图 2-1，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力，同时，体力也平行于板面并且不沿厚度变化。例如图中所示的深梁，以及平板坝的平板支墩，就属于此类。

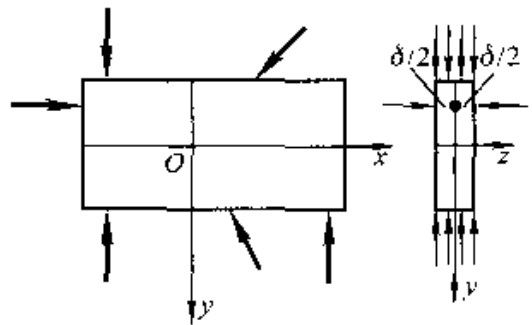


图 2-1

设薄板的厚度为 δ 。以薄板的中面为 xy 面，以垂直于中面的任一直线为 z 轴。因为

板面上 $(z = \pm \frac{\delta}{2})$ 不受力，所以有

$$(\sigma_z)_{z = \pm \frac{\delta}{2}} = 0, \quad (\tau_{xz})_{z = \pm \frac{\delta}{2}} = 0, \quad (\tau_{yz})_{z = \pm \frac{\delta}{2}} = 0。$$

因为板很薄，外力又不沿厚度变化，所以，可以认为在整个薄板的所有各点都有

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0。$$

注意到切应力的互等关系，又可见 $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$ 。这样，只剩下平行于 xy 面的三个应力分量，即 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ ，所以这种问题称为平面应力问题。同时，也因为板很薄，这三个应力分量，以及分析问题时需要考虑的形变分量和位移分量，都可以认为是不沿厚度变化的。这就是说，它们只是 x 和 y 的函数，不随 z 而变化。

第二种平面问题是平面应变问题。与上相反，设有很长的柱形体，它的支承情况不沿长度变化，如图 2-2 所示，在柱面上受有平行于横截面而且不沿

长度变化的面力，同时，体力也平行于横截面而且不沿长度变化(内在因素和外来作用都不沿长度变化)。

假想该柱形体为无限长，以任一横截面为 xy 面，任一纵线为 z 轴，则所有一切应力分量、形变分量和位移分量都不沿 z 方向变化，而只是 x 和 y 的函数。此外，在这一情况下，由于对称(任一横截面都可以看作是对称面)，所有各点都只会沿 x 和 y 方向移动，而不会有 z 方向的位移，也就是 $w = 0$ 。因为所有各点的位移矢量都平行 xy 面，所以这种问题应当称为平面位移问题，但在习惯上常称为平面应变问题。又由对称条件可知， $\tau_{xz} = 0$ ， $\tau_{yz} = 0$ 。根据切应力的互等关系，又可以断定 $\tau_{zx} = 0$ ， $\tau_{zy} = 0$ 。但是，由于 z 方向的伸缩被阻止，所以 σ_z 一般并不等于零。

有些问题，例如挡土墙和重力坝的问题等，是很接近于平面应变问题的。虽然由于这些结构不是无限长的，而且在靠近两端之处，横截面的形状也往往是变化的，并不符合无限长柱形体的条件，但是实践证明，对于离开两端较远之处，按平面应变问题进行分析计算，得出的结果却是工程上可用的。

§ 2-2 平衡微分方程

在弹性力学里分析问题，要从三方面来考虑：静力学方面，几何学方面和物理学方面。现在，我们来考虑平面问题的静力学方面，而首先根据平衡条件来导出应力分量与体力分量之间的关系式，也就是平面问题的平衡微分方程。

从图 2-1 所示的薄板，或图 2-2 所示的柱形体，取出一个微小的正平行六面体 $PACB$ (图 2-3)，它在 x 和 y 方向的尺寸分别为 dx 和 dy 。为了计算简便，它在 z 方向的尺寸取为一个单位长度。

一般而言，应力分量是位置坐标 x 和 y 的函数，因此，作用于左右两对面或上下两对面对面的应力分量不完全相同，而具有微小的差量。例如，设作用于左面 PB 的平均正应力是 σ_x ，则作用于右面 AC 的平均正应力，由于 x 坐标的改变，可用泰勒级数表示为

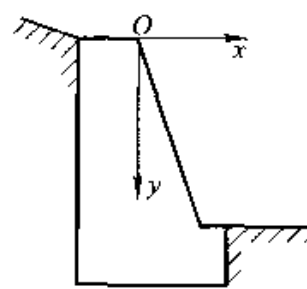


图 2-2

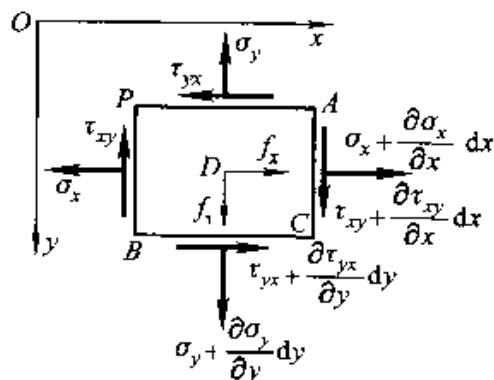


图 2-3

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} dx^2 + \dots,$$

在略去二阶及更高阶的微量以后简化为

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx,$$

设 σ_x 为常量, 则 $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$, 而左右两面的正应力都是 σ_x , 这就是 § 1-2 中所说的均匀应力的情况。同样, 设左面的平均切应力是 τ_{xy} , 则右面的平均切应力将是 $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$; 设上面的平均正应力及平均切应力分别为 σ_y 及 τ_{yx} , 则下面的平均正应力及平均切应力分别为 $\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$ 及 $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$ 。

首先以通过微分体中心 D 并平行于 z 轴的直线为矩轴, 立出力矩的平衡方程 $\sum M_D = 0$:

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \times 1 \times \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy \times 1 \times \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 \times \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx \times 1 \times \frac{dy}{2} = 0。$$

在建立这一方程时, 我们按照 § 1-3 中的第(5)个基本假定, 用了微分体变形以前的尺寸, 而没有用平衡状态下的、变形以后的尺寸。在以后建立任何平衡方程时, 都将同样地处理, 不再加以说明。将上式的两边除以 $dx dy$, 合并相同的项, 得到

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx = \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy。$$

命 dx 及 dy 趋于零, 则 A 、 B 、 C 三点都趋于 P 点, 而各面上的平均切应力都趋于在 P 点的切应力, 从而有在 P 点的关系式

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}。 \quad (2-1)$$

这不过是再一次证明了切应力的互等关系。

其次, 以 x 轴为投影轴, 立出力的平衡方程 $\sum F_x = 0$:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \times 1 - \sigma_x dy \times 1 + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 - \tau_{yx} dx \times 1 + f_x dx dy \times 1 = 0$$

约简以后, 两边除以 $dx dy$, 得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0。$$

同样, 由平衡方程 $\sum F_y = 0$ 可得一个相似的微分方程。于是得出平面问题中表明应力分量与体力分量之间的关系式, 即平衡微分方程在平面问题中的简化

形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + f_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

这两个微分方程中包含着三个未知函数 σ_x 、 σ_y 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ，因此，决定应力分量的问题是超静定的；还必须考虑形变和位移，才能解决问题。

对于平面应变问题来说，在图 2-3 所示的六面体上，一般还有作用于前后两面的正应力 σ_z ，但由于它们自成平衡，完全不影响方程(2-1)及(2-2)的建立，所以上述方程对于两种平面问题都同样适用。

§ 2-3 斜面上的应力。主应力

现在继续分析平面问题的静力学方面，从而说明，如果已知任一点 P 处的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ，图 2-4，就可以求得经过该点的、平行于 z 轴而倾斜于 x 轴和 y 轴的任何斜面上的应力。为此，在 P 点附近取一个平面 AB ，它平行于上述斜面，并与经过 P 点而垂直于 x 轴和 y 轴的两个平面划出一个微小的三角板或三棱柱 PAB 。当平面 AB 与 P 点无限接近时，平面 AB 上的平均应力就成为上述斜面上的应力。

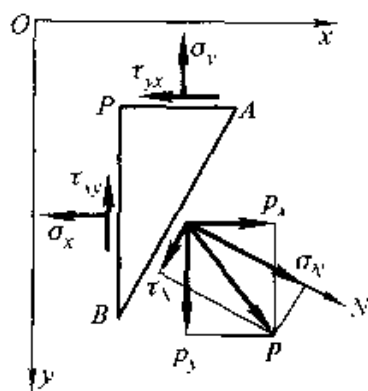


图 2-4

用 N 代表斜面 AB 的外法线方向，其方向余弦为

$$\cos(N, x) = l, \quad \cos(N, y) = m.$$

用 p_x 和 p_y 代表该斜面上的应力 p 在 x 轴和 y 轴上的投影，图 2-4。设斜面 AB 的面积为 dS ，则截面 PB 及 PA 的面积分别为 ldS 及 mdS 。于是由 PAB 的平衡条件 $\sum F_x = 0$ 可得

$$p_x dS = \sigma_x ldS + \tau_{xy} mdS.$$

除以 dS ，即得

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{xy}. \quad (2-3)$$

在这里，我们没有考虑作用于 PAB 的体力，因为体力与体积成正比，是高一阶的微量。同样可以由平衡条件 $\sum F_y = 0$ 得出

$$p_y = m\sigma_y + l\tau_{xy}. \quad (2-4)$$

命斜面 AB 上的正应力为 σ_n ，则由投影可得

$$\sigma_n = lp_x + mp_y.$$

将(2-3)及(2-4)代入, 并将 τ_{xy} 代以 τ_{yx} , 即得

$$\sigma_N = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + 2lm\tau_{xy} \quad (2-5)$$

命斜面 AB 上的切应力为 τ_N , 则由投影可得

$$\tau_N = lp_x - mp_y \quad (a)$$

在本书所用的平面坐标系中, τ_N 的正负号显然必须这样规定: 如果把 N 转动 90° 而达到 τ_N 的方向是顺时针的(就像把 x 轴转动 90° 而达到 y 轴那样), 这个 τ_N 就作为正的, 相反的 τ_N 就作为负的。现在, 将(2-3)及(2-4)代入式(a), 并将 τ_{yx} 代以 τ_{xy} , 即得

$$\tau_N = lm(\sigma_x - \sigma_y) + (l^2 - m^2)\tau_{xy} \quad (2-6)$$

由公式(2-5)及(2-6)可见, 如果已知 P 点处的应力分量, 就可以求得经过 P 点的任一斜面上的正应力及切应力。

如果经过 P 点的某一斜面上的切应力等于零, 则该斜面上的正应力称为 P 点的一个主应力, 而该斜面称为 P 点的一个应力主面, 该斜面的法线方向(即主应力的方向)称为 P 点的一个应力主向。

现在, 假设在 P 点有一个应力主面存在。这样, 由于该面上的切应力等于零, 该面上的全应力 p 就等于该面上的正应力, 也就等于主应力 σ 。于是该面上的全应力 p 在坐标轴上的投影成为

$$p_x = l\sigma, \quad p_y = m\sigma$$

将(2-3)及(2-4)代入, 并以 τ_{xy} 代替 τ_{yx} , 即得

$$l\sigma_x + m\tau_{xy} = l\sigma, \quad m\sigma_y + l\tau_{xy} = m\sigma$$

由二式分别解出 m/l , 得到

$$\frac{m}{l} = \frac{\sigma - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad \frac{m}{l} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma - \sigma_y} \quad (b)$$

命二者相等, 即得 σ 的二次方程

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0,$$

从而求得两个主应力为

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2-7)$$

由于根号内的数值(两个数的平方之和)总是正的, 所以 σ_1 和 σ_2 这两个根都将是实根。此外, 由上式极易看出有关系式

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \quad (c)$$

下面来求出主应力的方向, 即应力主向。设 σ_1 与 x 轴的夹角为 α_1 , 则

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha_1)}{\cos \alpha_1} = \frac{m_1}{l_1}$$

利用(b)中的第一式, 可得

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \quad (2-8)$$

设 σ_2 与 x 轴的夹角为 α_2 , 则

$$\tan \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha_2)}{\cos \alpha_2} = \frac{m_2}{l_2}$$

利用(b)中的第二式, 可得

$$\tan \alpha_2 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_2 - \sigma_x}$$

再利用由式(c)得来的 $\sigma_2 - \sigma_x = -(\sigma_1 - \sigma_x)$, 即得

$$\tan \alpha_2 = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_x}$$

结合(2-8)式, 可见 $\tan \alpha_1 \tan \alpha_2 = -1$, 表示 σ_1 与 σ_2 互相垂直。这就证明: 在任一点 P , 一定存在两个互相垂直的主应力。

如果已经求得任一点的两个主应力 σ_1 和 σ_2 , 以及与之对应的应力主向, 就极易求得这一点的最大应力与最小应力。为了便于分析, 将 x 轴和 y 轴分别放在 σ_1 和 σ_2 的方向, 于是就有

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2 \quad (d)$$

首先来求出最大与最小的正应力。按照公式(2-5)及式(d), 任一斜面上的正应力现在可以表示成为

$$\sigma_N = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2$$

用关系式 $l^2 + m^2 = 1$ 消去 m^2 , 得到

$$\sigma_N = l^2 \sigma_1 + (1 - l^2) \sigma_2 = l^2 (\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2$$

因为 l^2 的最大值为 1 而最小值为零, 可见 σ_N 的最大值为 σ_1 而最小值为 σ_2 。这就是说, 两个主应力包含了最大与最小的正应力。

其次来求出最大与最小的切应力。按照公式(2-6)及式(d), 任一斜面上的切应力现在可以表示成为

$$\tau_N = lm(\sigma_2 - \sigma_1)$$

由关系式 $l^2 + m^2 = 1$ 得 $m = \pm \sqrt{1 - l^2}$, 代入上式, 得

$$\begin{aligned} \tau_N &= \pm l \sqrt{1 - l^2} (\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \sqrt{l^2 - l^4} (\sigma_2 - \sigma_1) \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - l^2\right)^2} (\sigma_2 - \sigma_1) \end{aligned}$$

由此可见, 当 $\frac{1}{2} - l^2 = 0$ 时, τ_N 为最大或最小。于是得 $l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ 而最大与最小的切应力为 $\pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, 发生在与 x 轴及 y 轴(即应力主向)成 45° 的斜面上。

§ 2-4 几何方程。刚体位移

现在来考虑平面问题的几何学方面，导出形变分量与位移分量之间的关系式，也就是平面问题的几何方程。

经过弹性体内的任意一点 P ，沿 x 轴和 y 轴的正方向取两个微小长度的线段 $PA = dx$ 和 $PB = dy$ ，图 2-5。假定弹性体受力以后， P 、 A 、 B 三点分别移动到 P' 、 A' 、 B' 。

首先来求出线段 PA 和 PB 的线应变，即 ϵ_x 和 ϵ_y ，用位移分量来表示。设 P 点在 x 方向的位移分量是 u ，则 A 点在 x 方向的位移分量，由于 x 坐标的改变，可用泰勒级数表示为

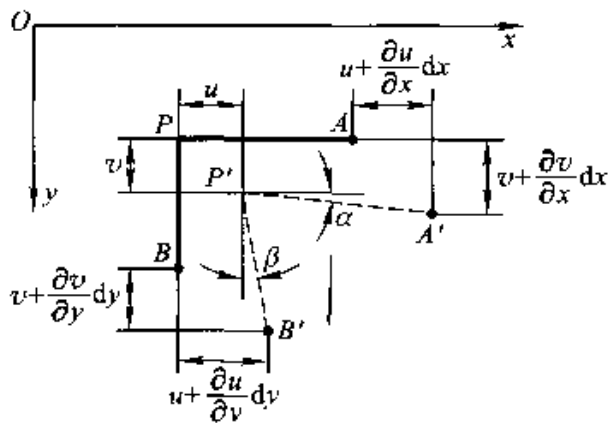


图 2-5

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \dots,$$

在略去二阶及更高阶的微量以后简化为 $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ 。可见线段 PA 的线应变是

$$\epsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a)$$

在这里，由于位移是微小的， y 方向的位移 v 所引起的线段 PA 的伸缩，是更高一阶微小的，因此略去不计。同样可见，线段 PB 的线应变是

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (b)$$

现在来求出线段 PA 与 PB 之间的直角的改变，也就是切应变 γ_{xy} ，用位移分量来表示。由图可见，这个切应变是由两部分组成的：一部分是由 y 方向的位移 v 引起的，即 x 方向的线段 PA 的转角 α ；另一部分是由 x 方向的位移 u 引起的，即 y 方向的线段 PB 的转角 β 。

设 P 点在 y 方向的位移分量是 v ，则 A 点在 y 方向的位移分量将是 $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ 。因此，线段 PA 的转角是

$$\alpha = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同样可得线段 PB 的转角是

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

于是可见, PA 与 PB 之间的直角的改变(以减小时为正), 也就是切应变 γ_{xy} , 为

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (c)$$

综合(a)、(b)、(c)三式, 得出平面问题中表明形变分量与位移分量之间的关系式, 即几何方程在平面问题中的简化形式:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

由上列几何方程可见, 当物体的位移分量完全确定时(表示成为 x 和 y 的确定函数时), 形变分量即完全确定。反之, 当形变分量完全确定时, 位移分量却不能完全确定。为了说明这后一点, 试令形变分量等于零, 即

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0, \quad (d)$$

而来求出相应的位移分量。

将式(d)代入几何方程(2-9), 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (e)$$

将前二式分别对 x 及 y 积分, 得

$$u = f_1(y), \quad v = f_2(x), \quad (f)$$

其中 f_1 及 f_2 为任意函数。代入(e)中的第三式, 得

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx}.$$

这一方程的左边是 y 的函数, 而右边是 x 的函数。因此, 只可能两边都等于同一常数 ω 。于是得

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\omega, \quad \frac{df_2(x)}{dx} = \omega.$$

积分以后, 得

$$f_1(y) = u_0 - \omega y, \quad f_2(x) = v_0 + \omega x, \quad (g)$$

其中的 u_0 及 v_0 为任意常数。将式(g)代入式(f), 得位移分量

$$u = u_0 - \omega y, \quad v = v_0 + \omega x \quad (2-10)$$

式(2-10)所示的位移,是“形变为零”时的位移,也就是所谓“与形变无关的位移”,因而必然是刚体位移。实际上, u_0 及 v_0 分别为物体沿 x 轴及 y 轴方向的刚体平移,而 ω 为物体绕 z 轴的刚体转动。下面根据平面运动的原理加以证明。

当三个常数中只有 u_0 不等于零时,由(2-10)可见,物体中任意一点的位移分量是 $u = u_0, v = 0$ 。这就是说,物体的所有各点只沿 x 方向移动同样的距离 u_0 。由此可见, u_0 代表物体沿 x 方向的刚体平移。同样可见, v_0 代表物体沿 y 方向的刚体平移。当只有 ω 不等于零时,由(2-10)可见,物体中任意一点的位移分量是 $u = -\omega y, v = \omega x$ 。据此,坐标为 (x, y) 的任意一点 P 沿着 y 方向移动 ωx ,并沿着负 x 方向移动 ωy ,如图2-6所示,而合成位移为

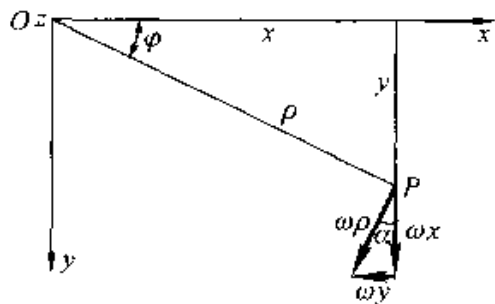


图 2-6

$$\begin{aligned} \sqrt{u^2 + v^2} &= \sqrt{(-\omega y)^2 + (\omega x)^2} \\ &= \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega \rho, \end{aligned}$$

其中 ρ 为 P 点至 z 轴的距离,命合成位移的方向与 y 轴的夹角为 α ,则由图可见

$$\tan \alpha = \frac{\omega y}{\omega x} = \frac{y}{x} = \tan \varphi.$$

可见合成位移的方向与径向线 OP 垂直,也就是沿着切向。既然物体的所有各点移动的方向都是沿着切向,而且移动的距离等于径向距离 ρ 乘以 ω ,可见(注意位移是微小的) ω 代表物体绕 z 轴的刚体转动。

既然物体在形变为零时可以有任意的刚体位移,可见,当物体发生一定的形变时,由于约束条件的不同,它可能具有不同的刚体位移,因而它的位移并不是完全确定的。在平面问题中,常数 u_0, v_0, ω 的任意性就反映位移的不确定性,而为了完全确定位移,就必须有三个适当的约束条件来确定这三个常数。

§ 2-5 斜方向的应变及位移

现在继续分析平面问题的几何学方面,从而说明,如果已知弹性体中任一点 P 处的三个形变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$,就可以求得经过该点的、平行于 xy 面的

任何斜向微小线段 PN 的线应变，也可以求得经过该点的、平行于 xy 面的任何两个斜向微小线段 PN 与 PN' 之间的夹角的变化，图 2-7。

命 P 点的坐标为 (x, y) ， N 点的坐标为 $(x + dx, y + dy)$ ， PN 的长度为 dr ， PN 的方向余弦为

$$\cos(PN, x) = l, \quad \cos(PN, y) = m,$$

于是 PN 在坐标轴上的投影为

$$dx = ldr, \quad dy = mdr. \quad (a)$$

设 P 点的位移分量为 u, v ，则 N 点的位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u_N &= u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ v_N &= v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

在变形之后，线段 PN 移动到 P_1N_1 ，它在坐标轴上的投影成为

$$\left. \begin{aligned} dx + u_N - u &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ dy + v_N - v &= dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

命线段 PN 的线应变为 ε_N ，则该线段在变形之后的长度为 $dr + \varepsilon_N dr$ ，而这长度的平方就等于式 (c) 中的两个投影的平方之和：

$$(dr + \varepsilon_N dr)^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)^2.$$

除以 $(dr)^2$ 并应用式 (a)，得

$$(1 + \varepsilon_N)^2 = \left[l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 + \left[l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]^2.$$

因为 ε_N 和 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 都是微小的，它们的乘方或乘积都可以不计，所以上式可以简化为

$$1 + 2\varepsilon_N = l^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2lm \frac{\partial u}{\partial y} + m^2 \left(1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2lm \frac{\partial v}{\partial x}.$$

注意到 $l^2 + m^2 = 1$ ，可以由上式得出

$$\varepsilon_N = l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (d)$$

再应用几何方程 (2-9)，即得

$$\varepsilon_N = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + lm \gamma_{xy}. \quad (2-11)$$

现在来求线段 PN 和 PN' 的夹角的变化。在变形之后，线段 PN 成为 P_1N_1 ，而它的方向余弦成为

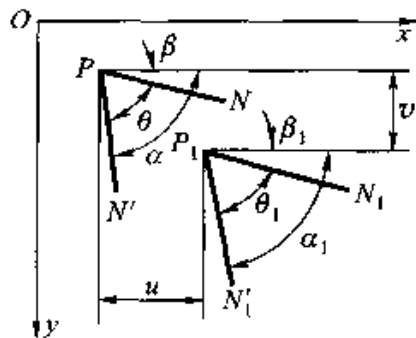


图 2-7

$$l_1 = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy}{dr(1 + \varepsilon_N)},$$

$$m_1 = \frac{dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy}{dr(1 + \varepsilon_N)}.$$

应用式(a), 并注意 ε_N 是微量, 可以取 $\frac{1}{1 + \varepsilon_N} = 1 - \varepsilon_N$, 则由以上两式可得

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_N \right) + m \frac{\partial u}{\partial y}, \\ m_1 &= m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_N \right) + l \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

同样, 设线段 PN' 在变形之前的方向余弦是 l' 、 m' , 在变形之后, 线段 PN' 成为 $P_1N'_1$, 而它的方向余弦成为

$$\left. \begin{aligned} l'_1 &= l' \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{N'} \right) + m' \frac{\partial u}{\partial y}, \\ m'_1 &= m' \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_{N'} \right) + l' \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

其中 $\varepsilon_{N'}$ 是线段 PN' 的线应变。

命线段 PN 和 PN' 在变形前后的夹角分别为 θ 及 θ_1 , 则由图 2-7 可见

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = l'l + m'm, \\ \cos \theta_1 &= \cos(\alpha_1 - \beta_1) = \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \sin \alpha_1 \sin \beta_1 = l'_1 l'_1 + m'_1 m'_1. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

将式(e)和式(f)代入(g)中的第二式, 并略去高阶微量, 即得

$$\cos \theta_1 = (l'l + mm') (1 - \varepsilon_N - \varepsilon_{N'}) + 2 \left(ll' \frac{\partial u}{\partial x} + mm' \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (lm' + l'm) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

应用几何方程(2-3)及(g)中的第一式, 则上式成为

$$\cos \theta_1 = \cos \theta (1 - \varepsilon_N - \varepsilon_{N'}) + 2(ll'\varepsilon_x + mm'\varepsilon_y) + (lm' + l'm)\gamma_{xy}. \quad (2-12)$$

由此求出 θ_1 以后, 即可求得 PN 和 PN' 之间的夹角的改变 $\theta_1 - \theta$ 。

公式(2-11)可以用来由一点的形变分量计算该点任何斜向的线应变。反之, 如果已知一点任何三个斜向的线应变, 也可利用公式(2-11)来计算形变分量。命该三个斜向的方向余弦分别为 l_1 、 m_1 , l_2 、 m_2 , l_3 、 m_3 , 三个斜向的线应变分别为 ε_{N_1} 、 ε_{N_2} 和 ε_{N_3} , 则由公式(2-11)可建立下列三式:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{N_1} &= l_1^2 \varepsilon_x + m_1^2 \varepsilon_y + l_1 m_1 \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_{N_2} &= l_2^2 \varepsilon_x + m_2^2 \varepsilon_y + l_2 m_2 \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_{N_3} &= l_3^2 \varepsilon_x + m_3^2 \varepsilon_y + l_3 m_3 \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

由此可以求解 ε_x 、 ε_y 和 γ_{xy} 。

在实验应力分析中，经常用量测的办法得出 x 轴方向、 y 轴方向以及与该二轴成 45° 方向的线应变，这时，

$$l_1 = 1, \quad m_1 = 0; \quad l_2 = 0, \quad m_2 = 1; \quad l_3 = m_3 = 1/\sqrt{2}。$$

代入式(h)，即可解得

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{\lambda_1}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{\lambda_2}, \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{\lambda_3} - \varepsilon_{\lambda_1} - \varepsilon_{\lambda_2},$$

从而用物理方程求得应力分量。

为了由 P 点的位移分量 u 和 v 求得该点的沿任一斜方向的位移，只须利用简单的投影关系：仍用 l 及 m 代表 PN 的方向余弦，图 2-7，则 P 点的沿 PN 方向的位移为

$$u_N = lu + mv。$$

该点的最大位移显然就是 u 及 v 的合成，即

$$(u_N)_{\max} = \sqrt{u^2 + v^2}。$$

§ 2-6 物 理 方 程

现在来考虑平面问题的物理学方面，导出形变分量与应力分量之间的关系式，也就是平面问题中的物理方程。

在完全弹性的各向同性体内，形变分量与应力分量之间的关系极其简单，可根据胡克定律建立如下：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

式中的 E 是拉压弹性模量，又简称为弹性模量； G 是切变模量，又称为刚度模量； μ 是侧向收缩系数，又称为泊松比。这三个弹性常数之间有如下的关系：

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (2-14)$$

这些弹性常数不随应力或形变的大小而变，不随位置坐标而变，也不随方向而变，因为已经假定考虑的物体是完全弹性的，均匀的，而且是各向同性的。

在平面应力问题中， $\sigma_z = 0$ 。在(2-13)的第一式及第二式中删去 σ_z ，并将(2-14)代入(2-13)中的第六式，得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

这就是平面应力问题中的物理方程。此外，(2-13)中的第三式成为

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y),$$

可以用来求得薄板厚度的改变。又由(2-13)中的第四式及第五式可见，因为在平面应力问题中有 $\tau_{yz} = 0$ 和 $\tau_{zx} = 0$ ，所以有 $\gamma_{yz} = 0$ 和 $\gamma_{zx} = 0$ 。

在平面应变问题中，因为物体的所有各点都不沿 z 方向移动，即 $w = 0$ ，所以 z 方向的线段都没有伸缩，即 $\varepsilon_z = 0$ 。于是由(2-13)中的第三式得

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$$

代入(2-13)中的第一式及第二式，并注意(2-15)中的第三式仍然适用，得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

这就是平面应变问题中的物理方程。此外，因为在平面应变问题中也有 $\tau_{yz} = 0$ 和 $\tau_{zx} = 0$ ，所以也有 $\gamma_{yz} = 0$ 和 $\gamma_{zx} = 0$ 。

可以看出，如果在平面应力问题的物理方程(2-15)中，将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ， μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ ，就得到平面应变问题的物理方程(2-16)，其中的第三式也不例外，因为

$$\frac{2\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right)}{\frac{E}{1-\mu^2}} = \frac{2(1+\mu)}{E}$$

还可以看出,如果在平面应变问题的物理方程(2-16)中,将 E 换为 $\frac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1+\mu}$,就得到平面应力问题的物理方程(2-15),其中的第三式也并不例外,因为

$$\frac{2\left(1+\frac{\mu}{1+\mu}\right)}{\frac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2}} = \frac{2(1+\mu)}{E}$$

§ 2-7 边界条件

在§2-2、§2-4及§2-6三节所导出的方程中,下列8个方程是弹性力学平面问题的基本方程;2个平衡微分方程(2-2),3个几何方程(2-9),3个物理方程(2-15)或(2-16)。这8个基本方程中包含8个未知函数(坐标的未知函数):3个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$;3个形变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$;2个位移分量 u, v 。基本方程的数目恰好等于未知函数的数目,因此,在适当的边界条件下,从基本方程求解未知函数是可能的。

按照边界条件的不同,弹性力学问题分为位移边界问题、应力边界问题和混合边界问题。

在位移边界问题中,物体在全部边界上的位移分量都是已知的,也就是:在边界上,我们有

$$u_s = \bar{u}, \quad v_s = \bar{v}, \quad (2-17)$$

其中 u_s 和 v_s 表示边界上的位移分量,而 \bar{u} 和 \bar{v} 在边界上是坐标的已知函数。这就是平面问题的位移边界条件。

在应力边界问题中,弹性体在全部边界上所受的力都是已知的。但是,力已知的条件可以变换成为应力方面的条件。为此,只须把图2-4中的斜面 AB 取在弹性体的边界上,使得 N 成为边界面的外法线方向。这样,当斜面 AB 与 P 点无限接近时, p_x 及 p_y 将分别成为面力分量 \bar{f}_x 及 \bar{f}_y ,而 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ 将成为应力分量的边界值 $(\sigma_x)_s, (\sigma_y)_s, (\tau_{xy})_s, (\tau_{yx})_s$ 。于是可由公式(2-3)及(2-4)得出

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{yx})_s &= \bar{f}_x \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

这两个方程表明应力分量的边界值与已知面力分量之间的关系,这就是平面问题的应力边界条件。

当边界面垂直于某一坐标轴时, 应力边界条件将大为简化: 在垂直于 x 轴的边界上, $l = \pm 1, m = 0$, 应力边界条件(2-18)简化为

$$(\sigma_x)_s = \pm \bar{f}_x, \quad (\tau_{xy})_s = \pm \bar{f}_y;$$

在垂直于 y 轴的边界上, $l = 0, m = \pm 1$, 应力边界条件(2-18)简化为

$$(\sigma_y)_s = \pm \bar{f}_y, \quad (\tau_{xy})_s = \pm \bar{f}_x.$$

可见, 在这种边界上, 应力分量的边界值就等于对应的面力分量(当边界的外法线沿坐标轴正方向时, 两者的正负号相同; 当边界的外法线沿坐标轴负方向时, 两者的正负号相反)。

注意: 在垂直于 x 轴的边界上, 应力边界条件中并没有 $(\sigma_y)_s$; 在垂直于 y 轴的边界上, 应力边界条件中并没有 $(\sigma_x)_s$ 。这就是说, 平行于边界方向的正应力, 它的边界值与面力分量并不直接相关。

在混合边界问题中, 物体的一部分边界具有已知位移, 因而具有位移边界条件, 如(2-17)所示; 另一部分边界则具有已知面力, 因而具有应力边界条件, 如(2-18)所示。此外, 在同

一部分边界上还可能出现混合边界条件, 即, 两个边界条件中的一个为位移边界条件, 而另一个则是应力边界条件。例如, 设垂直于 x 轴的某一个边界是连杆支承边, 图 2-8a, 则在 x 方向有位移边界条件 $u_s = \bar{u} = 0$, 而在 y 方向有应力边界条件 $(\tau_{xy})_s = \bar{f}_y = 0$ 。又例如, 设垂直于 x 轴的某一个边界是齿槽边, 图 2-8b, 则在 x 方向有应力

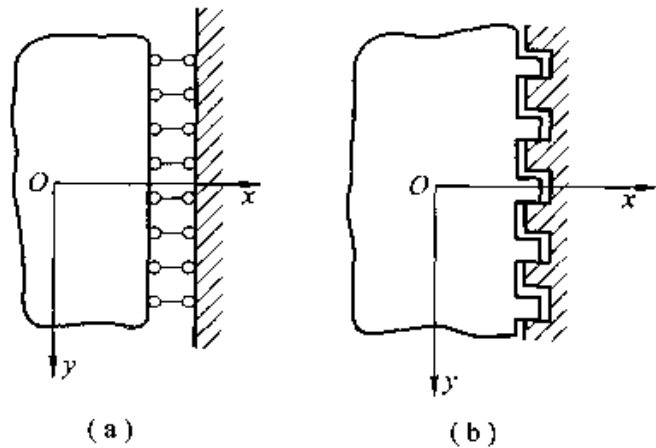


图 2-8

边界条件 $(\sigma_x)_s = 0$, 而在 y 方向有位移边界条件 $v_s = \bar{v} = 0$ 。在垂直于 y 轴的边界上, 以及与坐标轴斜交的边界上, 都可能与有此相似的混合边界条件。

§ 2-8 圣维南原理

在求解弹性力学问题时, 使应力分量、形变分量、位移分量完全满足基本方程, 并不困难; 但是, 要使得边界条件也得到完全满足, 却往往发生很大的困难(因此, 弹性力学问题在数学上被称为边值问题或边界问题)。

另一方面, 在很多的工程结构计算中, 都会遇到这样的情况: 在物体的一小部分边界上, 仅仅知道物体所受的面力的合成, 而这个面力的分布方式并不

明确，因而无从考虑这部分边界上的应力边界条件。

在上述两种情况下，圣维南原理有时可以提供很大的帮助。

圣维南原理可以这样来陈述：如果把物体的一小部分边界上的面力，变换为分布不同但静力等效的面力（主矢量相同，对于同一点的主矩也相同），那么，近处的应力分布将有显著的改变，但是远处所受的影响可以不计。

例如，设有柱形构件，在两端截面的形心受到大小相等而方向相反的拉力 F ，图 2-9a。如果把一端或两端的拉力变换为静力等效的力，图 2-9b 或 2-9c，则只有虚线划出的部分的应力分布有显著的改变，而其余部分所受的影响是可以不计的。如果再将两端的拉力变换为均匀分布的拉力，集度等于 F/A ，其中 A 为构件的横截面面积，图 2-9d，仍然只有靠近两端部分的应力受到显著的影响。这就是说，在上述四种情况下，离开两端较远的部分的应力分布，并没有显著的差别。

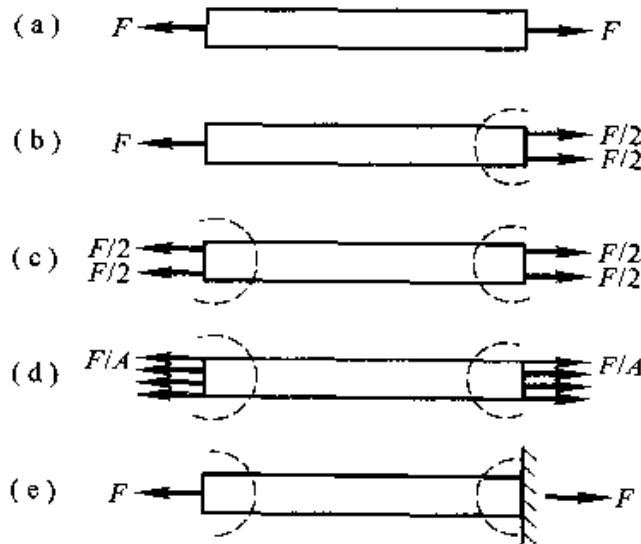


图 2-9

以后可见，在图 2-9d 所示的情况下，由于面力连续均匀分布，边界条件简单，应力是很容易求得而且解答是很简单的。但是，在其余三种情况下，由于面力不是连续分布，甚至只知其合成为 F 而不知其分布方式，应力是难以求解的。根据圣维南原理，将图 2-9d 所示情况下的应力解答应用到其余三个情况，虽然不能完全满足两端的应力边界条件，但仍然可以表明离杆端较远处的应力状态，而并没有显著的误差。这是已经为理论分析和实验量测所证实了的。

必须注意：应用圣维南原理，绝不能离开“静力等效”的条件。例如，在图 2-9a 所示的构件上，如果两端面力的合力 F 不是作用于截面的形心，而具有一定的偏心距离，那么，作用在每一端的面力，不管它的分布方式如何，与作用在截面形心的力 F 总归不是静力等效的。这时的应力，与图示四种情况下

的应力相比，就不仅是在靠近两端处有差异，而且在整个构件中都是不相同的。

当物体一小部分边界上的位移边界条件不能精确满足时，也可以应用圣维南原理而得到有用的解答。例如，设图 2-9 所示构件的右端是固定端，图 2-9e，这就是说，在该构件的右端，有位移边界条件 $u = u_x = 0$ 和 $v = v_x = 0$ 。把图 2-9d 所示情况下的简单解答应用于这一情况时，这个位移边界条件是不能满足的。但是，显然可见，右端的面力，一定是合成为经过截面形心的力 F ，它和左端的面力成平衡。这就是说，右端(固定端)的面力，静力等效于经过右端截面形心的力 F 。因此，根据圣维南原理，把上述简单解答应用于这一情况时，仍然只是在靠近两端处有显著的误差，而在离两端较远之处，误差是可以不计的。

圣维南原理也可以这样来陈述：如果物体一小部分边界上的面力是一个平衡力系(主矢量及主矩都等于零)，那么，这个面力就只会使得近处产生显著的应力，远处的应力可以不计。这样的陈述和上面的陈述完全等效，因为静力等效的两组面力，它们的差异是一个平衡力系。

§ 2-9 按位移求解平面问题

在结构力学里看到，计算超静定结构，有三种基本方法，就是位移法，力法和混合法。在位移法中，以某些位移为基本未知量；在力法中，以某些反力或内力为基本未知量；在混合法中，同时以某些位移和某些反力或内力为基本未知量。解出基本未知量以后，再求其他的未知量。

与此相似，在弹性力学里求解问题，也有三种基本方法，就是按位移求解，按应力求解和混合求解。按位移求解时，以位移分量为基本未知函数，由一些只包含位移分量的微分方程和边界条件求出位移分量以后，再用几何方程求出形变分量，从而用物理方程求出应力分量。按应力求解时，以应力分量为基本未知函数，由一些只包含应力分量的微分方程和边界条件求出应力分量以后，再用物理方程求出形变分量，从而用几何方程求出位移分量。在混合求解时，同时以某些位移分量和应力分量为基本未知函数，由一些只包含这些基本未知函数的微分方程和边界条件求出这些基本未知函数以后，再用适当的方程求出其他的未知函数。

现在来导出按位移求解平面问题时所需用的微分方程和边界条件。

在平面应力问题中，物理方程是(2-15)，即

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy},$$

由上列三式求解应力分量, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

将几何方程(2-9)代入, 得弹性方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

再将式(a)代入平衡微分方程(2-2), 简化以后, 即得

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f_x &= 0, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + f_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

这是用位移表示的平衡微分方程, 也就是按位移求解平面应力问题时所需用的基本微分方程。

另一方面, 将式(a)代入应力边界条件(2-18), 简化以后, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left[l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i + m \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_i \right] &= \bar{f}_i, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left[m \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + l \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i \right] &= \bar{f}_i. \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

这是用位移表示的应力边界条件, 也就是按位移求解平面应力问题时所用的应力边界条件。位移边界条件仍然如(2-17)所示。

总结起来, 按位移求解平面应力问题时, 要使得位移分量满足微分方程(2-20), 并在边界上满足边界条件(2-17)或(2-21)。求出位移分量以后, 即可用几何方程(2-9)求得形变分量, 从而用公式(2-19)求得应力分量。

对于平面应变问题, 须在上面的各个方程中将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, 将 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

由以上所述可见，在一般情况下，按位移求解平面问题，最后还须处理联立的两个二阶偏微分方程，而不能再简化为处理一个单独微分方程的问题（像体力为常量时按应力函数求解应力边界问题那样）。这是按位移求解的缺点，也是按位移求解并未能得出很多函数式解答的原因。但是，在原则上，按位移求解可以适用于任何平面问题——不论体力是不是常量，也不论问题是位移边界问题还是应力边界问题或混合边界问题，因此，如果我们并不拘泥于追求函数式解答，而着眼于为一些工程实际问题求得数值解答，则按位移求解的优越性将是十分明显的。

§ 2-10 按应力求解平面问题。相容方程

现在来导出按应力求解平面问题时所需用的微分方程。平衡微分方程(2-2)本来就不包含形变分量和位移分量，应当保留。于是，只须由三个几何方程中消去位移分量，得出三个形变分量之间的一个关系式，再将三个物理方程代入这个关系式，使它只包含应力分量，具体推演如下：

平面问题的几何方程是(2-9)，也就是

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{a})$$

将 ε_x 对 y 的二阶导数和 ε_y 对 x 的二阶导数相加，得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

但这个等式右边括弧中的表达式就等于 γ_{xy} ，因此得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2-22)$$

这个关系式称为形变协调方程或相容方程。形变分量 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 必须满足这个方程，才能保证位移分量 u 和 v 的存在。如果任意选取函数 ε_x 、 ε_y 和 γ_{xy} ，而不能满足这个方程，那么，由三个几何方程中的任何两个求出的位移分量，将与第三个几何方程不能相容，这时就不可能求得位移。

例如，试取不能满足相容方程(2-22)的形变分量

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \gamma_{xy} = Cxy, \quad (\text{b})$$

其中的常数 C 不等于零。由几何方程(a)中的前二式得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

从而得

$$u = f_1(y), \quad v = f_2(x). \quad (c)$$

另一方面，将(b)中的第三式代入(a)中的第三式，又得

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = Cxy. \quad (d)$$

显然，式(c)与式(d)不能相容，也就是互相矛盾，于是就不可能求得满足几何方程(a)的位移。

现在，我们来利用物理方程将相容方程中的形变分量消去，使相容方程中只包含应力分量(基本未知函数)。

对于平面应力的情况，将物理方程(2-15)代入(2-22)，得

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (e)$$

利用平衡微分方程，可以简化式(e)，使它只包含正应力而不包含切应力。为此，将平衡微分方程(2-2)写成

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - f_x, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - f_y.$$

将前一方程对 x 求导，后一方程对 y 求导，然后相加，并注意 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ，得

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial f_y}{\partial y}.$$

代入式(e)，简化以后，得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \mu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right). \quad (2-23)$$

对于平面应变的情况，进行同样的推演，可以导出一个与此相似的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1 - \mu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right). \quad (2-24)$$

但是，也可以不必进行推演，只要如 § 2-6 中所述，把方程(2-23)中的 μ 换为 $\frac{\mu}{1 - \mu}$ ，就得到这一方程。

这样，按应力求解平面问题时，在平面应力问题中，应力分量应当满足平衡微分方程(2-2)和相容方程(2-23)；在平面应变问题中，应力分量应当满足平衡微分方程(2-2)和相容方程(2-24)。此外，应力分量在边界上还应当满足应力边界条件(2-18)。

位移边界条件(2-17)一般是无法改用应力分量及其导数来表示的。因此，对于位移边界问题和混合边界问题，一般都不宜按应力求解。

对于应力边界问题，是否满足了平衡微分方程、相容方程和应力边界条件，就能完全确定应力分量，还要看所考察的物体是单连体还是多连体。所谓单连体，就是具有这样几何性质的物体：对于在物体内所作的任何一根闭合曲

线, 都可以使它在物体内部不断收缩而趋于一点。例如, 一般的实体和空心圆球, 就是单连体。所谓多连体, 就是不具有上述几何性质的物体, 例如圆环或圆筒, 就是多连体。在平面问题中也可以这样简单地说: 单连体就是只具有单个连续边界的物体, 多连体则是具有多个连续边界的物体, 也就是有孔口的物体。

对于平面问题, 可以证明: 如果满足了平衡微分方程和相容方程, 也满足了应力边界条件, 那么, 在单连体的情况下, 应力分量就完全确定了。但是, 在多连体的情况下, 应力分量的表达式中可能还留有待定函数或待定常数; 在由这些应力分量求出的位移分量表达式中, 由于通过了积分运算, 可能出现多值项, 表示弹性体的同一点具有不同的位移, 而在连续体中这是不可能的。根据“位移必须为单值”这样的所谓位移单值条件, 命这种多值项等于零, 就可以完全确定应力分量。具体的实例见 § 4-6。

§ 2-11 常体力情况下的简化

在很多的工程问题中, 体力是常量, 也就是说, 体力分量 f_x 和 f_y 在整个弹性体内是常量, 不随坐标而变(例如重力和平行移动时的惯性力, 就是常量的体力)。在这种情况下, 相容方程(2-23)和(2-24)的右边都成为零, 而两种平面问题的相容方程都简化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2-25)$$

可见, 在常体力的情况下, $\sigma_x + \sigma_y$ 应当满足拉普拉斯微分方程, 即调和方程, 也就是说, $\sigma_x + \sigma_y$ 应当是调和函数。为了书写简便, 下面用记号 ∇^2 代表 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 把方程(2-25)简写为

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

注意, 在常体力的情况下, 平衡微分方程(2-2)、相容方程(2-25)和应力边界条件(2-18)中都不包含弹性常数, 而且对于两种平面问题都是相同的。因此, 在单连体的应力边界问题中, 如果两个弹性体具有相同的边界形状, 并受到同样分布的外力, 那么, 就不管这两个弹性体的材料是否相同, 也不管它们是在平面应力情况下或是在平面应变情况下, 应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 的分布是相同的(两种平面问题中的应力分量 σ_x , 以及形变和位移, 却不一定相同)。

根据上述结论, 针对任一物体而求出的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} , 也适用于

具有同样边界并受有同样外力的其他材料的物体；针对平面应力问题而求出的这些应力分量，也适用于边界相同、外力相同的平面应变情况下的物体。这对于弹性力学解答在工程上的应用，提供了极大的方便。

另一方面，根据上述结论，在用实验方法量测结构或构件的上述应力分量时，可以用便于量测的材料来制造模型，以代替原来不便于量测的结构或构件材料；还可以用平面应力情况下的薄板模型，来代替平面应变情况下的长柱形的结构或构件。这对于实验应力分析，也提供了极大的方便。

在常体力情况下，对于单连体的应力边界问题，还可以把体力的作用转换为面力的作用，以便于解答问题和实验量测，说明如下。

设原问题中的应力分量为 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} ，确定这些应力分量的微分方程是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

而边界条件是

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_n + m(\tau_{xy})_n &= \bar{f}_x, \\ m(\sigma_x)_n + l(\tau_{xy})_n &= \bar{f}_y. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

在上列各式中，已经用 τ_{xy} 代替了 τ_{yx} 。

现在，命

$$\sigma_x = \sigma'_x - f_x, \quad \sigma_y = \sigma'_y - f_y, \quad \tau_{xy} = \tau'_{xy}, \quad (c)$$

而来导出 σ'_x 、 σ'_y 、 τ'_{xy} 所应当满足的微分方程和边界条件。为此，将式(c)代入式(a)，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma'_x + \sigma'_y) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

另一方面，将式(c)代入式(b)，得

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma'_x)_n + m(\tau'_{xy})_n &= \bar{f}_x + lf_x, \\ m(\sigma'_x)_n + l(\tau'_{xy})_n &= \bar{f}_y + mf_y. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

将式(d)及式(e)分别与式(a)及式(b)对比，可见 σ'_x 、 σ'_y 、 τ'_{xy} 所应满足的微分方程及边界条件和这样的情况下相同：体力等于零而面力分量 \bar{f}_x 及 \bar{f}_y 分别增加

$\int l_f x$ 及 $m f_y$ 。

于是得出求解原问题的一个办法：先不计体力，而对弹性体施以代替体力的面力分量 $\bar{f}_x^* = l_f x$ 及 $\bar{f}_y^* = m f_y$ 。这样求出应力分量 σ'_x 、 σ'_y 、 τ'_{xy} 以后，再按照式(c)，在 σ'_x 及 σ'_y 上分别叠加以 $-f_x$ 及 $-f_y$ ，即得原问题的应力分量。

例如，对于图 2-10a 所示深梁在重力作用下的应力分析，如果用数值法（例如差分法）计算，将比面力作用下的计算要复杂得多；如果用实验方法量测应力，施加模拟的重力荷载也比施加面力荷载麻烦得多。采用上述办法，则计算或量测都比较简单一些。

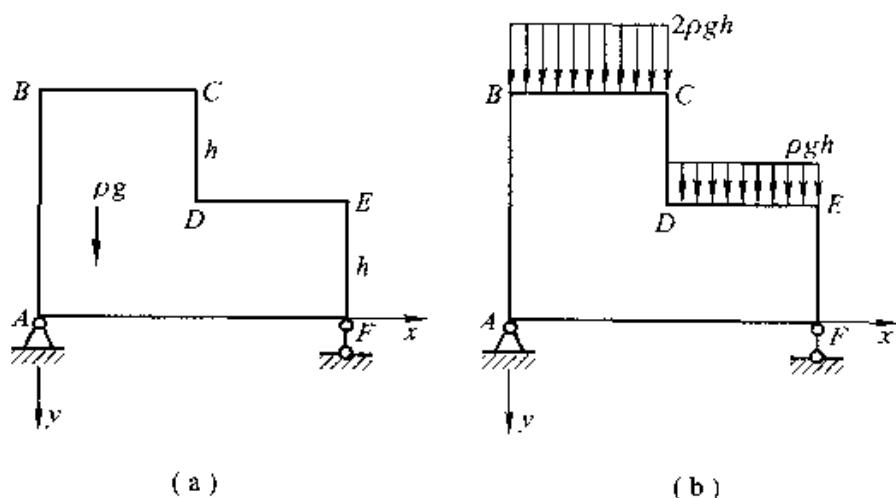


图 2-10

按照上述办法，先不计体力，而施以代替体力的面力。取坐标轴如图所示，则 $f_x = 0$ 而 $f_y = \rho g$ ，其中 ρ 是深梁的密度， g 是重力加速度。代替体力的面力分量是

$$\bar{f}_x^* = l_f x = 0, \quad \bar{f}_y^* = m f_y = m \rho g y,$$

在边界 AF 上， $y = 0$ ，因而 $m \rho g y = 0$ ，无须施加面力。在边界 AB 、 CD 及 EF 上， $m = 0$ ，因而 $m \rho g y = 0$ ，也无须施加面力。在边界 DE 及 BC 上， $m = -1$ ，而 y 分别等于 $-h$ 及 $-2h$ ，因此，应分别施加面力 $\bar{f}_y^* = \rho g h$ 及 $\bar{f}_y^* = 2\rho g h$ （正的面力应当沿着正标向，即向下），如图 2-10b 所示。

用计算方法，或用量测方法，求出图 2-10b 所示情况下的应力分量 σ'_x 、 σ'_y 、 τ'_{xy} 以后，即可求得原问题中重力所引起的应力分量：

$$\sigma_x = \sigma'_x - f_x = \sigma'_x,$$

$$\sigma_y = \sigma'_y - f_y = \sigma'_y - \rho g y,$$

$$\tau_{xy} = \tau'_{xy}.$$

当然，所取的坐标系不同，则代替体力的面力也将不同，应力分量 σ'_x 、 σ'_y 、 τ'_{xy} 也就不同。但是，最后得出的 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 总是-一样的。

§ 2-12 应力函数。逆解法与半逆解法

前一节中已经指出,按应力求解应力边界问题时,在体力为常量的情况下,应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 应当满足平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

以及相容方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (\text{b})$$

并在边界上满足应力边界条件。当然,上述应力分量还应当满足位移单值条件。

首先来考察平衡微分方程(a)。这是一个非齐次微分方程组,它的解答包含两个部分,即,任意一个特解及下列齐次微分方程的通解:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

特解可以取为

$$\sigma_x = -f_x x, \quad \sigma_y = -f_y y, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (\text{d})$$

也可以取为

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -f_x y - f_y x,$$

以及

$$\sigma_x = -f_x x - f_y y, \quad \sigma_y = -f_x x - f_y y, \quad \tau_{xy} = 0,$$

等的形式,因为它们都能满足微分方程(a)。

为了求得齐次微分方程(c)的通解,将其中前一个方程改写为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (-\tau_{xy}).$$

根据微分方程理论,这就一定存在某一个函数 $A(x, y)$, 使得

$$\sigma_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad (\text{e})$$

$$-\tau_{xy} = \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (\text{f})$$

同样, 将(c)中的第二个方程改写为

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-\tau_{xy}),$$

可见也一定存在某一个函数 $B(x, y)$, 使得

$$\sigma_y = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (g)$$

$$-\tau_{xy} = \frac{\partial B}{\partial y}. \quad (h)$$

由式(f)及式(h)得

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y},$$

因而又一定存在某一个函数 $\Phi(x, y)$, 使得

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (i)$$

$$B = \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (j)$$

将式(i)代入式(e), 式(j)代入式(g), 并将式(i)代入式(f), 即得通解

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (k)$$

将通解(k)与任一组特解叠加, 例如与特解(d)叠加, 即得微分方程(a)的全解:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (2-26)$$

不论 Φ 是什么样的函数, 应力分量(2-26)总能满足平衡微分方程(a)。函数 Φ 称为平面问题的应力函数, 也称为艾里应力函数。

应力分量(2-26)同时也必须满足相容方程(b), 即方程(2-25)。因此, 应力函数 Φ 必须满足相应的方程。将(2-26)代入式(b), 即得这一方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \right) = 0.$$

注意 f_x 及 f_y 为常量, 可见上式后一括弧中的 f_x 及 f_y 并不起作用, 可以删去, 于是上式简化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0,$$

或者展开而成为

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (2-27)$$

这就是用应力函数表示的相容方程。由此可见, 应力函数应当是重调和函数。

方程(2-27)可以简写为 $\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0$ ，或者进一步简写为

$$\nabla^4 \Phi = 0。$$

如果体力可以不计，则 $f_x = f_y = 0$ ，公式(2-26)简化为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}。 \quad (2-28)$$

于是，按应力求解应力边界问题时，如果体力是常量，就只须由微分方程(2-27)求解应力函数 Φ ，然后用公式(2-26)或(2-28)求出应力分量，但这些应力分量在边界上应当满足应力边界条件；在多连体的情况下，有时还须考虑位移单值条件。

方程(2-27)是偏微分方程，它的解答一般都不可能直接求出，因此，在具体求解问题时，只能采用逆解法或半逆解法。

所谓逆解法，就是先设定各种形式的、满足相容方程(2-27)的应力函数 Φ ，用公式(2-26)或(2-28)求出应力分量，然后根据应力边界条件来考察，在各种形状的弹性体上，这些应力分量对应于什么样的面力，从而得知所设定的应力函数可以解决什么问题。

所谓半逆解法，就是针对所要求解的问题，根据弹性体的边界形状和受力情况，假设部分或全部应力分量为某种形式的函数，从而推出应力函数 Φ ，然后来考察，这个应力函数是否满足相容方程，以及，原来所假设的应力分量和由这个应力函数求出的其余应力分量，是否满足应力边界条件和位移单值条件。如果相容方程和各方面的条件都能满足，自然也就得出正确的解答；如果某一方面不能满足，就要另作假设，重新考察。

习 题

2-1 设有任意形状的等厚度薄板，体力可以不计，在全部边界上(包括孔口边界上)受有均匀压力 q 。试证 $\sigma_x = \sigma_y = -q$ 及 $\tau_{xy} = 0$ 能满足平衡微分方程、相容方程和边界条件，同时也满足位移单值条件，因而就是正确的解答。

2-2 设有矩形截面的悬臂梁，在自由端受有集中荷载 F ，体力可以不计。试根据材料力学公式写出弯应力 σ_x 和切应力 τ_{xy} 的表达式，并取挤压应力 $\sigma_y = 0$ ，然后证明，这些表达式满足平衡微分方程和相容方程。这些表达式是否就表示正确的解答？

2-3 试证明，如果体力虽然不是常量，但却是有势的力，即

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

其中 V 是势函数，则应力分量亦可用应力函数 Φ 表示成为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + V, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + V, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}。$$

试导出相应的相容方程。

答案：平面应力情况下的相容方程为

$$\nabla^2 \Phi = -(1 - \mu) \nabla^2 V,$$

平面应变情况下的相容方程为

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} \nabla^2 V.$$

2-4 试证明：在发生最大与最小切应力的面上，正应力的数值都等于两个主应力的平均值。

参 考 教 材

- [1] 铁木辛柯，古迪尔著，弹性理论[M]，徐芝纶译，北京：高等教育出版社，1990：第二章。

第三章 平面问题的直角坐标解答

§ 3-1 多项式解答

本节中将用逆解法求出几个简单平面问题的多项式解答。假定体力可以不计，也就是 $f_x = f_y = 0$ 。

首先取应力函数为一次式

$$\Phi = a + bx + cy$$

不论各系数取任何值，相容方程(2-27)总能满足。由公式(2-28)得应力分量 $\sigma_x = 0$ 、 $\sigma_y = 0$ 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ 。不论弹性体为任何形状，也不论坐标系如何选择，由应力边界条件总是得出 $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$ 。由此可见：(1)线性应力函数对应于无面力、无应力的状态。(2)把任何平面问题的应力函数加上一个线性函数，并不影响应力。

其次取二次式

$$\Phi = ax^2 + bxy + cy^2$$

不论各系数取任何值，相容方程(2-27)也总能满足。为明了起见，试分别考察该式中每一项所能解决的问题。

对应于 $\Phi = ax^2$ ，由公式(2-28)得应力分量 $\sigma_x = 0$ ， $\sigma_y = 2a$ ， $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ 。对于图3-1a所示的矩形板和坐标方向，当板内发生上述应力时，左右两边没有面力，面上下两边分别有向上和向下的均布面力 $2a$ 。可见，应力函数

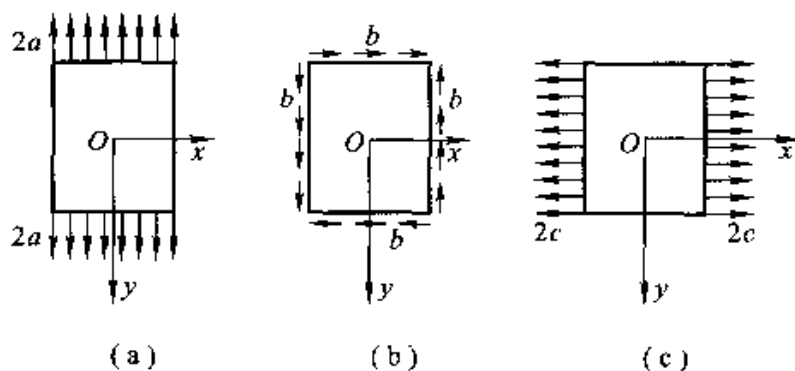


图 3-1

$\Phi = ax^2$ 能解决矩形板在 y 方向受均布拉力(设 $a > 0$)或均布压力(设 $a < 0$)的问题。

对应于 $\Phi = bxy$, 应力分量是 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -b$ 。对于图 3-1b 所示的矩形板和坐标方向, 当板内发生上述应力时, 在左右两边分别有向下和向上的均布面力 b , 而在上下两边分别有向右和向左的均布面力 b 。可见, 应力函数 $\Phi = bxy$ 能解决矩形板受均布剪力的问题。

极易看出, 应力函数 $\Phi = cy^2$ 能解决矩形板在 x 方向受均布拉力(设 $c > 0$)或均布压力(设 $c < 0$)的问题, 图 3-1c。

再其次, 取三次式

$$\Phi = ay^3$$

不论系数 a 取任何值, 相容方程(2-27)也总能满足。

对应的应力分量是

$$\sigma_x = 6ay, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \quad (a)$$

对于图 3-2 所示的矩形板和坐标系, 当板内发生上述应力时, 上下两边没有面力; 在左右两边, 没有铅直面力, 但有按直线变化的水平面力, 而每一边上的水平面力合成为一个力偶。可见, 应力函数(a)能解决矩形梁受纯弯曲的问题。

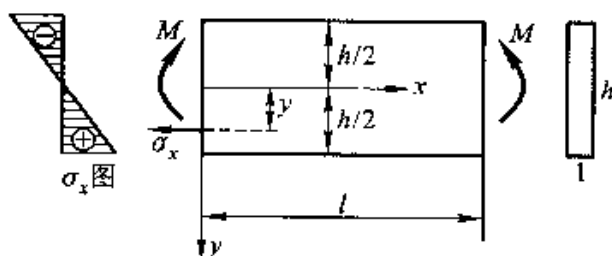


图 3-2

式(a)中的系数 a 决定于力偶矩的大小。为了方便, 取单位宽度的梁来考察, 图 3-2, 并命每单位宽度上力偶的矩为 M 。注意 M 与力的量纲相同, 即 LMT^{-2} 。在左端或右端, 水平面力应当合成为力偶, 而力偶的矩为 M , 这就要求

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y dy = M$$

将式(a)中的 σ_x 代入, 上列二式成为

$$6a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y dy = 0, \quad 6a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = M$$

前一式总能满足, 而后一式要求

$$a = \frac{2M}{h^3}$$

代入式(a), 得

$$\sigma_x = \frac{12M}{h^3}y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

注意到梁截面的惯矩是 $I = \frac{1}{12} \times h^3$, 上式又可以改写成为

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \quad (3-1)$$

这就是矩形梁受纯弯曲时的应力分量, 结果与材料力学中完全相同。

应当指出, 组成梁端力偶的面力必须按直线分布, 而且在梁截面的中心处为零, 解答(3-1)才是完全精确的。如果梁端的面力按其他方式分布, 解答(3-1)是有误差的。但是, 按照圣维南原理, 只在梁的两端附近有显著的误差; 在离开梁端较远之处, 误差是可以不计的。由此可见, 对于长度 l 远大于深度 h 的梁, 解答(3-1)是有实用价值的; 对于长度 l 与深度 h 同等大小的所谓深梁, 这个解答是没有什么实用意义的。

§ 3-2 位移分量的求出

本节中以矩形梁的纯弯曲问题为例, 说明如何由应力分量求出位移分量。

假定这里是平面应力的情况。将应力分量(3-1)代入物理方程(2-15), 得形变分量

$$\varepsilon_x = \frac{M}{EI}y, \quad \varepsilon_y = -\frac{\mu M}{EI}y, \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (a)$$

再将式(a)代入几何方程(2-9), 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{EI}y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mu M}{EI}y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (b)$$

前二式的积分给出

$$u = \frac{M}{EI}xy + f_1(y), \quad v = -\frac{\mu M}{2EI}y^2 + f_2(x) \quad (c)$$

其中的 f_1 和 f_2 是任意函数。将式(c)代入(b)中的第三式, 得

$$\frac{df_2(x)}{dx} + \frac{M}{EI}x + \frac{df_1(y)}{dy} = 0,$$

或者移项而得

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx} + \frac{M}{EI}x_c$$

等式左边只是 y 的函数，而等式右边只是 x 的函数。因此，只可能两边都等于同一常数 ω 。于是有

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\omega, \quad \frac{df_2(x)}{dx} = -\frac{M}{EI}x + \omega$$

积分以后得

$$f_1(y) = -\omega y + u_0, \quad f_2(x) = -\frac{M}{2EI}x^2 + \omega x + v_0$$

代入式(c)，得位移分量

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M}{EI}xy - \omega y + u_0, \\ v &= -\frac{\mu M}{2EI}y^2 - \frac{M}{2EI}x^2 + \omega x + v_0, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

其中的任意常数 ω 、 u_0 、 v_0 为刚体位移，须由约束条件求得。

由(d)中的第一式可见，不论约束情况如何（也就是不论 ω 、 u_0 、 v_0 取任何值），铅直线段的转角为（见 § 2-4）。

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{M}{EI}x - \omega$$

在同一个横截面上， x 是常量，因而 β 也是常量。可见，同一横截面上的各铅直线段的转角相同。这就是说，横截面保持为平面。

又由(d)中的第二式可见，不论约束情况如何，只要位移是微小的，梁的各纵向纤维的曲率都是

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI} \quad (3-2)$$

这是材料力学中求梁的挠度时所用的基本公式。

如果梁是简支梁，图 3-3a，则在铰支座 O 处既没有水平位移，也没有铅直位移；在连杆支座 A ，没有铅直位移。因此，约束条件是

$$(u)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0, \quad (v)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0, \quad (v)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0$$

于是由式(d)得出

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad -\frac{Ml^2}{2EI} + \omega l + v_0 = 0,$$

也就是

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad \omega = \frac{Ml}{2EI}$$

代入式(d)，就得到该简支梁的位移分量

$$u = \frac{M}{EI} \left(x - \frac{l}{2} \right) y, \quad v = \frac{M}{2EI} (l-x)x - \frac{\mu M}{2EI} y^2. \quad (3-3)$$

梁轴的挠度方程是

$$(v)_{y=0} = \frac{M}{2EI} (l-x)x,$$

和材料力学中的结果相同。

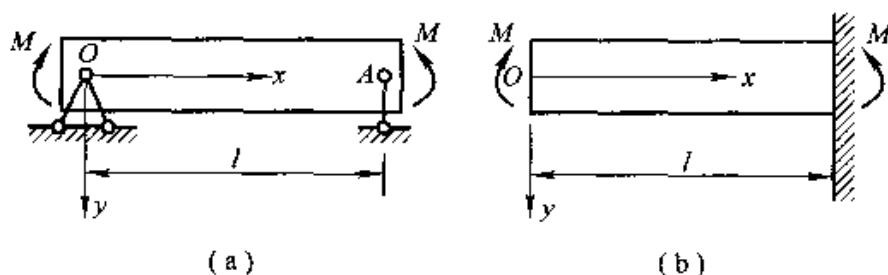


图 3-3

如果梁是悬臂梁，左端自由而右端完全固定，图 3-3b，则在梁的右端 ($x=l$)，对于 y 的任何值 ($-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$)，都要求 $u=0$ 和 $v=0$ 。由式(d)显然可见，这个条件无法满足。在工程实际上，这种完全固定的约束条件也是不大可能实现的。现在，和材料力学中一样，假定右端截面的中点不移动，该点的水平线段不转动。这样，约束条件是

$$(u)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0, \quad (v)_{\substack{x=l \\ v=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\substack{x=l \\ v=0}} = 0.$$

于是由式(d)得出下列三个方程来决定 ω 、 u_0 、 v_0 ：

$$u_0 = 0, \quad -\frac{Ml^2}{2EI} + \omega l + v_0 = 0, \quad -\frac{Ml}{EI} + \omega = 0.$$

求解以后，得

$$u_0 = 0, \quad v_0 = -\frac{Ml^2}{2EI}, \quad \omega = \frac{Ml}{EI}$$

代入式(d)，得出该悬臂梁的位移分量：

$$u = -\frac{M}{EI} (l-x)y, \quad v = -\frac{M}{2EI} (l-x)^2 - \frac{\mu M}{2EI} y^2. \quad (3-4)$$

梁轴的挠度方程是

$$(v)_{y=0} = -\frac{M}{2EI} (l-x)^2,$$

也和材料力学中的解答相同。

对于平面应变情况下的梁，需在以上的形变公式和位移公式中，把 E 换为

$\frac{E}{1-\mu^2}$, 把 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。例如, 梁的纵向纤维的曲率公式(3-2), 应该变换为

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{(1-\mu^2)M}{EI} \quad (3-5)$$

§ 3-3 简支梁受均布荷载

设有矩形截面的简支梁, 深度为 h , 长度为 $2l$, 体力可以不计, 在上面受有均布荷载 q , 由两端的反力 ql 维持平衡, 图 3-4。为了方便, 仍然取单位宽度的梁来考虑。

用半逆解法。由材料力学已知: 弯应力 σ_x 主要是由弯矩引起的, 切应力 τ_{xy} 主要是由剪力引起的, 挤压应力 σ_y 主要是由直接荷载 q 引起的。现在, q 是不随 x 而变的常量, 因此可以假设 σ_x 不随 x 而变, 也就是假设 σ_y 只是 y 的函数:

$$\sigma_y = f(y),$$

于是由公式(2-28)有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = f(y).$$

对 x 积分, 得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = xf(y) + f_1(y), \quad (a)$$

$$\Phi = \frac{x^2}{2}f(y) + xf_1(y) + f_2(y), \quad (b)$$

其中 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 是任意函数, 即待定函数。

现在来考察, 式(b)所示的应力函数是否满足相容方程。为此, 求出式(b)的四阶导数

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2}, \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \frac{x^2 d^4 f(y)}{2 dy^4} + x \frac{d^4 f_1(y)}{dy^4} + \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4}.$$

代入相容方程(2-27), 可见各个待定函数应当满足方程

$$\frac{1}{2} \frac{d^4 f(y)}{dy^4} x^2 + \frac{d^4 f_1(y)}{dy^4} x + \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} + 2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = 0.$$

这是 x 的二次方程, 但相容条件要求它有无数多的根(全梁内的 x 值都应该满

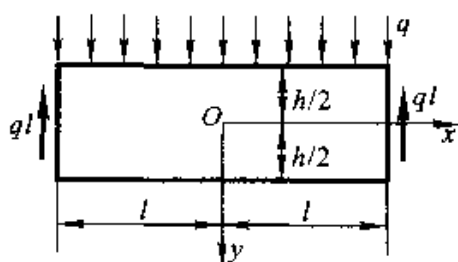


图 3-4

是它), 因此, 这个二次方程的系数和自由项都必须等于零, 即

$$\frac{d^4 f(y)}{dy^4} = 0, \quad \frac{d^4 f_1(y)}{dy^4} = 0, \quad \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} + 2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = 0.$$

前面两个方程要求

$$f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \quad f_1(y) = Ey^3 + Fy^2 + Gy. \quad (c)$$

在这里, $f_1(y)$ 中的常数项已被略去, 因为这一项在 Φ 的表达式中成为 x 的一次项, 不影响应力分量 (见 § 3-1)。第三个方程则要求

$$\frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} = -2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = -12Ay - 4B,$$

也就是要求

$$f_2(y) = -\frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2, \quad (d)$$

其中的一次项及常数项都被略去, 因为它们不影响应力分量。将式 (c) 及式 (d) 代入式 (b), 得应力函数

$$\Phi = \frac{x^2}{2}(Ay^3 + By^2 + Cy + D) + x(Ey^3 + Fy^2 + Gy) - \frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2. \quad (e)$$

将式 (e) 代入公式 (2-28), 得应力分量

$$\sigma_x = \frac{x^2}{2}(6Ay + 2B) + x(6Ey + 2F) - 2Ay^3 - 2By^2 + 6Hy + 2K, \quad (f)$$

$$\sigma_y = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \quad (g)$$

$$\tau_{xy} = -x(3Ay^2 + 2By + C) - (3Ey^2 + 2Fy + G). \quad (h)$$

这些应力分量是满足平衡微分方程和相容方程的。因此, 如果能够适当选择常数 A, B, \dots, K , 使所有的边界条件都被满足, 则应力分量 (f)、(g)、(h) 就是正确的解答。

在考虑边界条件以前, 先考虑一下问题的对称性 (如果这个问题有对称性的话), 往往可以减少一些运算工作。在这里, 因为 yz 面是梁和荷载的对称面, 所以应力分布应当对称于 yz 面。这样, σ_x 和 σ_y 应当是 x 的偶函数, 而 τ_{xy} 应当是 x 的奇函数。于是由式 (f) 和式 (h) 可见

$$E = F = G = 0.$$

如果不考虑问题的对称性, 那么, 在考虑过全部边界条件以后, 也可以得出同样的结果, 但运算工作要比较多次。

通常, 梁的跨度远大于梁的深度, 梁的上下两个边界占全部边界的绝大部分, 因而是主要的边界。在主要的边界上, 边界条件必须精确满足; 在次要的边界上 (很小部分的边界上), 如果边界条件不能精确满足, 就可以引用圣维南原理, 使边界条件得到近似的满足, 仍然可以得出有用的解答。

根据这个理由，先来考虑上下两边的边界条件：

$$(\sigma_x)_{y=-\frac{h}{2}} = 0, \quad (\sigma_x)_{y=\frac{h}{2}} = -q, \quad (\tau_{xy})_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0.$$

将应力分量(g)和(h)代入，并注意已经得出的 $E = F = G = 0$ ；可见这些边界条件要求

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{8}A + \frac{h^2}{4}B + \frac{h}{2}C + D &= 0, \\ -\frac{h^3}{8}A + \frac{h^2}{4}B - \frac{h}{2}C + D &= -q, \\ -x\left(\frac{3}{4}h^2A + hB + C\right) &= 0 \text{ 即 } \frac{3}{4}h^2A + hB + C = 0, \\ -x\left(\frac{3}{4}h^2A - hB + C\right) &= 0 \text{ 即 } \frac{3}{4}h^2A - hB + C = 0. \end{aligned}$$

由于上列四个方程是互不依赖的，也是不相矛盾的，而且只包含四个未知数，因此可以联立求解而得出

$$A = -\frac{2q}{h^3}, \quad B = 0, \quad C = \frac{3q}{2h}, \quad D = -\frac{q}{2}.$$

将以上已确定的常数代入(f)、(g)、(h)三式，得

$$\sigma_x = -\frac{6q}{h^3}x^2y + \frac{4q}{h^3}y^3 + 6Hy + 2K, \quad (i)$$

$$\sigma_y = -\frac{2q}{h^3}y^3 + \frac{3q}{2h}y - \frac{q}{2}, \quad (j)$$

$$\tau_{xy} = \frac{6q}{h^3}xy^2 - \frac{3q}{2h}x. \quad (k)$$

现在来考虑左右两边的边界条件。由于问题的对称性，只须考虑其中的一边，例如右边。如果右边的边界条件能满足，左边的边界条件自然也能满足。

首先，在梁的右边，没有水平外力，这就要求当 $x=l$ 时，不论 y 取任何值 $\left(-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}\right)$ ，都有 $\sigma_x = 0$ 。由式(i)可见，这是不可能满足的，除非是 $q = 0$ 。用多项式求解，只能要求 σ_x 在这部分边界上合成为平衡力系，也就是要求

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0, \quad (l)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} y dy = 0. \quad (m)$$

将式(i)代入式(l)，得

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-6 \frac{ql^2}{h^3} y + \frac{4q}{h^3} y^3 + 6Hy + 2K \right) dy = 0,$$

积分以后得

$$K = 0,$$

将式(i)代入式(m), 并命 $K = 0$, 得

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{6ql^2}{h^3} y + \frac{4q}{h^3} y^3 + 6Hy \right) y dy = 0,$$

积分以后得

$$H = \frac{ql^2}{h^3} - \frac{q}{10h}.$$

将 H 和 K 的已知值代入式(i), 得

$$\sigma_x = -\frac{6q}{h^3} x^2 y + \frac{4q}{h^3} y^3 + \frac{6ql^2}{h^3} y - \frac{3q}{5h} y. \quad (n)$$

另一方面, 在梁的右边, 切应力 τ_{xy} 应当合成为向上的反力 ql , 这就要求

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=l} dy = -ql,$$

在 ql 前面加了负号, 因为右边的切应力 τ_{xy} 以向下为正, 而 ql 是向上的。将式(k)代入, 上式成为

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{6ql}{h^3} y^2 - \frac{3ql}{2h} \right) dy = -ql,$$

积分以后, 可见这一条件是满足的。

将(n)、(j)、(k)三式略加整理, 得应力分量的最后解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{6q}{h^3} (l^2 - x^2) y + q \frac{y}{h} \left(4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \left(1 - \frac{2y}{h} \right)^2, \\ \tau_{xy} &= -\frac{6q}{h^3} x \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

各应力分量沿铅直方向的变化大致如图 3-5 所示。

因为梁截面的宽度是 $b = 1$, 惯矩是 $I = \frac{1}{12} h^3$, 静矩是 $S = \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}$, 而梁的任一横截面上的弯矩和剪力分别为

$$M = ql(l-x) - \frac{q}{2}(l-x)^2 = \frac{q}{2}(l^2 - x^2),$$

$$F_s = -ql + q(l-x) = -qx,$$

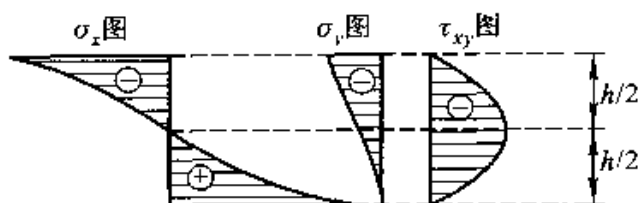


图 3-5

所以式(o)可以改写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M}{I}y + q \frac{y}{h} \left(4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \left(1 - \frac{2y}{h} \right)^2, \\ \tau_{xy} &= \frac{F_s S}{bI} \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

在弯应力 σ_x 的表达式中，第一项是主要项，和材料力学中的解答相同，第二项则是弹性力学提出的修正项。对于通常的浅梁；修正项很小，可以不计。对于较深的梁，则须注意修正项。

应力分量 σ_y 乃是梁的各纤维之间的挤压应力，它的最大绝对值是 q ，发生在梁顶。在材料力学中，一般不考虑这个应力分量。

切应力 τ_{xy} 的表达式和材料力学里完全一样。

注意：按照式(o)，在梁的右边和左边，有水平面力

$$\bar{f}_x = \pm (\sigma_x)_{y=\pm l} = \pm q \frac{y}{h} \left(4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right) c$$

但是，由式(1)及式(m)可见，每一边的水平面力是一个平衡力系，因此，根据圣维南原理，不管这些面力是否存在，离两边较远处的应力都和公式(3-6)所示的一样。

§ 3-4 楔形体受重力和液体压力

设有楔形体，图 3-6a，左面铅直，右面与铅直面成角 α ，下端作为无限长，承受重力及液体压力，楔形体的密度为 ρ ，液体的密度为 ρ' ，试求应力分量。

取坐标轴如图所示。在楔形体的任意一点，每一个应力分量都将由两部分组成：第一部分由重力引起，应当和楔形体的 ρg 成正比；第二部分由液体压力引起，应当和液体的 $\rho' g$ 成正比。当然，上述每一部分的应力分量还和 α 、 x 、 y 有关。由于应力分量的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$ ， ρg 和 $\rho' g$ 的量纲是 $L^{-2}MT^{-2}$ ， α 是量

纲一的数量, 而 x 和 y 的量纲是 L , 因此, 如果应力分量具有多项式的解答, 那么, 它们的表达式只可能是 $A\rho gx$ 、 $B\rho gy$ 、 $C\rho'gx$ 、 $D\rho'gy$ 四种项的组合, 而其中的 A 、 B 、 C 、 D 是量纲一的数量, 只和 α 有关。这就是说, 各个应力分量的表达式只可能是 x 和 y 的纯一次式, 而应力函数(它对 x 和 y 的二阶导数给出应力分量)应当是 x 和 y 的纯三次式。因此, 假设应力函数为

$$\Phi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^3.$$

在这里, 体力分量 $f_x = 0$, 而 $f_y = \rho g$, 所以由公式(2-26)得应力分量的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x = 2cx + 6ey, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y = 6ax + 2by - \rho gy, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -2bx - 2cy. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

这些应力分量是满足平衡微分方程和相容方程的, 现在来考察, 如果适当选择各个系数, 是否也能满足应力边界条件。

在左面($x=0$), 应力边界条件是

$$(\sigma_x)_{x=0} = -\rho'gy, \quad (\tau_{xy})_{x=0} = 0,$$

将式(a)代入, 得

$$6ey = -\rho'gy, \quad -2cy = 0,$$

于是可见应当取 $e = -\rho'g/6$, $c = 0$, 而式(a)成为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\rho'gy, \\ \sigma_y &= 6ax + 2by - \rho gy, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -2bx. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

在右面($x = y \tan \alpha$), 面力分量 $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$, 应力边界条件是

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_{x=y \tan \alpha} + m(\tau_{xy})_{x=y \tan \alpha} &= 0, \\ m(\sigma_y)_{x=y \tan \alpha} + l(\tau_{xy})_{x=y \tan \alpha} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

将式(b)代入, 简化以后, 得

$$\left. \begin{aligned} 2bmtan \alpha + l\rho'g &= 0, \\ 6amtan \alpha + 2b(m - l\tan \alpha) - m\rho g &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

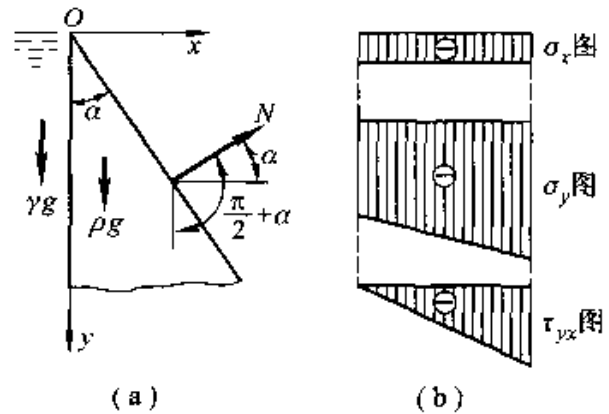


图 3-6

但由图可见

$$l = \cos(N, x) = \cos \alpha, \quad m = \cos(N, y) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha。$$

代入式(c), 求解 b 和 a , 得

$$b = \frac{\rho'g}{2} \cot^2 \alpha, \quad a = \frac{\rho g}{6} \cot \alpha - \frac{\rho'g}{3} \cot^3 \alpha。$$

将这些系数代入式(b), 即得莱维解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\rho'gy, \\ \sigma_y &= (\rho g \cot \alpha - 2\rho'g \cot^3 \alpha)x + (\rho'g \cot^2 \alpha - \rho g)y, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\rho'gx \cot^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

各应力分量沿水平方向的变化大致如图 3-6b 所示。

应力分量 σ_x 沿水平方向没有变化, 这个结果是不可能由材料力学公式求得的。应力分量 σ_y 沿水平方向按直线变化, 在左右两面, 它分别为

$$(\sigma_y)_{x=0} = -(\rho g - \rho'g \cot^2 \alpha)y,$$

$$(\sigma_y)_{x=\tan \alpha} = -\rho'gy \cot^2 \alpha,$$

和用材料力学中偏心受压公式算得的结果相同。应力分量 τ_{xy} 也按直线变化, 在左右两面, 它分别为

$$(\tau_{xy})_{x=0} = 0,$$

$$(\tau_{xy})_{x=\tan \alpha} = -\rho'gy \cot \alpha。$$

这个结果, 不同于材料力学中关于等截面矩形梁的切应力分布(按抛物线变化)。

以上所得的解答, 一向被当作是三角形重力坝中应力的基本解答。但是, 必须指出下列三点:

(1) 沿着坝轴, 坝身往往具有不同的截面, 而且坝身也不是无限长的。因此, 严格地说来, 这里不是一个平面问题。但是, 如果沿着坝轴, 有一些伸缩缝把坝身分成若干段, 在每一段范围内, 坝身的截面可以当作没有变化, 而且 τ_{xz} 和 τ_{zy} 可以当作等于零, 那么, 在计算时, 是可以把这个问题当作平面问题的。

(2) 这里假定楔形体在下端是无限长, 可以自由地变形。但是, 实际上坝身是有限高的, 底部与地基相连, 坝身底部的形变受到地基的约束, 因此, 对于底部说来, 以上所得的解答是不精确的。

(3) 坝顶总具有一定的宽度, 而不会是一个尖顶, 而且顶部通常还受有其他的荷载, 因此, 在靠近坝顶处, 以上所得的解答也不适用。

关于重力坝的较精确的应力分析, 目前大都采用有限单元法来进行。

§ 3-5 级数式解答

如果梁或板所受的面力比较复杂, 或者甚至是不连续的, 就不可能用多项式求得解答。在这种情况下, 可以试用三角级数求解。

为此, 用逆解法, 首先假设应力函数取如下的形式:

$$\Phi = \sin \alpha x \cdot f(y), \quad (\text{a})$$

其中 α 是任意常数, 它的量纲是 L^{-1} , 而 $f(y)$ 是 y 的任意函数。

将式(a)代入相容方程(2-27), 即得

$$\sin \alpha x \left[\frac{d^4 f(y)}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} + \alpha^4 f(y) \right] = 0, \quad (\text{b})$$

删去因子 $\sin \alpha x$, 然后求解这个常微分方程, 得

$$f(y) = A \sinh \alpha y + B \cosh \alpha y + C y \sinh \alpha y + D y \cosh \alpha y,$$

其中的 A 、 B 、 C 、 D 都是任意常数。于是得到应力函数的一个解答:

$$\Phi = \sin \alpha x (A \sinh \alpha y + B \cosh \alpha y + C y \sinh \alpha y + D y \cosh \alpha y). \quad (\text{c})$$

然后, 再假设应力函数取如下的形式:

$$\Phi = \cos \alpha' x \cdot f_1(y).$$

同样可以得出应力函数的另一个解答。

$$\Phi = \cos \alpha' x (A' \sinh \alpha' y + B' \cosh \alpha' y + C' y \sinh \alpha' y + D' y \cosh \alpha' y), \quad (\text{d})$$

其中的 A' 、 B' 、 C' 、 D' 也是任意常数。

现在, 将解答(c)与(d)叠加, 得

$$\Phi = \sin \alpha x (A \sinh \alpha y + B \cosh \alpha y + C y \sinh \alpha y + D y \cosh \alpha y) + \cos \alpha' x (A' \sinh \alpha' y + B' \cosh \alpha' y + C' y \sinh \alpha' y + D' y \cosh \alpha' y). \quad (\text{e})$$

又因为当 α 取任何值 α_m 时, 或者当 α' 取任意值 α'_m 时, 表达式(e)都是微分方程(b)的解答, 所以这些解答的叠加仍然是该微分方程的解答。于是得三角级数式的应力函数

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m x (A_m \sinh \alpha_m y + B_m \cosh \alpha_m y + C_m y \sinh \alpha_m y + \\ & D_m y \cosh \alpha_m y) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos \alpha'_m x (A'_m \sinh \alpha'_m y + \\ & B'_m \cosh \alpha'_m y + C'_m y \sinh \alpha'_m y + D'_m y \cosh \alpha'_m y). \end{aligned} \quad (3-8)$$

当然, 还可以再叠加以满足相容条件的、其他形式的应力函数。

与(3-8)式相应的应力分量是:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \sin \alpha_m x \left[\left(A_m + \frac{2D_m}{\alpha_m} \right) \sinh \alpha_m y + \right. \\
 &\quad \left. \left(B_m + \frac{2C_m}{\alpha_m} \right) \cosh \alpha_m y + C_m y \sinh \alpha_m y + D_m y \cosh \alpha_m y \right] + \\
 &\quad \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m'^2 \cos \alpha_m' x \left[\left(A_m' + \frac{2D_m'}{\alpha_m'} \right) \sinh \alpha_m' y + \right. \\
 &\quad \left. \left(B_m' + \frac{2C_m'}{\alpha_m'} \right) \cosh \alpha_m' y + C_m' y \sinh \alpha_m' y + D_m' y \cosh \alpha_m' y \right], \\
 \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \sin \alpha_m x [A_m \sinh \alpha_m y + B_m \cosh \alpha_m y + \\
 &\quad C_m y \sinh \alpha_m y + D_m y \cosh \alpha_m y] - \\
 &\quad \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m'^2 \cos \alpha_m' x [A_m' \sinh \alpha_m' y + B_m' \cosh \alpha_m' y + C_m' y \sinh \alpha_m' y + \\
 &\quad D_m' y \cosh \alpha_m' y], \\
 \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \cos \alpha_m x \left[\left(B_m + \frac{C_m}{\alpha_m} \right) \sinh \alpha_m y + \right. \\
 &\quad \left. \left(A_m + \frac{D_m}{\alpha_m} \right) \cosh \alpha_m y + D_m y \sinh \alpha_m y + C_m y \cosh \alpha_m y \right] + \\
 &\quad \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m'^2 \sin \alpha_m' x \left[\left(B_m' + \frac{C_m'}{\alpha_m'} \right) \sinh \alpha_m' y + \right. \\
 &\quad \left. \left(A_m' + \frac{D_m'}{\alpha_m'} \right) \cosh \alpha_m' y + D_m' y \sinh \alpha_m' y + C_m' y \cosh \alpha_m' y \right].
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

这些应力分量是满足平衡微分方程和相容方程的。如果能够选择其中的待定常数 α_m 、 A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 、 α_m' 、 A_m' 、 B_m' 、 C_m' 、 D_m' ，或再叠加以满足平衡微分方程和相容方程的其他应力分量表达式，使其满足某个问题的边界条件，就得出该问题的解答。

§ 3-6 简支梁受任意横向荷载

本节中将以简支梁受任意横向荷载的问题为例，说明三角级数式解答的应用。设简支梁的跨度为 l ，高度为 h ，坐标轴如图 3-7 所示，上下两边的横向

荷载分别为 $q(x)$ 及 $q_1(x)$, 左右两端的反力分别为 F 及 F_1 ,

在上下两边, 正应力的边界条件是

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_y)_{y=0} &= -q(x), \\ (\sigma_y)_{y=h} &= -q_1(x); \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

切应力的边界条件是

$$(\tau_{xy})_{y=0} = 0, \quad (\tau_{xy})_{y=h} = 0. \quad (b)$$

在左右两端, 正应力的边界条件是

$$(\sigma_x)_{x=0} = 0, \quad (\sigma_x)_{x=l} = 0; \quad (c)$$

切应力应当合成为反力, 即

$$\int_0^h (\tau_{xy})_{x=0} dy = F, \quad \int_0^h (\tau_{xy})_{x=l} dy = -F_1. \quad (d)$$

应用表达式(3-9)时, 为了满足边界条件(c), 可以取

$$A'_m = B'_m = C'_m = D'_m = 0, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{l} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

于是表达式(3-9)简化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{m\pi x}{l} \left[\left(A_m + \frac{2l}{m\pi} D_m \right) \sinh \frac{m\pi y}{l} + \right. \\ &\quad \left. \left(B_m + \frac{2l}{m\pi} C_m \right) \cosh \frac{m\pi y}{l} + \right. \\ &\quad \left. C_m y \sinh \frac{m\pi y}{l} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{l} \right], \\ \sigma_y &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{m\pi x}{l} \left[A_m \sinh \frac{m\pi y}{l} + \right. \\ &\quad \left. B_m \cosh \frac{m\pi y}{l} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{l} + \right. \\ &\quad \left. D_m y \cosh \frac{m\pi y}{l} \right], \\ \tau_{xy} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \cos \frac{m\pi x}{l} \left[\left(B_m + \frac{l}{m\pi} C_m \right) \sinh \frac{m\pi y}{l} + \right. \\ &\quad \left. \left(A_m + \frac{l}{m\pi} D_m \right) \cosh \frac{m\pi y}{l} + \right. \\ &\quad \left. D_m y \sinh \frac{m\pi y}{l} + C_m y \cosh \frac{m\pi y}{l} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

代入边界条件(b)及(a), 得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 \cos \frac{m\pi x}{l} \left[A_m + \frac{l}{m\pi} D_m \right] = 0, \quad (e)$$

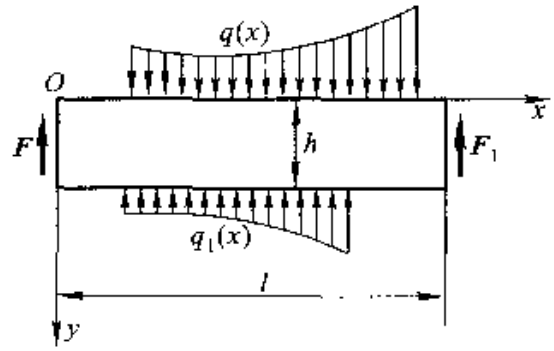


图 3-7

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 \cos \frac{m\pi x}{l} \left[\left(B_m + \frac{l}{m\pi} C_m \right) \sinh \frac{m\pi h}{l} + \left(A_m + \frac{l}{m\pi} D_m \right) \cosh \frac{m\pi h}{l} + D_m h \sinh \frac{m\pi h}{l} + C_m h \cosh \frac{m\pi h}{l} \right] = 0, \quad (f)$$

$$\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot B_m = q(x), \quad (g)$$

$$\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \left[A_m \sinh \frac{m\pi h}{l} + B_m \cosh \frac{m\pi h}{l} + C_m h \sinh \frac{m\pi h}{l} + D_m h \cosh \frac{m\pi h}{l} \right] = q_1(x). \quad (h)$$

由此可以得出求解系数 A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 的方程，说明如下。

式(e)和式(f)表示它们左边的三角级数恒等于零，因此，级数的系数都应当等于零，于是得

$$A_m + \frac{l}{m\pi} D_m = 0, \quad (i)$$

$$A_m \cosh \frac{m\pi h}{l} + B_m \sinh \frac{m\pi h}{l} + C_m \left(\frac{l}{m\pi} \sinh \frac{m\pi h}{l} + h \cosh \frac{m\pi h}{l} \right) + D_m \left(\frac{l}{m\pi} \cosh \frac{m\pi h}{l} + h \sinh \frac{m\pi h}{l} \right) = 0. \quad (j)$$

为了从式(g)得出所需的方程，须将该式右边的 $q(x)$ 在 $x=0$ 至 $x=l$ 的区间展为和左边相同的级数，即 $\sin \frac{m\pi x}{l}$ 的级数。按照傅里叶级数的展开法则，我们有

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \right] \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (3-11)$$

与式(g)对比，即得

$$\frac{\pi^2}{l^2} m^2 B_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx,$$

从而得出

$$B_m = \frac{2l}{m^2 \pi^2} \int_0^l q(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx, \quad (k)$$

同样可由式(h)得出

$$\begin{aligned} A_m \sinh \frac{m\pi h}{l} + B_m \cosh \frac{m\pi h}{l} + C_m h \sinh \frac{m\pi h}{l} + D_m h \cosh \frac{m\pi h}{l} \\ = \frac{2l}{m^2 \pi^2} \int_0^l q_1(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (l)$$

求出式(k)及式(l)右边的积分以后，即可由(i)、(j)、(k)、(l)四式求得系数 A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m ，从而由公式(3-10)求得应力分量。

因为如此求得的应力分量已经满足式(d)以外的所有条件, 包括平衡条件在内, 而式(d)中的 F 及 F_1 又可以完全决定于平衡条件, 所以式(d)自然满足, 不必考虑。在求出应力分量以后, 可以由式(d)求得反力 F 及 F_1 , 并利用这两个反力与荷载的平衡作为校核之用。

由本节中所讨论的简支梁问题已经看出, 用级数求解平面问题时, 单是为了求出应力表达式中的系数, 计算工作量就已经很大了; 再加上由于级数收敛不快, 得出应力分量的表达式以后, 在计算某些点的应力数值时, 还要花费很大的计算工作量。更应当着重指出, 由于梁的两端的应力边界条件并不能精确满足, 因而应力的解答只适用于距两端较远之处; 对于跨度与高度同等大小的梁, 这种解答显然是没有用处的(正确的解答可以用差分法、变分法或有限单元法求得)。但是, 目前还有不少文献继续介绍平面问题的级数式解答。为了帮助读者正确使用这些解答, 本教程中作了如上的简单介绍。

习 题

3-1 设图 3-4 中的简支梁只受重力的作用, 而梁的密度为 ρ , 试用 §3-3 中的应力函数(e)求解应力分量。

$$\text{答案: } \sigma_x = \frac{M}{I}y + \rho g y \left(\frac{4y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right), \quad \sigma_y = \frac{\rho g y}{2} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right),$$

3-2 设有矩形截面的竖柱, 其密度为 ρ , 在一边侧面上受均布剪力 q , 图 3-8, 试求应力分量。

提示: 可假设 $\sigma_x = 0$, 或假设 $\tau_{xy} = f(x)$, 或假设 σ_x 如材料力学中偏心受压公式所示。上端的边界条件如不能精确满足, 可应用圣维南原理, 求出近似的解答。

$$\text{答案: } \sigma_x = 2q \frac{y}{h} \left(1 - \frac{3x}{h} \right) - \rho g y, \quad \tau_{xy} = q \frac{x}{h} \left(3 \frac{x}{h} - 2 \right).$$

3-3 挡水端的密度为 ρ , 厚度为 h , 图 3-9, 而水的密度为 ρ_1 , 试求应力分量。

提示: 可假设 $\sigma_x = xf(y)$ 。上端的边界条件如不能精确满足, 可应用圣维南原理, 求出近似的解答。

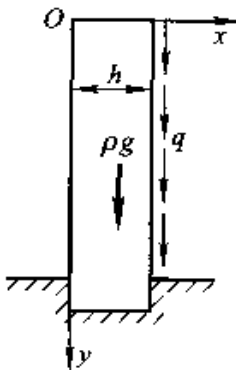


图 3-8

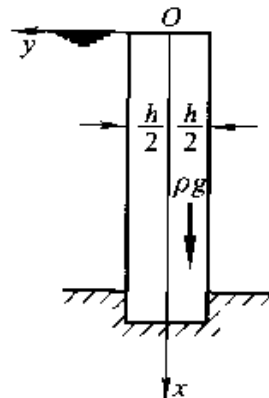


图 3-9

答案: $\sigma_x = \frac{2\rho_1 g}{h^3} x^2 y + \frac{3\rho_1 g}{5h} xy - \frac{4\rho_1 g}{h^3} xy^3 - \rho g x, \quad \sigma_y = \rho_1 g x \left(2 \frac{y^3}{h^3} - \frac{3y}{2h} - \frac{1}{2} \right).$

3-4 设图 3-10 中的三角形悬臂梁只受重力的作用, 而梁的密度为 ρ , 试用纯三次式的应力函数求解。

答案: $\sigma_y = \rho g x \cot \alpha - 2\rho g y \cot^2 \alpha.$

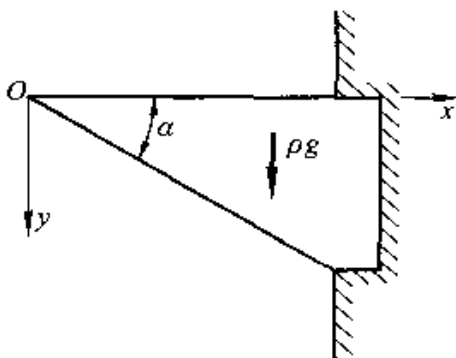


图 3-10

参考教材

- [1] 铁木辛柯, 古迪尔著. 弹性理论[M]. 徐芝纶译. 北京: 高等教育出版社, 1990: 第三章.

第四章 平面问题的极坐标解答

§ 4-1 极坐标中的平衡微分方程

在求解平面问题时，对于圆形、楔形、扇形等等的物体，用极坐标求解往往比用直角坐标方便得多。在极坐标中，平面内任一点 P 的位置，用径向坐标 ρ 及环向坐标 φ 来表示，图 4-1。

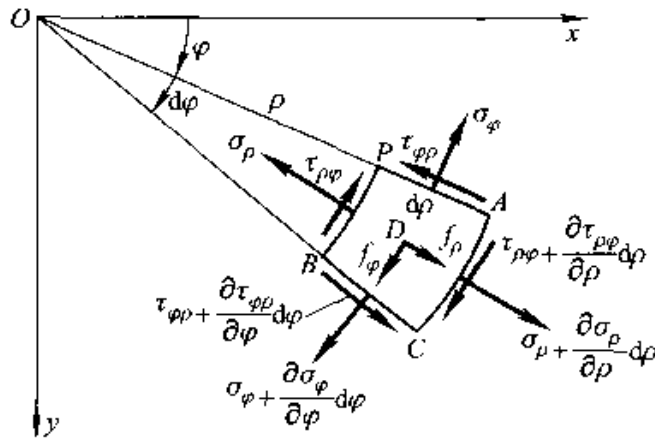


图 4-1

为了表明极坐标中的应力分量，从所考察的薄板或长柱形体取出微分体 $PACB$ ，如图所示。沿 ρ 方向的正应力称为径向正应力，用 σ_ρ 代表；沿 φ 方向的正应力称为环向正应力或切向正应力，用 σ_φ 代表；切应力用 $\tau_{\rho\varphi}$ 及 $\tau_{\varphi\rho}$ 代表（根据切应力的互等关系， $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho}$ ）。各应力分量的正负号规定和直角坐标中一样，只是 ρ 方向代替了 x 方向， φ 方向代替了 y 方向。图中所示的应力分量都是正的。径向及环向的体力分量分别用 f_ρ 及 f_φ 代表。

与直角坐标中相似，由于应力随坐标 ρ 的变化，设 PB 面上的径向正应力为 σ_ρ ，则 AC 面上的将为 $\sigma_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} d\rho$ ；同样，这两个面上的切应力分别为 $\tau_{\rho\varphi}$ 及 $\tau_{\rho\varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} d\rho$ ， PA 及 BC 两个面上的环向正应力分别为 σ_φ 及 $\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi$ ；这两个面上的切应力分别为 $\tau_{\varphi\rho}$ 及 $\tau_{\varphi\rho} + \frac{\partial \tau_{\varphi\rho}}{\partial \varphi} d\varphi$ 。

取微分体的厚度等于 1, 于是, PB 及 AC 两面的面积分别等于 $\rho d\varphi$ 及 $(\rho + d\rho)d\varphi$, PA 及 BC 两面的面积等于 $d\rho$, 微分体的体积等于 $\rho d\varphi d\rho$ 。由于 $d\varphi$ 是微小的, 可以把 $\sin \frac{d\varphi}{2}$ 取为 $\frac{d\varphi}{2}$, 把 $\cos \frac{d\varphi}{2}$ 取为 1。

将微分体所受各力投影到微分体中心的径向轴上, 立出径向的平衡方程, 得

$$\left(\sigma_{\rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} d\rho\right)(\rho + d\rho)d\varphi - \sigma_{\rho}\rho d\varphi - \left(\sigma_{\varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi\right)d\rho \frac{d\varphi}{2} - \sigma_{\varphi}d\rho \frac{d\varphi}{2} + \left(\tau_{\varphi\rho} + \frac{\partial \tau_{\varphi\rho}}{\partial \varphi} d\varphi\right)d\rho - \tau_{\varphi\rho}d\rho + f_{\rho}\rho d\varphi d\rho = 0。$$

用 $\tau_{\rho\varphi}$ 代替 $\tau_{\varphi\rho}$, 简化以后, 除以 $\rho d\varphi d\rho$, 再略去微量, 得

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\varphi}}{\rho} + f_{\rho} = 0。$$

将所有各力投影到微分体中心的切向轴上, 立出切向的平衡方程, 得

$$\left(\sigma_{\varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi\right)d\rho - \sigma_{\varphi}d\rho + \left(\tau_{\rho\varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} d\rho\right)(\rho + d\rho)d\varphi - \tau_{\rho\varphi}\rho d\varphi + \left(\tau_{\varphi\rho} + \frac{\partial \tau_{\varphi\rho}}{\partial \varphi} d\varphi\right)d\rho \frac{d\varphi}{2} + \tau_{\varphi\rho}d\rho \frac{d\varphi}{2} + f_{\varphi}\rho d\varphi d\rho = 0。$$

用 $\tau_{\rho\varphi}$ 代替 $\tau_{\varphi\rho}$, 简化以后, 除以 $\rho d\varphi d\rho$, 再略去微量, 得

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} + f_{\varphi} = 0。$$

如果立出该微分体的力矩平衡方程, 将得出 $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho}$, 只是又一次证明切应力的互等关系。

这样, 极坐标中的平衡微分方程就是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\varphi}}{\rho} + f_{\rho} &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} + f_{\varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

这两个平衡微分方程中包含着三个未知函数 σ_{ρ} 、 σ_{φ} 和 $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho}$ 。为了求解问题, 还必须考虑形变和位移。

§ 4-2 极坐标中的几何方程及物理方程

在极坐标中, 用 ε_{ρ} 代表径向线应变(径向线段的线应变), 用 ε_{φ} 代表环向

线应变(环向线段的线应变), 用 $\gamma_{\rho\varphi}$ 代表切应变(径向与环向两线段之间的直角的改变); 用 u_ρ 代表径向位移, 用 u_φ 代表环向位移。

首先, 假定只有径向位移而没有环向位移, 图 4-2a。由于这个径向位移, 径向线段 PA 移到 $P'A'$, 环向线段 PB 移到 $P'B'$, 而 P 、 A 、 B 三点的位移分别为

$$PP' = u_\rho, \quad AA' = u_\rho + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} d\rho, \quad BB' = u_\rho + \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} d\varphi.$$

可见, 径向线段 PA 的线应变为

$$\varepsilon_\rho = \frac{P'A' - PA}{PA} = \frac{AA' - PP'}{PA} = \frac{\left(u_\rho + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} d\rho\right) - u_\rho}{d\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad (\text{a})$$

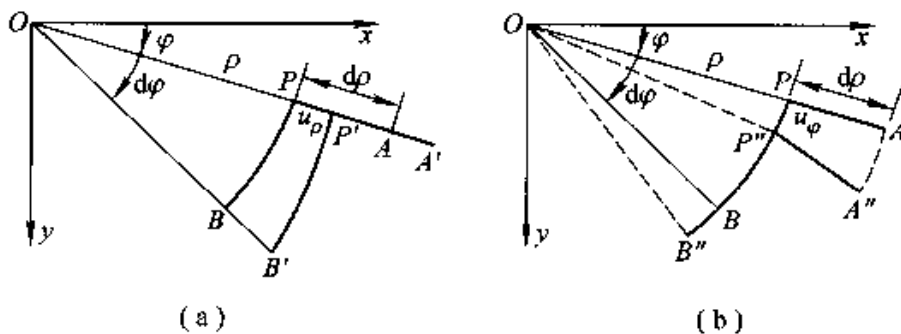


图 4-2

环向线段 PB 的线应变为

$$\varepsilon_\varphi = \frac{P'B' - PB}{PB} = \frac{(\rho + u_\rho) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{u_\rho}{\rho}. \quad (\text{b})$$

径向线段 PA 的转角为

$$\alpha = 0, \quad (\text{c})$$

环向线段 PB 的转角为

$$\beta = \frac{BB' - PP'}{PB} = \frac{\left(u_\rho + \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} d\varphi\right) - u_\rho}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}, \quad (\text{d})$$

可见切应变为

$$\gamma_{\rho\varphi} = \alpha + \beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}. \quad (\text{e})$$

其次, 假定只有环向位移而没有径向位移, 图 4-2b。由于这个环向位移, 径向线段 PA 移到 $P''A''$, 环向线段 PB 移到 $P''B''$, 而 P 、 A 、 B 三点的位移分别为

$$PP'' = u_\varphi, \quad AA'' = u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} d\rho, \quad BB'' = u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi.$$

可见，径向线段 PA 的线应变为

$$\varepsilon_\rho = 0, \quad (f)$$

环向线段 PB 的线应变为

$$\varepsilon_\varphi = \frac{P''B'' - PB}{PB} = \frac{BB'' - PP''}{PB} = \frac{\left(u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi\right) - u_\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (g)$$

径向线段 PA 的转角为

$$\alpha = \frac{AA'' - PP''}{PA} = \frac{\left(u_\rho + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} d\rho\right) - u_\rho}{d\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad (h)$$

环向线段 PB 的转角为

$$\beta = -\angle POP'' = -\frac{PP''}{OP} = -\frac{u_\varphi}{\rho}, \quad (i)$$

可见切应变为

$$\gamma_{\rho\varphi} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho}, \quad (j)$$

因此，如果沿径向和环向都有位移，则由 (a)、(b)、(e) 三式与 (f)、(g)、(j) 三式的分别叠加而得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

这就是极坐标中的几何方程。

由于极坐标也和直角坐标同样是正交坐标，所以极坐标物理方程与直角坐标物理方程具有同样的形式，只是角码 x 和 y 分别改换为 ρ 和 φ 。据此，在平面应力的情况下，物理方程是

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu\sigma_\varphi), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu\sigma_\rho), \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{1}{G} \tau_{\rho\varphi} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\rho\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

在平面应变的情况下，需将上式中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ， μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ ，而物理方程成为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_\varphi \right), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_\varphi - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_r \right), \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{r\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

§ 4-3 极坐标中的应力函数与相容方程

为了把极坐标中的应力分量用应力函数 Φ 来表示, 我们要利用极坐标与直角坐标之间的关系式

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2, & \varphi &= \arctan \frac{y}{x}; \\ x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\rho} = \cos \varphi, & \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\rho} = \sin \varphi; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho}. \end{aligned}$$

注意 Φ 是 x 和 y 的函数, 同时也是 ρ 和 φ 的函数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

重复以上的运算, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \\ &\quad \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \\ &\quad \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ &= \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} - \\ &\quad \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (c) \end{aligned}$$

由图 4-1 可见, 如果把 x 轴和 y 轴分别转到 ρ 和 φ 的方向, 使 φ 成为零, 则 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 分别成为 σ_ρ 、 σ_φ 、 $\tau_{\rho\varphi}$ 。于是, 当不计体力时, 即可由式 (a) 至式 (c) 得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= (\sigma_x)_{\varphi=0} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{\varphi=0} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \\ \sigma_\varphi &= (\sigma_y)_{\varphi=0} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{\varphi=0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\varphi} &= (\tau_{xy})_{\varphi=0} = \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_{\varphi=0} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

极易证明, 当 $f_\rho = f_\varphi = 0$ 时, 这些应力分量确能满足平衡微分方程 (4-1)。

另一方面, 将式 (a) 与式 (b) 相加, 得到

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.$$

于是由直角坐标中的相容方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Phi = 0$$

得到极坐标中的相容方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \Phi = 0. \quad (4-6)$$

用极坐标求解平面问题时 (假定体力可以不计), 就只须从微分方程 (4-6) 求解应力函数 $\Phi(\rho, \varphi)$, 然后按照公式 (4-5) 求出应力分量。当然, 这些应力分量还须满足位移单值条件, 并且在边界上满足应力边界条件。

§ 4-4 应力分量的坐标变换式

在一定的应力状态下, 如果已知极坐标中的应力分量, 就可以利用简单的

关系式求得直角坐标中的应力分量。反之，如果已知直角坐标中的应力分量，也可以利用简单的关系式求得极坐标中的应力分量。表示两个坐标系中应力分量的关系式，就称为应力分量的坐标变换式。

现在，设已知极坐标中的应力分量 σ_ρ 、 σ_φ 、 $\tau_{\rho\varphi}$ ，试求直角坐标中的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 。为此，在弹性体中取微小三角板 A ，图 4-3a，它的 ab 边及 ac 边分别沿 ρ 及 φ 方向， bc 沿 y 方向，各边上的应力如图所示。命 bc 边的长度为 ds ，则 ab 边及 ac 边的长度分别为 $ds \sin \varphi$ 及 $ds \cos \varphi$ 。三角板的厚度取为一个单位。

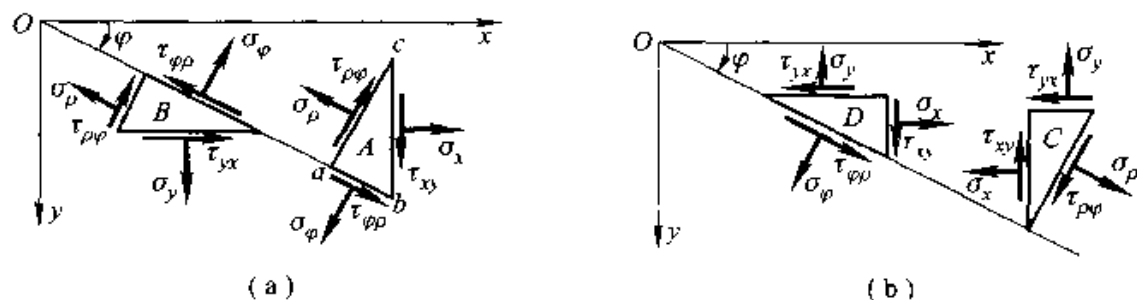


图 4-3

根据三角板 A 的平衡条件 $\sum F_x = 0$ ，可以写出平衡方程

$$\sigma_x ds - \sigma_\rho ds \cos^2 \varphi - \sigma_\varphi ds \sin^2 \varphi + \tau_{\rho\varphi} ds \cos \varphi \sin \varphi + \tau_{\varphi\rho} ds \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

用 $\tau_{\rho\varphi}$ 代替 $\tau_{\varphi\rho}$ ，进行简化，就得到

$$\sigma_x = \sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \sin^2 \varphi - 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (a)$$

同样可由三角板 A 的平衡条件 $\sum F_y = 0$ 得到

$$\tau_{xy} = (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{\rho\varphi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \quad (b)$$

另取微小三角板 B ，图 4-3a，根据它的平衡条件 $\sum F_x = 0$ ，可以与上相似地得到

$$\sigma_y = \sigma_\rho \sin^2 \varphi + \sigma_\varphi \cos^2 \varphi + 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (c)$$

综合以上所得的结果，就得出应力分量由极坐标向直角坐标的变换式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \sin^2 \varphi - 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \sigma_y &= \sigma_\rho \sin^2 \varphi + \sigma_\varphi \cos^2 \varphi + 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau_{xy} &= (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{\rho\varphi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

利用简单的三角公式，也可以将上式改写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\varphi}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \cos 2\varphi - \tau_{\rho\varphi} \sin 2\varphi, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\varphi}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \cos 2\varphi + \tau_{\rho\varphi} \sin 2\varphi, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \sin 2\varphi + \tau_{\rho\varphi} \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

读者试取微小三角板 C 及 D ，图 4-3b，由它们的平衡条件导出应力分量

由直角坐标向极坐标的变换式

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau_{\rho\varphi} &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),\end{aligned}$$

也就是

$$\left. \begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.\end{aligned}\right\} \quad (4-9)$$

§ 4-5 轴对称应力和相应的位移

现在, 用逆解法, 假设应力函数 Φ 只是径向坐标 ρ 的函数, 即

$$\Phi = \Phi(\rho).$$

在这一特殊情况下, 公式(4-5)简化为

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho}, \quad \sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{d\rho^2}, \quad \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = 0. \quad (4-10)$$

相容方程(4-6)简化为

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^2 \Phi = 0.$$

这是一个四阶的常微分方程, 它的通解是

$$\Phi = A \ln \rho + B \rho^2 \ln \rho + C \rho^2 + D, \quad (4-11)$$

其中的 A 、 B 、 C 、 D 是任意常数。

将(4-11)代入公式(4-10), 得应力分量

$$\left. \begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C, \\ \sigma_\varphi &= -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 \ln \rho) + 2C, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (4-12)$$

因为正应力分量只是 ρ 的函数, 不随 φ 而变, 而切应力分量又不存在, 所以应力状态是对称于通过 z 轴的任一平面的, 也就是所谓绕 z 轴对称的。因此, 这种应力称为轴对称应力。

现在来考察与轴对称应力相对应的形变和位移。

对于平面应力的情况，将应力分量(4-12)代入物理方程(4-3)，得形变分量

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rho} &= \frac{1}{E} \left[(1+\mu) \frac{A}{\rho^2} + (1-3\mu)B + 2(1-\mu)B \ln \rho + 2(1-\mu)C \right], \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{E} \left[-(1+\mu) \frac{A}{\rho^2} + (3-\mu)B + 2(1-\mu)B \ln \rho + 2(1-\mu)C \right], \\ \gamma_{\rho\varphi} &= 0,\end{aligned}$$

可见，形变也是绕 z 轴对称的。

将上面形变分量的表达式代入几何方程(4-2)，得

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial u_{\rho}}{\partial \rho} &= \frac{1}{E} \left[(1+\mu) \frac{A}{\rho^2} + (1-3\mu)B + 2(1-\mu)B \ln \rho + 2(1-\mu)C \right], \\ \frac{u_{\rho}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} &= \frac{1}{E} \left[-(1+\mu) \frac{A}{\rho^2} + (3-\mu)B + 2(1-\mu)B \ln \rho + 2(1-\mu)C \right], \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi}}{\rho} &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

由(a)中第一式的积分得

$$u_{\rho} = \frac{1}{E} \left[-(1+\mu) \frac{A}{\rho} + 2(1-\mu)B\rho(\ln \rho - 1) + (1-3\mu)B\rho + 2(1-\mu)C\rho \right] + f(\varphi), \quad (b)$$

其中 $f(\varphi)$ 是 φ 的任意函数。

其次，由(a)中的第二式有

$$\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{E} \left[-(1+\mu) \frac{A}{\rho^2} + 2(1-\mu)B \ln \rho + (3-\mu)B + 2(1-\mu)C \right] - u_{\rho}.$$

将式(b)代入，得

$$\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{4B\rho}{E} - f(\varphi),$$

积分以后得

$$u_{\varphi} = \frac{4B\rho\varphi}{E} - \int f(\varphi) d\varphi + f_1(\rho), \quad (c)$$

其中 $f_1(\rho)$ 是 ρ 的任意函数。

再将式(b)及式(c)代入(a)中的第三式，得

$$\frac{1}{\rho} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \frac{df_1(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \int f(\varphi) d\varphi - \frac{f_1(\rho)}{\rho} = 0,$$

或分开变数而写成为

$$f_1(\rho) - \rho \frac{df_1(\rho)}{d\rho} = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \int f(\varphi) d\varphi.$$

这方程的左边只是 ρ 的函数，而右边只是 φ 的函数，因此，只可能两边都等于

同一常数 F 。于是有

$$f_1(\rho) - \rho \frac{df_1(\rho)}{d\rho} = F, \quad (d)$$

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \int f(\varphi) d\varphi = F. \quad (e)$$

式(d)的解答是

$$f_1(\rho) = H\rho + F, \quad (f)$$

其中 H 是任意常数, 式(e)可以通过求导变换为微分方程

$$\frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} + f(\varphi) = 0,$$

而它的解答是

$$f(\varphi) = I \cos \varphi + K \sin \varphi, \quad (g)$$

此外并可由式(e)得

$$\int f(\varphi) d\varphi = F - \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = F + I \sin \varphi - K \cos \varphi. \quad (h)$$

将式(g)代入式(b), 并将式(h)及式(f)代入式(c), 得轴对称应力状态下的位移分量

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= \frac{1}{E} \left[- (1 + \mu) \frac{A}{\rho} + 2(1 - \mu) B \rho (\ln \rho - 1) + \right. \\ &\quad \left. (1 - 3\mu) B \rho + 2(1 - \mu) C \rho \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi, \\ u_\varphi &= \frac{4B\rho\varphi}{E} + H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

式中的 A 、 B 、 C 、 H 、 I 、 K 都是任意常数。

以上关于形变和位移的公式, 也可以应用于平面应变问题, 但须将 E 换为 $\frac{E'}{1-\mu^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

§ 4-6 圆环或圆筒受均布压力。压力隧洞

设有圆环或圆筒, 内半径为 a , 外半径为 b , 受内压力 q_0 及外压力 q_b , 图 4-4a。显然, 应力分布应当是轴对称的。因此, 取应力分量表达式(4-12), 应当可以满足一切条件并求出其中的任意常数 A 、 B 、 C 。

边界条件要求

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\varphi})_{\rho=a} &= 0, & (\tau_{r\varphi})_{\rho=b} &= 0; \\ (\sigma_r)_{\rho=a} &= -q_0, & (\sigma_r)_{\rho=b} &= -q_b. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

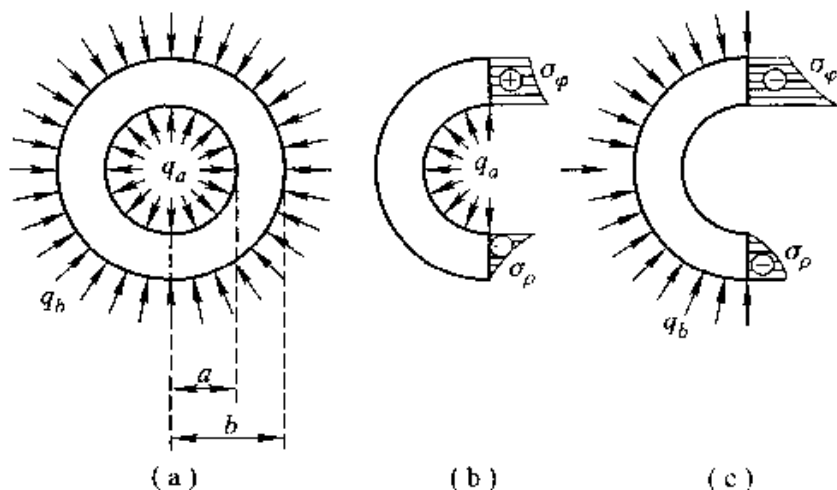


图 4-4

由表达式(4-12)可见, 前两个条件是满足的, 而后两个条件要求

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{a^2} + B(1 + 2\ln a) + 2C &= -q_a, \\ \frac{A}{b^2} + B(1 + 2\ln b) + 2C &= -q_b. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

现在, 边界条件都已经满足, 但是两个方程不能决定三个常数 A 、 B 、 C 。因为这里讨论的是多连体, 所以我们来考察位移单值条件。

由(4-13)中的第二式可见, 在环向位移 u_θ 的表达式中, $\frac{4B\rho\varphi}{E}$ 一项是多值的: 对于同一个 ρ 值, 例如 $\rho = \rho_1$, 在 $\varphi = \varphi_1$ 时与 $\varphi = \varphi_1 + 2\pi$ 时, 环向位移相差 $\frac{8\pi B\rho_1}{E}$ 。在圆环或圆筒中, 这是不可能的, 因为 (ρ_1, φ_1) 与 $(\rho_1, \varphi_1 + 2\pi)$ 是同一点, 不可能有不同的位移。于是可见必须 $B = 0$ 。

命 $B = 0$, 即可由式(b)求得 A 和 $2C$:

$$A = \frac{a^2 b^2 (q_b - q_a)}{b^2 - a^2}, \quad 2C = \frac{q_a a^2 - q_b b^2}{b^2 - a^2}.$$

代入公式(4-12), 稍加整理, 即得拉梅的解答如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{\rho^2}{b^2-1} q_a - \frac{\rho^2}{1-\frac{a^2}{b^2}} q_b, \\ \sigma_\theta &= \frac{\rho^2}{b^2-1} q_a - \frac{\rho^2}{1-\frac{a^2}{b^2}} q_b. \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

为了起见, 下面来分别考察内压力或外压力单独作用时的情况

如果只有内压力 q_a 作用, 则 $q_b = 0$, 解答(4-14)简化为

$$\sigma_r = -\frac{\rho}{\frac{b^2}{a^2} - 1} q_a, \quad \sigma_\varphi = \frac{\frac{b^2}{\rho^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} q_a$$

显然, σ_r 总是压应力, σ_φ 总是拉应力。应力分布大致如图 4-4b 所示。当圆环或圆筒的外半径趋于无限大时 ($b \rightarrow \infty$), 它成为具有圆孔的无限大薄板, 或具有圆形孔道的无限大弹性体, 而上列解答成为

$$\sigma_r = -\frac{a^2}{\rho^2} q_a, \quad \sigma_\varphi = \frac{a^2}{\rho^2} q_a$$

可见应力和 $\frac{a^2}{\rho^2}$ 成正比。在 ρ 远大于 a 之处 (即距圆孔或圆形孔道较远之处), 应力是很小的, 可以不计。这个实例也证实了圣维南原理, 因为圆孔或圆形孔道中的内压力是平衡力系。

如果只有外压力 q_b 作用, 则 $q_a = 0$, 解答(4-14)简化为

$$\sigma_r = -\frac{1 - \frac{a^2}{\rho^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} q_b, \quad \sigma_\varphi = -\frac{1 + \frac{a^2}{\rho^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} q_b \quad (4-15)$$

显然, σ_r 和 σ_φ 都总是压应力。应力分布大致如图 4-4c 所示。

如果圆筒是埋在无限大弹性体中, 受有均布压力 q , 例如压力隧洞或坝内水管, 图 4-5, 则表达式(4-12)仍然适用, 因为应力分布仍然是轴对称的, 而且, 系数 B 仍然等于零, 因为位移仍然应当是单值的。不过, 因为圆筒和无限大弹性体不一定具有相同的弹性常数, 所以两者的应力表达式中的系数 A 和 C 不一定相同。现在, 取圆筒的应力表达式为

$$\sigma_r = \frac{A}{\rho^2} + 2C, \quad \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + 2C, \quad (c)$$

取无限大弹性体的应力表达式为

$$\sigma'_r = \frac{A'}{\rho^2} + 2C', \quad \sigma'_\varphi = -\frac{A'}{\rho^2} + 2C', \quad (d)$$

试建立四个方程来求解常数 A 、 C 、 A' 、 C' 。

首先, 在圆筒的内面, 有边界条件 $(\sigma_r)_{\rho=a} = -q$, 由此得

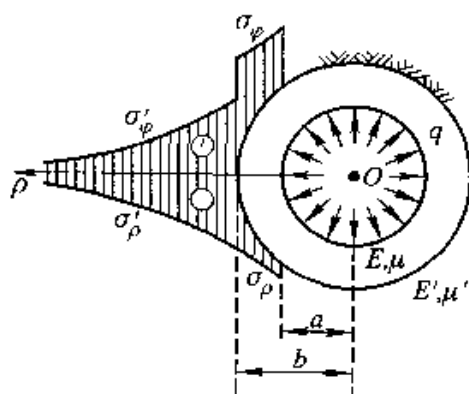


图 4-5

$$\frac{A}{a^2} + 2C = -q. \quad (e)$$

其次，在距离圆筒很远之处，按照圣维南原理，应当几乎没有应力，于是有

$$(\sigma'_\rho)_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \quad (\sigma'_{\varphi})_{\rho \rightarrow \infty} = 0,$$

由此得

$$2C' = 0, \quad (f)$$

再其次，在圆筒和无限大弹性体的接触面上，应当有

$$(\sigma_\rho)_{\rho=b} = (\sigma'_\rho)_{\rho=b}.$$

于是由式(c)及式(d)得

$$\frac{A}{b^2} + 2C = \frac{A'}{b^2} + 2C'. \quad (g)$$

上述条件仍然不足以确定四个常数，下面来考虑位移。

应用(4-13)中的第一式，并注意这里是平面应变问题，而且 $B=0$ ，可以写出圆筒和无限大弹性体的径向位移的表达式

$$u_\rho = \frac{1-\mu^2}{E} \left[-\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) \frac{A}{\rho} + 2\left(1 - \frac{\mu}{1-\mu}\right) C\rho \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi,$$

$$u'_\rho = \frac{1-\mu'^2}{E'} \left[-\left(1 + \frac{\mu'}{1-\mu'}\right) \frac{A'}{\rho} + 2\left(1 - \frac{\mu'}{1-\mu'}\right) C'\rho \right] + I' \cos \varphi + K' \sin \varphi,$$

其中 E 和 μ 是圆筒的弹性常数， E' 和 μ' 是无限大弹性体的弹性常数。将上列二式稍加简化，得

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= \frac{1+\mu}{E} \left[2(1-2\mu)C\rho - \frac{A}{\rho} \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi, \\ u'_\rho &= \frac{1+\mu'}{E'} \left[2(1-2\mu')C'\rho - \frac{A'}{\rho} \right] + I' \cos \varphi + K' \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

在接触面上，圆筒和无限大弹性体应当具有相同的位移，因此有

$$(u_\rho)_{\rho=b} = (u'_\rho)_{\rho=b}.$$

将式(h)代入，得

$$\begin{aligned} & \frac{1+\mu}{E} \left[2(1-2\mu)Cb - \frac{A}{b} \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi \\ &= \frac{1+\mu'}{E'} \left[2(1-2\mu')C'b - \frac{A'}{b} \right] + I' \cos \varphi + K' \sin \varphi. \end{aligned}$$

因为这一方程在接触面上的任意一点都应当成立，也就是在 φ 取任何数值时都应当成立，所以方程两边的自由项必须相等（当然，两边 $\cos \varphi$ 的系数及 $\sin \varphi$ 的系数也必须相等）。于是得

$$\frac{1+\mu}{E} \left[2(1-2\mu)Cb - \frac{A}{b} \right] = \frac{1+\mu'}{E'} \left[2(1-2\mu')C'b - \frac{A'}{b} \right].$$

经过简化并利用式(f), 得

$$n \left[2C(1-2\mu) - \frac{A}{b^2} \right] + \frac{A'}{b^2} = 0, \quad (i)$$

其中

$$n = \frac{E'(1+\mu)}{E(1+\mu')}$$

由方程(e)、(f)、(g)、(i)求出 A 、 C 、 A' 、 C' , 然后代入式(c)及式(d), 得圆筒及无限大弹性体的应力分量表达式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -q \frac{[1 + (1-2\mu)n] \frac{b^2}{\rho^2} - (1-n)}{[1 + (1-2\mu)n] \frac{b^2}{a^2} - (1-n)}, \\ \sigma_\varphi &= q \frac{[1 + (1-2\mu)n] \frac{b^2}{\rho^2} + (1-n)}{[1 + (1-2\mu)n] \frac{b^2}{a^2} - (1-n)}, \\ \sigma'_r = -\sigma'_\varphi &= -q \frac{2(1-\mu)n \frac{b^2}{\rho^2}}{[1 + (1-2\mu)n] \frac{b^2}{a^2} - (1-n)}. \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

当 $n < 1$ 时, 应力分布大致如图 4-5 所示。

这个问题是最简单的一个所谓接触问题, 即两个或两个以上不同弹性体互相接触的问题。在接触问题中, 通常都假定各弹性体在接触面上保持“完全接触”, 即, 既不互相脱离也不互相滑动。这样, 在接触面上就有应力和位移两方面的接触条件。应力方面的接触条件是: 两弹性体在接触面上的正应力相等, 切应力也相等。位移方面的接触条件是: 两弹性体在接触面上的法向位移相等, 切向位移也相等。以前已经看到, 对平面问题说来, 在通常的边界面上, 有两个边界条件, 现在看到, 在接触面上, 有四个接触条件, 条件并没有增多或减少, 因为接触面是两个弹性体的同样形状的境界。

光滑接触是“非完全接触”。在光滑接触面上, 也有四个接触条件: 两个弹性体的切应力都等于零(这是两个条件), 两个弹性体的正应力相等, 法向位移也相等(由于有滑动, 切向位移并不相等)。

§ 4-7 曲梁的纯弯曲

设有狭矩形截面的圆轴曲梁, 内半径为 a , 外半径为 b , 在两端受有大小

相等而方向相反的弯矩，图 4-6。取单位宽度的梁来考虑，并命单位宽度内的弯矩为 M 。取曲率中心 O 为坐标原点，从梁的一端量角 φ 。由于梁的所有各径向截面上的弯矩相同，因而可以假设各截面上的应力分布相同，也就是绕 z 轴对称。现在来考察，在轴对称应力的表达式(4-11)中，适当选择常数 A 、 B 、 C ，是否可以满足边界条件。

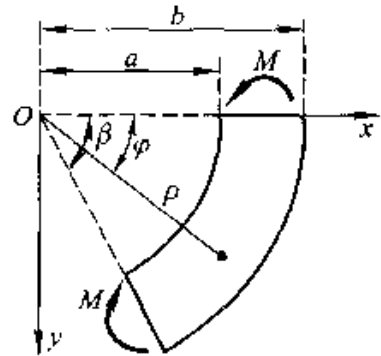


图 4-6

梁的全部边界上都没有剪力，这就要求

$$\begin{aligned} (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=a} &= 0, & (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b} &= 0, \\ (\tau_{\varphi\rho})_{\varphi=0} &= 0, & (\tau_{\varphi\rho})_{\varphi=\beta} &= 0. \end{aligned}$$

由(4-12)中的第三式可见，这些条件都能满足。在梁的内外两面，边界条件要求

$$(\sigma_{\rho})_{\rho=a} = 0, \quad (\sigma_{\rho})_{\rho=b} = 0.$$

将(4-12)中的第一式代入，得

$$\frac{A}{a^2} + B(1 + 2\ln a) + 2C = 0, \quad (a)$$

$$\frac{A}{b^2} + B(1 + 2\ln b) + 2C = 0, \quad (b)$$

在梁的任一端，环向正应力 σ_{φ} 应当合成为弯矩 M ，因此要求

$$\int_a^b \sigma_{\varphi} d\rho = 0, \quad (c)$$

$$\int_a^b \sigma_{\varphi} \rho d\rho = M. \quad (d)$$

根据(4-10)中的前二式，式(c)的左边可以写成为

$$\int_a^b \sigma_{\varphi} d\rho = \int_a^b \frac{d^2\Phi}{d\rho^2} d\rho = \left(\frac{d\Phi}{d\rho} \right)_a^b = (\rho\sigma_{\rho})_a^b = b(\sigma_{\rho})_{\rho=b} - a(\sigma_{\rho})_{\rho=a}.$$

由此可见，如果条件(a)和(b)都能满足，保证了

$$(\sigma_{\rho})_{\rho=a} = 0, \quad (\sigma_{\rho})_{\rho=b} = 0,$$

式(c)自然也就能够满足，下面不必再加以考虑。

根据(4-10)中的前二式，式(d)的左边可以写成为

$$\begin{aligned} \int_a^b \sigma_{\varphi} \rho d\rho &= \int_a^b \frac{d^2\Phi}{d\rho^2} \rho d\rho = \int_a^b \rho d\left(\frac{d\Phi}{d\rho} \right) = \left(\rho \frac{d\Phi}{d\rho} \right)_a^b - \int_a^b \frac{d\Phi}{d\rho} d\rho \\ &= (\rho^2 \sigma_{\rho})_a^b - (\Phi)_a^b = b^2 (\sigma_{\rho})_{\rho=b} - a^2 (\sigma_{\rho})_{\rho=a} - (\Phi)_a^b. \end{aligned}$$

由此可见，如果条件(a)和(b)都能满足，保证了

$$(\sigma_{\rho})_{\rho=a} = 0, \quad (\sigma_{\rho})_{\rho=b} = 0,$$

条件(d)就成为

$$-(\Phi)'' = M,$$

将 Φ 的表达式(4-11)代入, 得

$$-(A \ln b + Bb^2 \ln b + Cb^2 + D) + (A \ln a + Ba^2 \ln a + Ca^2 + D) = M,$$

也就是

$$A \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + C(b^2 - a^2) = -M. \quad (e)$$

由(a)、(b)、(e)三式解得 A 、 B 、 C , 然后代入公式(4-12), 即得郭洛文的解答:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{4M}{Na^2} \left(\frac{b^2}{a^2} \ln \frac{b}{\rho} + \ln \frac{\rho}{a} - \frac{b^2}{\rho^2} \ln \frac{b}{a} \right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{4M}{Na^2} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 - \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{b}{\rho} - \ln \frac{\rho}{a} - \frac{b^2}{\rho^2} \ln \frac{b}{a} \right), \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

其中

$$N = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)^2 - 4 \frac{b^2}{a^2} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

应力的分布大致如图4-7所示。在 $\rho = a$ 处, 弯应力 σ_ρ 的绝对值为最大。中和轴 ($\sigma_\varphi = 0$ 的所在处) 距离内纤维较近而距离外纤维较远。挤压应力 σ_ρ 的最大绝对值的所在处, 比中和轴更接近内纤维。

应当指出: 必须梁端面力的分布和式(f)中 σ_φ 的分布相同, 应力分量(f)才完全满足边界条件, 因而才是精确解答。如果弯矩 M 是由其他分布方式的面力所合成, 则靠近梁端处的应力分布将和式(f)有显著的差别。但是, 根据圣维南原理, 在离开梁端较远之处, 这个差别是无关重要的。

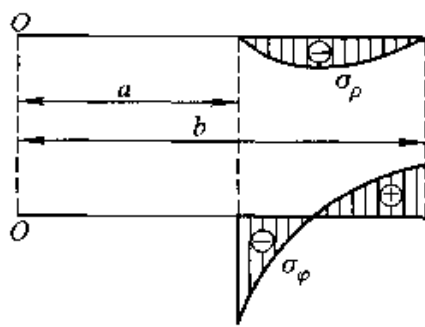


图 4-7

为了求得曲梁的位移, 可将已求得的常数 A 、 B 、 C 代入公式(4-13)。常数 H 、 I 、 K 则须由曲梁的约束条件来决定。这里不进行这些繁复的运算, 而只是证明一下平面截面的假定。

曲梁截面上任一径向线段 $d\rho$ 的转角是

$$\alpha = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}.$$

将(4-13)中的第二式代入, 得

$$\alpha = \frac{4B\varphi}{E} + H,$$

在曲梁的任一截面上, φ 是常数, 因而转角 α 是常数。这就是说, 任一截面上的所有各个径向线段的转角都相同, 因而这也就表示, 曲梁的截面保持为平面。

材料力学里假定截面保持为平面, 又假定 $\sigma_r = 0$ 和 $\tau_{r\varphi} = 0$ (各纤维只受简单的环向拉压), 由此得出弯应力 σ_φ 的近似解答。这个 σ_φ 在截面上按双曲线分布, 与本节中所得的 σ_φ 有差别。显然, 这个差别完全是由于不正确地假定 $\sigma_r = 0$ 而引起的, 因为其他的假定是完全正确的。对于曲率不很大的曲梁, 这个差别并不显著。

§ 4-8 圆盘在匀速转动中的应力及位移

作为轴对称问题的最后一个实例, 设有等厚度圆盘, 绕其回转轴以均匀角速度 ω 旋转。以回转轴为 z 轴, 则圆盘的任意一点都只有向心加速度, 大小为 $\omega^2\rho$ 。因此, 在圆盘的每单位体积上施以离心惯性力 $\rho_1\omega^2\rho$, 其中 ρ_1 是圆盘的密度, 则该圆盘可以认为是在如下的体力作用下处于平衡状态:

$$f_r = \rho_1\omega^2\rho, \quad f_\varphi = 0.$$

由于这里是轴对称的物体受轴对称的体力, 所以应力分布必然是轴对称的, 即, 应力分量 σ_r 及 σ_φ 都只是 ρ 的函数而 $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0$ 。于是平衡微分方程 (4-1) 中的第二式自然满足, 而第一式成为

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{\rho} + \rho_1\omega^2\rho = 0, \quad (\text{a})$$

或乘以 ρ 而得

$$\frac{d}{d\rho}(\rho\sigma_r) - \sigma_\varphi + \rho_1\omega^2\rho^2 = 0,$$

引用应力函数 $\Phi(\rho)$, 并命

$$\rho\sigma_r = \Phi, \quad \sigma_\varphi = \frac{d\Phi}{d\rho} + \rho_1\omega^2\rho^2, \quad (\text{b})$$

则上式总能满足。

为了导出应力函数 Φ 所应满足的微分方程, 必须考虑形变分量及位移分量。在这里, 由于圆盘只受有回转轴的约束, 而这种约束是轴对称的, 所以它的弹性位移也将是轴对称的, 即, 径向位移 $u_r = u_r(\rho)$, 而环向位移 $u_\varphi = 0$ (注意这里只考虑弹性位移而不计刚体位移)。于是几何方程 (4-2) 简化为

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{d}{d\rho} u_{\rho}, \quad \varepsilon_{\varphi} = \frac{u_{\rho}}{\rho}, \quad \gamma_{\rho\varphi} = 0. \quad (c)$$

由前二式中消去 u_{ρ} , 得到相容方程

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{d}{d\rho} (\rho \varepsilon_{\varphi}).$$

将物理方程(4-3)中的前二式代入, 再利用式(b), 即得以应力函数 Φ 表示的相容方程

$$\rho^2 \frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + \rho \frac{d\Phi}{d\rho} - \Phi = -(3 + \mu) \rho_1 \omega^2 \rho^4, \quad (d)$$

或

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \Phi) \right] = -(3 + \mu) \rho_1 \omega^2 \rho.$$

对 ρ 积分, 乘以 ρ , 再对 ρ 积分, 除以 ρ , 得到

$$\Phi = -\frac{3 + \mu}{8} \rho_1 \omega^2 \rho^3 + \frac{A\rho}{2} + \frac{B}{\rho},$$

并从而由式(b)得出

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -\frac{3 + \mu}{8} \rho_1 \omega^2 \rho^2 + \frac{A}{2} + \frac{B}{\rho^2}, \\ \sigma_{\varphi} &= -\frac{1 + 3\mu}{8} \rho_1 \omega^2 \rho^2 + \frac{A}{2} - \frac{B}{\rho^2}, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

其中的 A 和 B 是任意常数。

为了在圆盘中心 ($\rho = 0$) 处的应力不致成为无限大, 必须取 $B = 0$ 。然后, 常数 A 即可决定于盘边的边界条件

$$(\sigma_{\rho})_{\rho=a} = 0,$$

其中 a 是圆盘的半径。这样就由(e)中的第一式得出

$$A = \frac{3 + \mu}{4} \rho_1 \omega^2 a^2,$$

从而由式(e)得出应力分量的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{3 + \mu}{8} \rho_1 \omega^2 a^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right), \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{3 + \mu}{8} \rho_1 \omega^2 a^2 \left(1 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} \frac{\rho^2}{a^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

最大应力是在圆盘的中心:

$$\sigma_{\max} = (\sigma_{\rho})_{\rho=0} = (\sigma_{\varphi})_{\rho=0} = \frac{3 + \mu}{8} \rho_1 \omega^2 a^2.$$

径向位移 u_ρ 可由(c)中的第二式及式(f)求得:

$$u_\rho = \rho \varepsilon_\rho = \frac{\rho}{E} (\sigma_\rho - \mu \sigma_\varphi) = \frac{\rho_1 \omega^2 a^3 (1 - \mu)}{8E} \left[(3 + \mu) \frac{\rho}{a} - (1 + \mu) \frac{\rho^3}{a^3} \right] \quad (g)$$

在圆盘的中心($\rho = 0$), $u_\rho = 0$. 最大弹性位移发生在圆盘的边缘($\rho = a$):

$$(u_\rho)_{\max} = \frac{\rho_1 \omega^2 a^3 (1 - \mu)}{4E}$$

上述关于等厚度圆盘的分析方法,也可以推广应用于变厚度圆盘。假定圆盘的厚度为 $\delta = \delta(\rho)$, 而应力不沿厚度变化, 则微分方程(a)可以近似地应用于每单位厚度的圆盘。于是全厚度内的平衡微分方程为

$$\frac{d}{d\rho} (\delta \sigma_\rho) + \frac{\delta \sigma_\rho - \delta \sigma_\varphi}{\rho} + \rho_1 \omega^2 \rho \delta = 0,$$

或乘以 ρ 而成为

$$\frac{d}{d\rho} (\rho \delta \sigma_\rho) - \delta \sigma_\varphi + \rho_1 \omega^2 \delta \rho^2 = 0.$$

仍然取应力函数 $\Phi = \Phi(\rho)$, 并命

$$\rho \delta \sigma_\rho = \Phi, \quad \delta \sigma_\varphi = \frac{d\Phi}{d\rho} + \rho_1 \omega^2 \delta \rho^2, \quad (h)$$

可以由上式得出与式(d)相似的微分方程

$$\rho^2 \frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{\rho}{\delta} \frac{d\delta}{d\rho}\right) \rho \frac{d\Phi}{d\rho} - \left(1 - \frac{\mu\rho}{\delta} \frac{d\delta}{d\rho}\right) \Phi = -(3 + \mu) \rho_1 \omega^2 \delta \rho^3. \quad (i)$$

为了实用目的及便于求解, 通常把厚度的变化规律取为

$$\delta = C\rho^{-\lambda},$$

其中 C 是常数而 λ 为任意正数。这样, 式(i)将成为

$$\rho^2 \frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + (1 + \lambda) \rho \frac{d\Phi}{d\rho} - (1 + \mu\lambda) \Phi = -(3 + \mu) \rho_1 \omega^2 C \rho^{3-\lambda}.$$

读者试证, 这一微分方程的解答是

$$\Phi = A\rho^m + B\rho^n - \frac{3 + \mu}{8 - (3 + \mu)\lambda} C \rho_1 \omega^2 \rho^{3-\lambda},$$

其中 A 和 B 是任意常数, 而

$$\left. \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (1 + \mu\lambda)}, \quad (j)$$

于是可由式(h)得出应力分量

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{\Phi}{\delta \rho} = \frac{A}{C} \rho^{m+\lambda-1} + \frac{B}{C} \rho^{n+\lambda-1} - \frac{3 + \mu}{8 - (3 + \mu)\lambda} \rho_1 \omega^2 \rho^2, \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{\delta} \frac{d\Phi}{d\rho} + \rho_1 \omega^2 \rho^2 = \frac{A}{C} m \rho^{m+\lambda-1} + \frac{B}{C} n \rho^{n+\lambda-1} - \frac{1 + 3\mu}{8 - (3 + \mu)\lambda} \rho_1 \omega^2 \rho^2. \end{aligned}$$

由式(j)可见, $n + \lambda < 0$, 从而有 $n + \lambda - 1 < -1$ 。因此, 为了应力在圆盘的中心($\rho = 0$)处不致成为无限大, 必须取 $B = 0$ 。然后即可利用边界条件 $(\sigma_\rho)_{\rho=a} = 0$ 求得

$$\frac{A}{C} = \frac{3 + \mu}{8 - (3 + \mu)\lambda} \rho_1 \omega^2 a^{\lambda - m - \lambda},$$

从而得应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{3 + \mu}{8 - (3 + \mu)\lambda} \rho_1 \omega^2 a^2 \left[\left(\frac{\rho}{a} \right)^{m + \lambda - 1} - \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{3 + \mu}{8 - (3 + \mu)\lambda} \rho_1 \omega^2 a^2 \left[m \left(\frac{\rho}{a} \right)^{m + \lambda - 1} - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

此外并可由(c)中的第二式及式(h)求得

$$\begin{aligned} u_\rho &= \rho \varepsilon_\varphi = \frac{\rho}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_\rho) \\ &= \frac{\rho_1 \omega^2 a^2}{E [8 - (3 + \mu)\lambda]} \left[(3 + \mu)(m - \mu) \left(\frac{\rho}{a} \right)^{m + \lambda} - (1 - \mu^2) \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (l)$$

对于等厚度圆盘, $\lambda = 0$, 从而由式(j)有 $m = 1$ 。这时, 式(k)将简化为式(f), 而式(l)简化为式(g)。

§4-9 圆孔的孔边应力集中

设受力的弹性体具有小孔, 则孔边的应力将远大于无孔时的应力, 也远大于距孔稍远处的应力。这种现象称为孔边应力集中。

孔边的应力集中, 绝不是由于截面面积减小了一些而应力有所增大。即使截面面积比无孔时只减小了百分之几或千分之几, 应力也会集中到若干倍。而且, 对于同样形状的孔说来, 集中的倍数几乎与孔的大小无关。实际上是, 由于孔的存在, 孔附近的应力状态与形变状态完全改观。

孔边应力集中是局部现象。在几倍孔径以外, 应力几乎不受孔的影响, 应力的分布情况以及数值的大小都几乎与无孔时相同。一般说来, 集中的程度越高, 集中的现象越是局部性的, 也就是, 应力随着距孔的距离增大而越快地趋近于无孔时的应力。

应力集中的程度, 首先是与孔的形状有关。一般说来, 圆孔孔边的集中程度最低。因此, 如果有必要在构件中挖孔或留孔, 应当尽可能地用圆孔代替其他形状的孔。如果不可能采用圆孔, 也应当采用近似于圆形的孔(例如椭圆孔), 以代替具有尖角的孔。

因为只有圆孔孔边的应力可以用较简单的数学工具进行分析, 所以这里只

以圆孔为例，简略讨论孔边应力集中的问题。较复杂的孔边应力集中问题见第五章。

首先，设有矩形薄板(或长柱)，在离开边界较远处有半径为 a 的小圆孔，在左右两边受均布拉力，其集度为 q ，图 4-8。坐标原点取在圆孔的中心，坐标轴平行于边界。

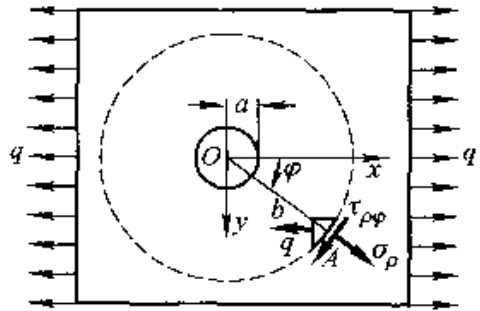


图 4-8

就直边的边界条件而论，宜用直角坐标；就圆孔的边界条件而论，宜用极坐标。因为这里主要是考察圆孔附近的应力，所以用极坐标求解，而首先将直边变换为圆边。为此，以远大于 a 的某一长度 b 为半径，以坐标原点为圆心，作一个大圆，如图中虚线所示。由应力集中的局部性可见，在大圆周处，例如在 A 点，应力状态与无孔时相同，也就是

$$(\sigma_x)_{\rho=b} = q, \quad (\sigma_y)_{\rho=b} = 0, \quad (\tau_{xy})_{\rho=b} = 0。$$

代入坐标变换式(4-9)，得到该处的极坐标应力分量

$$(\sigma_\rho)_{\rho=b} = \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \cos 2\varphi, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b} = -\frac{q}{2} \sin 2\varphi。 \quad (a)$$

于是原来的问题变换成这样一个新问题：内半径为 a 而外半径为 b 的圆环或圆筒，在外边界上受有如式(a)所示的面力。

上述面力可以分解成两部分，其中第一部分是

$$(\sigma_\rho)_{\rho=b} = \frac{q}{2}, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b} = 0； \quad (b)$$

第二部分是

$$(\sigma_\rho)_{\rho=b} = \frac{q}{2} \cos 2\varphi, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b} = -\frac{q}{2} \sin 2\varphi。 \quad (c)$$

为了求得面力(b)所引起的应力，只须应用解答(4-15)而命其中的 $q_b = -\frac{q}{2}$ 。这样就得到

$$\sigma_\rho = \frac{q}{2} \frac{1 - \frac{a^2}{\rho^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \quad \sigma_\varphi = \frac{q}{2} \frac{1 + \frac{a^2}{\rho^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \quad \tau_{\rho\varphi} = 0。$$

既然 b 远大于 a ，就可以近似地取 $a/b = 0$ ，从而得到解答

$$\sigma_\rho = \frac{q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right), \quad \sigma_\varphi = \frac{q}{2} \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right), \quad \tau_{\rho\varphi} = 0。 \quad (d)$$

为了求得面力(c)所引起的应力，可以用半逆解法，假设 σ_ρ 为 ρ 的某一函

数乘以 $\cos 2\varphi$, 而 $\tau_{\rho\varphi}$ 为 ρ 的另一函数乘以 $\sin 2\varphi$ 。但由(4-5)式有

$$\sigma_{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad \tau_{\rho\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right).$$

因此可以假设

$$\Phi = f(\rho) \cos 2\varphi.$$

代入相容方程(4-6), 得

$$\cos 2\varphi \left[\frac{d^4 f(\rho)}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 f(\rho)}{d\rho^3} - \frac{9}{\rho^2} \frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{9}{\rho^3} \frac{df(\rho)}{d\rho} \right] = 0.$$

删去因子 $\cos 2\varphi$ 以后, 求解这个常微分方程, 得

$$f(\rho) = A\rho^4 + B\rho^2 + C + \frac{D}{\rho^2},$$

从而得应力函数

$$\Phi = \left(A\rho^4 + B\rho^2 + C + \frac{D}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi,$$

又从而由公式(4-5)得应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= - \left(2B + \frac{4C}{\rho^2} + \frac{6D}{\rho^4} \right) \cos 2\varphi, \\ \sigma_{\varphi} &= \left(12A\rho^2 + 2B + \frac{6D}{\rho^4} \right) \cos 2\varphi, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \left(6A\rho^2 + 2B - \frac{2C}{\rho^2} - \frac{6D}{\rho^4} \right) \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

对式(e)应用边界条件(c), 并应用边界条件

$$(\sigma_{\rho})_{\rho=a} = 0, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=a} = 0,$$

得到方程

$$2B + \frac{4C}{b^2} + \frac{6D}{b^4} = -\frac{q}{2},$$

$$6Ab^2 + 2B - \frac{2C}{b^2} - \frac{6D}{b^4} = -\frac{q}{2},$$

$$2B + \frac{4C}{a^2} + \frac{6D}{a^4} = 0.$$

$$6Aa^2 + 2B - \frac{2C}{a^2} - \frac{6D}{a^4} = 0.$$

求解 A 、 B 、 C 、 D , 然后命 $a/b=0$, 得

$$A = 0, \quad B = -\frac{q}{4}, \quad C = \frac{1}{2} qa^2, \quad D = -\frac{qa^4}{4}.$$

再将各已知值代入式(e), 并与式(d)相叠加, 即得齐尔西的解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) + \frac{q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \left(1 - 3 \frac{a^2}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi, \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{q}{2} \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) - \frac{q}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{\rho^4} \right) \cos 2\varphi, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \left(1 + 3 \frac{a^2}{\rho^2} \right) \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

沿着孔边, $\rho = a$, 环向正应力是

$$\sigma_{\varphi} = q(1 - 2\cos 2\varphi), \quad (4-18)$$

它的几个重要数值如下表所示。

φ	0	30°	45°	60°	90°
σ_{φ}	-q	0	q	2q	3q

沿着 y 轴, $\varphi = 90^\circ$, 环向正应力是

$$\sigma_{\varphi} = q \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{\rho^2} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{\rho^4} \right),$$

它的几个重要数值如下表所示。

ρ	a	2a	3a	4a
σ_{φ}	3q	1.22q	1.07q	1.04q

可见应力随着远离孔边而急剧趋近于 q , 图 4-9。

沿着 x 轴, $\varphi = 0$, 环向正应力是

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{q}{2} \frac{a^2}{\rho^2} \left(3 \frac{a^2}{\rho^2} - 1 \right).$$

在 $\rho = a$ 处, $\sigma_{\varphi} = -q$; 在 $\rho = \sqrt{3}a$ 处, $\sigma_{\varphi} = 0$, 如图 4-9 所示。

如果矩形薄板(或长柱)在左右两边受有均布拉力 q_1 , 并在上下两边受有均布拉力 q_2 , 图 4-10, 亦可由解答(4-17)得出应力分量。为此, 首先命该解答中的 q 等于 q_1 , 然后命该解答中的 q 等于 q_2 , 而将 φ 用 $90^\circ + \varphi$ 代替, 最后再将两个结果相叠加。这样就得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{q_1 + q_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) + \frac{q_1 - q_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \left(1 - 3 \frac{a^2}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi, \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{q_1 + q_2}{2} \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) - \frac{q_1 - q_2}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{\rho^4} \right) \cos 2\varphi, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \frac{q_2 - q_1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \left(1 + 3 \frac{a^2}{\rho^2} \right) \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

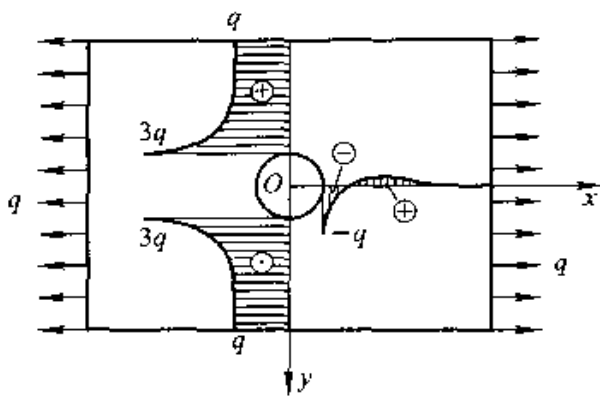


图 4 - 9

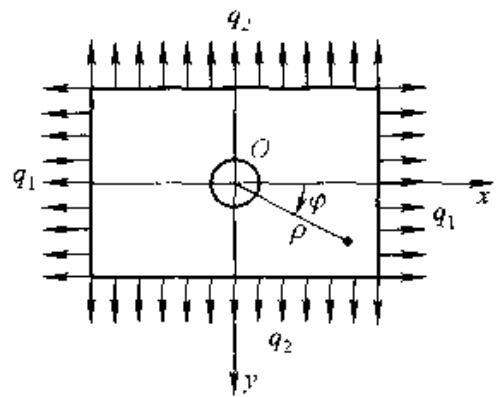


图 4 - 10

最后，设有任意形状的薄板(或长柱)，受有任意面力，而在距边界较远处有一个小圆孔。只要已有了无孔时的应力解答，也就可以计算孔边的应力。为此，可以先求出相应于圆孔中心处的应力分量，然后求出相应的两个应力主向以及主应力 σ_1 和 σ_2 。如果圆孔确是很小，圆孔的附近部分就可以当做是沿两个主向分别受均布拉力 $q_1 = \sigma_1$ 及 $q_2 = \sigma_2$ ，也就可以应用解答(4-19)。但需注意，这时必须把 x 轴和 y 轴分别放在 σ_1 及 σ_2 的方向。

§ 4 - 10 楔形体在楔顶或楔面受力

本节中将导出有关楔形体的几个有实用价值的解答，设楔形体的中心角为 α ，下端仍作为无限长，图 4 - 11。

首先，设楔形体在楔顶受有集中力，与楔形体的中心线成角 β 。取单位宽度的部分来考虑，并命单位宽度上所受的力为 F 。取坐标轴如图所示。

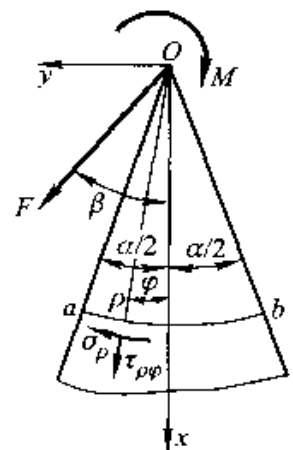


图 4 - 11

在这里，楔形体内任意一点的应力分量决定于 α 、 β 、 F 、 ρ 、 φ ，因而各应力分量的表达式中只会包含这几个量。但是，应力分量的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$ ， F 的量纲是 MT^{-2} ，而 α 、 β 、 φ 是量纲一的数量，因此，各应力分量的表达式只可能取 $\frac{F}{\rho}N$ 的形式，其中 N 是 α 、 β 、 φ 组成的量纲一的数量。这就是说，在各应力分量的表达式中， ρ 只可能以负一次幂出现。由公式(4-5)又可以看出，应力函数 Φ 中的 ρ 的幂次应当比各应力分量中的 ρ 的幂次高出两次。因此，可以假设应力函数 Φ 是 φ 的某一函数乘以 ρ 的一次幂，即

$$\Phi = \rho f(\varphi). \quad (a)$$

将式(a)代入相容方程(4-6), 得

$$\frac{1}{\rho^3} \left[\frac{d^4 f(\varphi)}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} + f(\varphi) \right] = 0.$$

删去因子 $\frac{1}{\rho^3}$, 并求解这一常微分方程, 得

$$f(\varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \varphi (C \cos \varphi + D \sin \varphi),$$

其中 A, B, C, D 是任意常数。代入式(a), 得

$$\Phi = A\rho \cos \varphi + B\rho \sin \varphi + \rho\varphi (C \cos \varphi + D \sin \varphi),$$

由于式中的前两项 $A\rho \cos \varphi + B\rho \sin \varphi = Ax + By$, 不影响应力, 可以删去(见 §3-1), 因此, 只须取

$$\Phi = \rho\varphi (C \cos \varphi + D \sin \varphi), \quad (4-20)$$

从而由公式(4-5)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{2}{\rho} (D \cos \varphi - C \sin \varphi), \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = 0, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

由(b)中的后二式可见, 楔形体左右两面的应力边界条件,

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}} = 0, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}} = 0,$$

是满足了的。此外还有一个应力边界条件: 在楔顶附近的一小部分边界上有一组面力, 它的分布没有给出, 但已知它在单位宽度上合成为 F 。如果取任意一个截面, 例如圆柱面 ab , 则该截面上的应力必然和上述面力合成平衡力系, 因而也就必然和力 F 合成平衡力系。于是得出由应力边界条件转换而来的平衡条件:

$$\sum F_x = 0: \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \sigma_\rho \rho d\varphi \cos \varphi + F \cos \beta = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \sigma_\rho \rho d\varphi \sin \varphi + F \sin \beta = 0.$$

将(b)中的第一式代入, 得

$$2 \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} (D \cos^2 \varphi - C \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi + F \cos \beta = 0,$$

$$2 \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} (D \sin \varphi \cos \varphi - C \sin^2 \varphi) d\varphi + F \sin \beta = 0.$$

积分以后得

$$D(\sin \alpha + \alpha) + F \cos \beta = 0,$$

$$C(\sin \alpha - \alpha) + F \sin \beta = 0,$$

由此得

$$C = \frac{F \sin \beta}{\alpha - \sin \alpha}, \quad D = -\frac{F \cos \beta}{\alpha + \sin \alpha},$$

代入式(b), 即得密切尔的解答:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2F}{\rho} \left(\frac{\cos \beta \cos \varphi}{\alpha + \sin \alpha} + \frac{\sin \beta \sin \varphi}{\alpha - \sin \alpha} \right), \\ \sigma_\varphi &= 0, \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\varphi r} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

其次, 设楔形体在楔顶受有力偶, 而每单位宽度内的力偶矩为 M , 图 4-11。根据和前面相似的量纲分析, 可见在各应力分量的表达式中, ρ 只可能以负二次幂出现, 而应力函数的表达式应当与 ρ 无关, 也就是

$$\Phi = \Phi(\varphi). \quad (c)$$

将式(c)代入相容方程(4-6), 得

$$\frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d^4 \Phi}{d\varphi^4} + 4 \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right) = 0,$$

删去因子 $1/\rho^4$, 求解这一常微分方程, 得

$$\Phi = A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C\varphi + D. \quad (4-22)$$

由于对称性(这里是反对称), σ_r 和 σ_φ 应当是 φ 的奇函数, 而 $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}$ 应当是 φ 的偶函数。于是由公式(4-5)可见, Φ 应当是 φ 的奇函数, 从而可见, $A = D = 0$, 而应力函数简化为

$$\Phi = B \sin 2\varphi + C\varphi,$$

并由公式(4-5)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\frac{4B \sin 2\varphi}{\rho^2}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = 0, \\ \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \frac{2B \cos 2\varphi + C}{\rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

在楔形体的左右两面, 边界条件要求

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}} = 0, \quad (\tau_{r\varphi})_{\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}} = 0,$$

由式(d)可见, 前一条件总能满足, 而后一条件要求

$$\frac{2B \cos \alpha + C}{\rho^2} = 0, \quad \text{即 } C = -2B \cos \alpha.$$

代入式(d), 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -\frac{4B\sin 2\varphi}{\rho^2}, \\ \sigma_{\varphi} &= 0, \\ \tau_{\rho\alpha} = \tau_{\varphi\rho} &= \frac{2B(\cos 2\varphi - \cos \alpha)}{\rho^2} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

为了求出常数 B , 仍然考虑 ab 以上部分的平衡条件。由平衡条件 $\Sigma M_n = 0$ 有

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} (\tau_{\rho\varphi} \rho d\varphi) \rho + M = 0.$$

将(e)中的第三式代入, 积分以后得出

$$2B = -\frac{M}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}.$$

代回式(e), 即得英格立斯的解答:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -\frac{2M\sin 2\varphi}{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)\rho^2}, \\ \sigma_{\varphi} &= 0, \\ \tau_{\rho\alpha} = \tau_{\varphi\rho} &= -\frac{M(\cos 2\varphi - \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)\rho^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-23)$$

读者试证明: 应力分量(4-23)也能满足 ab 以上部分的另外两个平衡条件, 即 $\Sigma F_x = 0$ 及 $\Sigma F_y = 0$ 。

在以上两个问题中, 曾假定楔形体在楔顶所受的力或力偶是集中作用的, 因此, 在楔顶($\rho=0$), 应力成为无限大。实际上, 集中在一点的力或力偶是不存在的, 因此也就不会发生无限大的应力。而且, 只要面力的集度超过楔形体材料的比例极限, 弹性力学的基本方程就不再适用, 以上的解答也就不适用。因此, 我们应当这样来理解: 楔形体在楔顶附近受有一定的面力, 这面力的最大集度不超过比例极限, 而面力的合成是图中所示的 F 或 M 。当然, 面力分布的方式不同, 应力分布也就不同。但是, 按照圣维南原理, 不论这个面力如何分布, 在离开楔顶稍远之处, 应力分布都相同, 也就和以上各公式所示的分布相同。

最后, 设楔形体在一面受有均布压力 q , 如图 4-12 所示。在这里, 楔形体内任意一点各应力分量决定于 α 、 q 、 ρ 和 φ 。根据量纲分析, 各应力分量的表达式只可能取 Nq 的形式, 其中 N 是 α 和 φ 组成的量纲一的数。这就是说, 在各应力分量的表达式中, ρ 不可能出现。于是由公式(4-5)

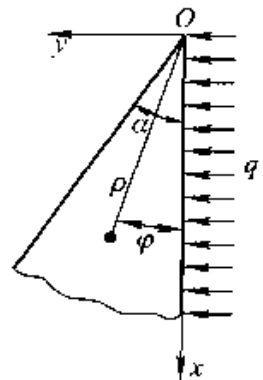


图 4-12

可见, 应力函数 Φ 应该是 φ 的某一函数乘以 ρ^2 , 即

$$\Phi = \rho^2 f(\varphi). \quad (f)$$

将式(f)代入相容方程(4-6), 得

$$\frac{1}{\rho^2} \left[\frac{d^4 f(\varphi)}{d\varphi^4} + 4 \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} \right] = 0.$$

解出 $f(\varphi)$ 以后, 代入式(f), 得

$$\Phi = \rho^2 (A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C\varphi + D), \quad (4-24)$$

并由公式(4-5)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -2A \cos 2\varphi - 2B \sin 2\varphi + 2C\varphi + 2D, \\ \sigma_\varphi &= 2A \cos 2\varphi + 2B \sin 2\varphi + 2C\varphi + 2D, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = 2A \sin 2\varphi - 2B \cos 2\varphi - C. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

边界条件要求

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi=0} = -q, \quad (\sigma_\varphi)_{\varphi=\alpha} = 0, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\varphi=0} = 0, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\varphi=\alpha} = 0$$

将式(g)代入, 得出以 A 、 B 、 C 、 D 四个任意常数为未知数的四个线性方程。求出这四个任意常数, 再代入式(g), 得应力分量的莱维解答:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -q + \frac{\tan \alpha (1 + \cos 2\varphi) - (2\varphi + \sin 2\varphi)}{2(\tan \alpha - \alpha)} q, \\ \sigma_\varphi &= -q + \frac{\tan \alpha (1 - \cos 2\varphi) - (2\varphi - \sin 2\varphi)}{2(\tan \alpha - \alpha)} q, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = \frac{(1 - \cos 2\varphi) - \tan \alpha \sin 2\varphi}{2(\tan \alpha - \alpha)} q. \end{aligned} \right\} \quad (4-25)$$

§ 4-11 半平面体在边界上受法向集中力

命楔形体的中心角等于一个平角, 这楔形体的两个侧边就连成一个直边, 而楔形体就成为一个所谓半平面体, 图 4-13。因此, 当这个半平面体在边界上受有垂直于边界的力 F 时, 为了得出应力分量, 只须在公式(4-21)中命 $\alpha = \pi$, $\beta = 0$ 。于是得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{2F \cos \varphi}{\pi \rho}, \\ \sigma_\varphi &= 0, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

利用坐标变换式(4-7), 可由上式得出直角坐标中的应力分量

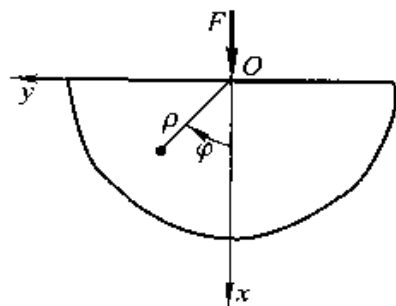


图 4-13

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2F \cos^3 \varphi}{\pi \rho}, \\ \sigma_y &= -\frac{2F \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\pi \rho}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2F \sin \varphi \cos^2 \varphi}{\pi \rho} \end{aligned} \right\} \quad (4-27)$$

或将其中的极坐标改为直角坐标而得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2F}{\pi} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}, \\ \sigma_y &= -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-28)$$

现在来求出位移, 先假定这里是平面应力情况。将应力分量(4-26)代入物理方程(4-3), 得形变分量

$$\varepsilon_\rho = -\frac{2F \cos \varphi}{\pi E \rho}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{2\mu F \cos \varphi}{\pi E \rho}, \quad \gamma_{\rho\varphi} = 0. \quad (4-29)$$

再将这形变分量代入几何方程(4-2), 得

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} = -\frac{2F \cos \varphi}{\pi E \rho}, \quad \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{2\mu F \cos \varphi}{\pi E \rho}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} = 0,$$

进行和 §4-5 中相同的运算, 可以得出位移分量

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= -\frac{2F}{\pi E} \cos \varphi \ln \rho - \frac{(1-\mu)F}{\pi E} \varphi \sin \varphi + I \cos \varphi + K \sin \varphi, \\ u_\varphi &= \frac{2F}{\pi E} \sin \varphi \ln \rho + \frac{(1+\mu)F}{\pi E} \sin \varphi - \frac{(1-\mu)F}{\pi E} \varphi \cos \varphi + H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中的 H 、 I 、 K 都是任意常数。

由问题的对称条件有

$$(u_\varphi)_{\varphi=0} = 0.$$

将式(a)代入, 得

$$H = 0, \quad K = 0.$$

于是(a)成为

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= -\frac{2F}{\pi E} \cos \varphi \ln \rho - \frac{(1-\mu)F}{\pi E} \varphi \sin \varphi + I \cos \varphi, \\ u_\varphi &= \frac{2F}{\pi E} \sin \varphi \ln \rho - \frac{(1-\mu)F}{\pi E} \varphi \cos \varphi + \frac{(1+\mu)F}{\pi E} \sin \varphi - I \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

如果半平面体不受铅直方向的约束, 则常数 I 不能确定, 因为 I 取决于铅直方向(x 方向)的刚体平移。如果半平面体受有铅直方向的约束, 就可以根据这个约束条件来确定常数 I 。

为了求得边界上任意一点 M 向下的铅直位移，即所谓沉陷，可应用式 (b) 中的第二式。注意，位移 u_φ 是以沿 φ 正方向时为正，因此， M 点的沉陷是

$$-(u_\varphi)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2F}{\pi E} \ln \rho - \frac{(1+\mu)F}{\pi E} + I, \quad (c)$$

如果常数 I 未能确定(由于半平面体不受铅直方向的约束)，则沉陷 (c) 也不能确定。这时，只能求得相对沉陷。试在边界上取定一个基点 B ，图 4-14，它距荷载作用点的水平距离为 s 。边界上一点 M 对于基点 B 的相对沉陷，等于 M 点的沉陷减去 B 点的沉陷，即

$$\eta = \left[-\frac{2F}{\pi E} \ln \rho - \frac{(1+\mu)F}{\pi E} + I \right] - \left[-\frac{2F}{\pi E} \ln s - \frac{(1+\mu)F}{\pi E} + I \right],$$

简化以后得

$$\eta = \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{s}{\rho}. \quad (4-30)$$

对于平面应变情况，在以上关于形变或位移的公式中，须将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ，

将 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

本节中的解答，是符拉芒首先得出的。

§ 4-12 半平面体在边界上受法向分布力

有了上一节中关于半平面体在边界上受法向集中力作用时的应力公式和沉陷公式，即可通过叠加而得出法向分布力作用时的应力和沉陷。

设半平面体在其边界的 AB 一段上受有分布力，它在各点的集度为 q ，图 4-15。为了求出半平面体内某一点 M 处的应力，取坐标轴如图所示，命 M 点的坐标为 (x, y) 。在 AB 一段上距坐标原点 O 为 ξ 处，取微小长度 $d\xi$ ，将其上所受的力 $dF = qd\xi$ 看做一个微小集中力。对于这个微小集中力引起的应力，可以应用公

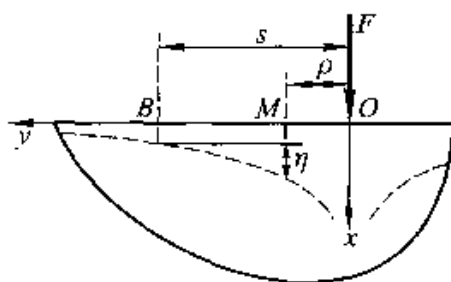


图 4-14

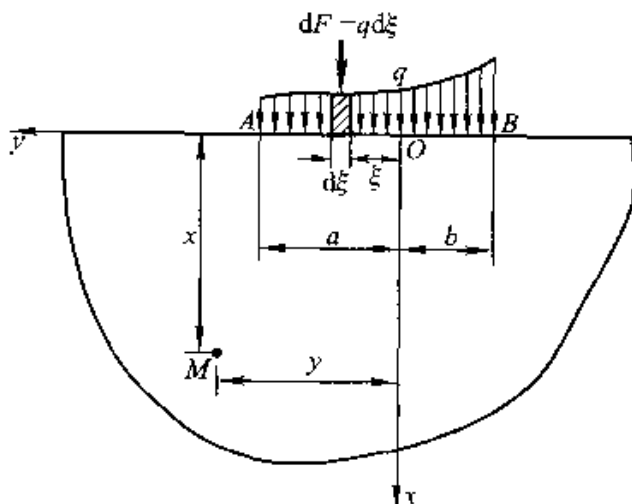


图 4-15

式(4-28)。注意,在公式(4-28)中, x 和 y 分别为欲求应力之点与集中力作用点的铅直和水平距离,而在图4-15中, M 点与微小集中力 dF 的铅直和水平距离分别为 x 和 $y - \xi$ 。因此, $dF = qd\xi$ 在 M 点引起的应力为

$$d\sigma_x = -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x^3}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$d\sigma_y = -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x(y - \xi)^2}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$d\tau_{xy} = -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x^2(y - \xi)}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

为了求出全部分布力所引起的应力,只须将所有各个微小集中力所引起的应力相叠加,也就是求出上列三式的积分:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \int_{-c}^0 \frac{qx^3 d\xi}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{-c}^0 \frac{qx(y - \xi)^2 d\xi}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-c}^0 \frac{qx^2(y - \xi) d\xi}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (4-31)$$

在应用这些公式时,须将集度 q 表示成为 ξ 的函数,然后再进行积分。

在用连杆法计算基础梁的平面问题时,需要用到半平面体在边界上受有均布单位力时的沉陷公式,现在来导出这个公式。

设有单位力均匀分布在半平面体边界的长度 c 上面,因而分布力的集度为 $1/c$, 图4-16。为了求得距均布力中点 I 为 x 的一点 K 的沉陷 η_k , 将这个均布力分为无数多个微分力 $dF = \frac{1}{c} d\rho$, 其中 ρ 为该微分力至 K 点的距离。应用沉陷公式(4-30), 得出 K 点由于 dF 作用而引起的微分沉陷

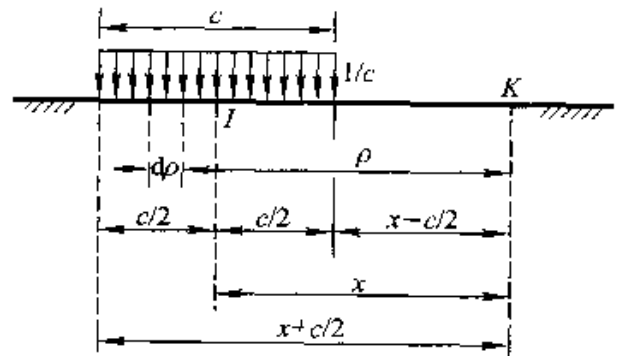


图4-16

$$d\eta_k = \frac{2dF}{\pi E} \ln \frac{s}{\rho} = \frac{2}{\pi E c} \ln \frac{s}{\rho} d\rho. \quad (a)$$

对 ρ 进行积分,即可求得沉陷 η_k 。

如果 K 点在均布力之外,则沉陷为

$$\eta_k = \frac{2}{\pi E c} \int_{x-c/2}^{x+c/2} \ln \frac{s}{\rho} d\rho.$$

为简单起见, 假定沉陷的基点取得很远, 即 s 远大于 ρ , 积分时可以把 s 当作常数。积分的结果是

$$\eta_{k_1} = \frac{1}{\pi E} (C + F_{k_1}), \quad (4-32)$$

其中

$$C = 2 \left(\ln \frac{s}{c} + 1 + \ln 2 \right), \quad (b)$$

$$F_{k_1} = -2 \frac{x}{c} \ln \left(\frac{2 \frac{x}{c} + 1}{2 \frac{x}{c} - 1} \right) - \ln \left(4 \frac{x^2}{c^2} - 1 \right). \quad (c)$$

如果 K 点在均布力的中点 $I(x=0)$, 则沉陷为

$$\eta_{k_1} = \frac{2}{\pi E c} \int_0^{c-x} \ln \frac{s}{\rho} d\rho.$$

积分的结果仍然可以写成(4-32)的形式, 而且其中的常数 C 仍然如式(b)所示, 但 $F_{k_1} = 0$ 。

对于平面应变情况下的半平面体, 沉陷公式(4-32)中的 E 应当换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 。

习 题

4-1 试导出位移分量的坐标变换式:

$$\begin{aligned} u_p &= u \cos \varphi + v \sin \varphi, & u_\varphi &= -u \sin \varphi + v \cos \varphi; \\ u &= u_p \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi, & v &= u_p \sin \varphi + u_\varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

4-2 设有内半径为 a 而外半径为 b 的圆筒受内压力 q , 试求内半径及外半径的改变, 并求圆筒厚度的改变。

$$\text{答案: } \frac{qa(1-\mu^2)}{E} \left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \right), \quad \frac{qa(1-\mu^2)}{E} \frac{2ab}{b^2-a^2}, \quad -\frac{qa(1-\mu^2)}{E} \left(\frac{b-a}{b+a} + \frac{\mu}{1-\mu} \right).$$

4-3 设有刚体, 具有半径为 b 的圆柱形孔道, 孔道内放置外半径为 b 而内半径为 a 的圆筒, 受内压力 q , 试求筒壁的应力。

$$\text{答案: } \sigma_\varphi = \frac{\frac{1-2\mu}{\rho^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1-2\mu}{a^2} + \frac{1}{b^2}} q, \quad \sigma_\rho = -\frac{\frac{1-2\mu}{\rho^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1-2\mu}{a^2} + \frac{1}{b^2}} q.$$

4-4 矩形薄板受纯剪, 剪力的集度为 q , 图 4-17. 如果离板边较远处有一小圆孔, 试求孔边的最大和最小的正应力。

答案: 最大 $4q$, 最小 $-4q$

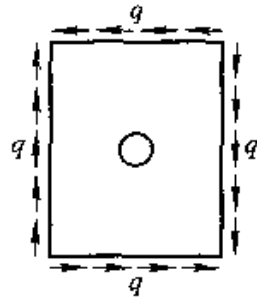


图 4-17

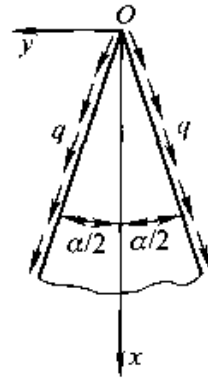


图 4-18

4-5 楔形体在两侧面上受有均布剪力 q , 图 4-18, 试求应力分量
提示: 用表达式(4-24), 并注意问题的对称性。

$$\text{答案: } \sigma_r = -q \left(\frac{\cos 2\varphi}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right),$$

$$\sigma_\varphi = q \left(\frac{\cos 2\varphi}{\sin \alpha} - \cot \alpha \right),$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = q \frac{\sin 2\varphi}{\sin \alpha}.$$

4-6 三角形悬臂梁在自由端受集中荷载 F , 图 4-19, 试由公式(4-21)求任一铅直截面上的正应力和切应力, 并与材料力学中的结果对比。

$$\text{答案: } \sigma_r = -\frac{2F}{\alpha - \sin \alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{2F}{\alpha - \sin \alpha} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

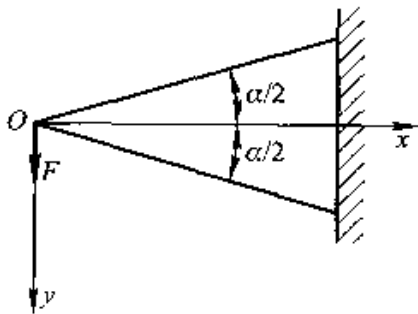


图 4-19

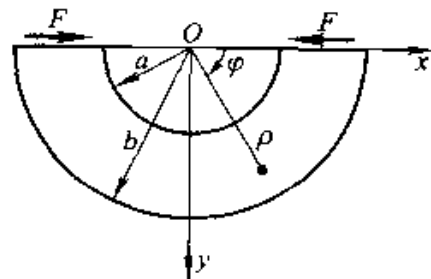


图 4-20

4-7 曲梁在两端受相反的两个力 F , 图 4-20, 试求应力分量。

提示: 试假设弯应力 σ_φ 与 $\sin \varphi$ 成正比, 而切应力 $\tau_{r\varphi}$ 与 $\cos \varphi$ 成正比(因为径向截面上的弯矩与 $\sin \varphi$ 成正比, 而剪力与 $\cos \varphi$ 成正比)。

$$\text{答案: } \sigma_\varphi = F \sin \varphi \frac{3\rho - \frac{a^2 + b^2}{\rho} - \frac{a^2 b^2}{\rho^3}}{(a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} + a^2 - b^2}.$$

4-8 设有无限大的薄板, 在板内的小孔中受集中力 F , 图 4-21, 试用如下的应力函数求解:

$$\Phi = A\rho \ln \rho \cos \varphi + B\rho\varphi \sin \varphi.$$

提示：需要考虑位移的单值条件。

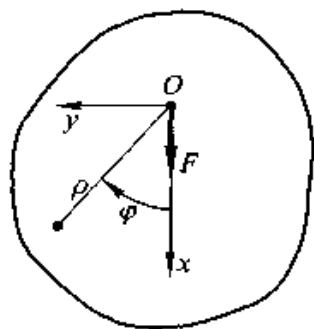


图 4-21

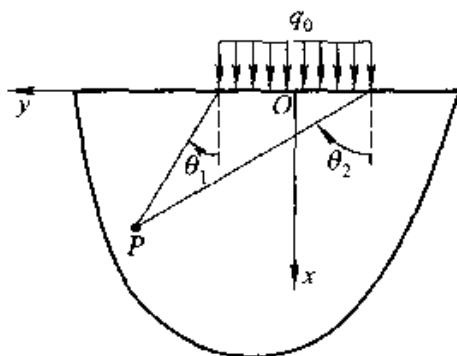


图 4-22

答案： $\sigma_r = -\frac{(3+\mu)F}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{\rho}$, $\sigma_\varphi = \frac{(1-\mu)F}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{\rho}$, $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = \frac{(1-\mu)F}{4\pi} \frac{\sin \varphi}{\rho}$ 。

4-9 半平面体在其一段边界上受均布法向荷载 q_0 ，图 4-22，试证半平面体中的直角坐标应力分量为

$$\sigma_x = -\frac{q_0}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) + (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)],$$

$$\sigma_y = -\frac{q_0}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) - (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)],$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{q_0}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)$$

参 考 教 材

- [1] 铁木辛柯，古迪尔著，弹性理论[M]，徐芝纶译，北京：高等教育出版社，1990：第四章。

第五章 平面问题的复变函数解答

§ 5-1 应力函数的复变函数表示

在第二章中已经证明，在平面问题里，如果体力是常量，就一定存在一个应力函数 U ，它是位置坐标的重调和函数，即 $\nabla^4 U = 0$ （在本章中，应力函数改用字母 U 表示，因为字母 Φ 另有别用）。

现在，引用复变数及其共轭复变数 $z = x + iy$ 和 $\bar{z} = x - iy$ 以代替实变数 x 和 y 。注意

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -i,$$

可以得到变换式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) U, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) U, \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} = 2 \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (5-2)$$

由(5-1)式，又可以进而得到变换式

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 U, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = - \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 U, \quad (5-3)$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (5-4)$$

于是可将相容方程 $\nabla^4 U = 0$ 变换成为 $16 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0$ ，即

$$\frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0. \quad (a)$$

将式(a)对 z 及 \bar{z} 各积分两次，得到

$$U = f_1(z) + \bar{z} f_2(z) + f_3(\bar{z}) + z f_4(\bar{z}), \quad (b)$$

其中 f_1 、 f_2 、 f_3 、 f_4 均表示任意函数。注意式(b)左边的重调和函数 U 是实函数，可见该式右边的四项一定是两两共轭，即

$$f_3(\bar{z}) = \overline{f_1(z)}, \quad f_4(\bar{z}) = \overline{f_2(z)}.$$

于是式(b)可以只用 f_1 及 f_2 表示如下:

$$U = f_1(z) + \bar{z}f_2(z) + \overline{f_1(z)} + z\overline{f_2(z)}.$$

将任意函数 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 分别改写为 $\frac{1}{2}\theta_1(z)$ 及 $\frac{1}{2}\varphi_1(z)$, 即得有名的古尔萨公式

$$U = \frac{1}{2}[\bar{z}\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1(z)} + \theta_1(z) + \overline{\theta_1(z)}]. \quad (5-5)$$

它也可以再改写为

$$U = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_1(z) + \theta_1(z)]. \quad (5-6)$$

其中 Re 表示取复变函数的实部。

于是可见, 在常量体力的平面问题中, 应力函数 U 总可以用复变数 z 的两个解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 来表示。

§ 5-2 应力和位移的复变函数表示

首先把应力分量用复变函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 来表示。

假定不计体力, 于是有

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \quad (5-7)$$

因为由(5-4)式可得

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}$$

所以由(5-5)式可得

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}] = 4\operatorname{Re}\varphi_1'(z). \quad (5-8)$$

又因为

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 U,$$

并由(5-2)式可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

所以由(5-5)式可得

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \theta_1''(z)]. \quad (a)$$

在以后, 函数 $\theta_1(z)$ 本身并无用处, 有用的只是它的导数, 因此, 引用另一个解析函数 $\psi_1(z) = \theta_1'(z)$, 而将式(a)改写成为

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = 2[z\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)], \quad (5-9)$$

显然, $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$ 具有同样的量纲 MT^{-2} 。

公式(5-8)及(5-9)就是应力分量的复变函数表示。只要已知 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$, 就可以把公式(5-9)右边的虚部和实部分开, 由虚部得出 τ_{xy} , 由实部得出 $\sigma_x - \sigma_y$ 。根据这样得来的 $\sigma_x - \sigma_y$ 和公式(5-8)给出的 $\sigma_x + \sigma_y$, 极易求得 σ_x 和 σ_y 。当然也可以建立公式, 把 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 三者分开用 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 来表示, 但那些公式将比较冗长, 用起来很不方便。

现在把位移分量用复变函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 来表示。假定这里讲的是平面应力问题。由几何方程(2-9)及物理方程(2-15)有

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \mu\sigma_y = (\sigma_x + \sigma_y) - (1 + \mu)\sigma_y, \quad (b)$$

$$E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \mu\sigma_x = (\sigma_x + \sigma_y) - (1 + \mu)\sigma_x, \quad (c)$$

$$\frac{E}{2(1 + \mu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \tau_{xy}. \quad (d)$$

在式(b)中应用公式(5-8), 并应用(5-7)中的第二式, 然后再应用(5-1)中的第一式, 得到

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= 2[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}] - (1 + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x} [\varphi_1(z) + \overline{\varphi_1(z)}] - (1 + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (e)$$

在式(c)中应用公式(5-8), 并应用(5-7)中的第一式, 然后再应用(5-1)中的第二式, 得到

$$\begin{aligned} E \frac{\partial v}{\partial y} &= 2[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}] - (1 + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ &= -2i \frac{\partial}{\partial y} [\varphi_1(z) - \overline{\varphi_1(z)}] - (1 + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (f)$$

将式(e)及式(f)分别对 x 及 y 积分, 得

$$\left. \begin{aligned} Eu &= 2[\varphi_1(z) + \overline{\varphi_1(z)}] - (1 + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} + f_1(y), \\ Ev &= -2i[\varphi_1(z) - \overline{\varphi_1(z)}] - (1 + \mu) \frac{\partial U}{\partial y} + f_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

其中的 f_1 及 f_2 为任意函数。将式(g)代入式(d), 应用(5-7)中的第三式, 再应用公式(5-1), 将得到

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx}.$$

于是可以和 § 2-4 中同样地得到刚体位移

$$f_1(y) = u_0 - \omega y, \quad f_2(x) = v_0 + \omega x,$$

不计刚体位移, 即由式 (g) 得到

$$E(u + iv) = 4\varphi_1(z) - (1 + \mu) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (\text{h})$$

但由 (5-2) 中的第一式及公式 (5-5) 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} &= 2 \frac{\partial U}{\partial z} = \varphi_1(z) + z \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\theta_1'(z)} \\ &= \varphi_1(z) + z \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}. \end{aligned} \quad (\text{i})$$

代入式 (h), 即得

$$E(u + iv) = (3 - \mu)\varphi_1(z) - (1 + \mu)[z \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}],$$

或将两边除以 $1 + \mu$ 而得

$$\frac{E}{1 + \mu}(u + iv) = \frac{3 - \mu}{1 + \mu}\varphi_1(z) - z \overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)}. \quad (5-10)$$

这就是位移分量的复变函数表示。如果已知 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$, 就可以将该式右边的实部和虚部分开, 从而得出 u 和 v 。

公式 (5-10) 是针对平面应力情况导出的。对于平面应变情况, 须将该式中的 E 改换为 $\frac{E}{1 - \mu^2}$, μ 改换为 $\frac{\mu}{1 - \mu}$ 。

公式 (5-8)、(5-9) 及 (5-10) 是克洛索夫首先导出的。

§ 5-3 各个复变函数确定的程度

现在来考察, 当弹性体中的应力或位移已经确定时, 各个复变函数是否完全确定, 或者还具有任意性, 任意的程度如何。

当应力确定时, 按照公式 (5-8) 和 (5-9), 函数 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$ 应当满足下列条件:

$$4\text{Re}\varphi_1'(z) = \sigma_x + \sigma_y, \quad (\text{a})$$

$$2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] = \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}. \quad (\text{b})$$

假定另外两个复变函数 $\varphi_2(z)$ 和 $\psi_2(z)$ 也给出同样的应力, 那么, 它们也应当满足同样的条件, 也就是

$$4\text{Re}\varphi_2'(z) = \sigma_x + \sigma_y, \quad (\text{c})$$

$$2[\bar{z}\varphi_2''(z) + \psi_2'(z)] = \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}. \quad (\text{d})$$

现在来考察, 函数 φ_2 及 ψ_2 分别与 φ_1 及 ψ_1 有什么差别。

将式 (c) 与式 (a) 对比, 可见 $\varphi_2'(z)$ 与 $\varphi_1'(z)$ 具有相同的实部, 所以它们之

间只可能相差一个任意虚常数，也就是

$$\varphi_2'(z) = \varphi_1'(z) + iC, \quad (e)$$

其中 C 为任意实常数。将式(e)两边对 z 积分后，得

$$\varphi_2(z) = \varphi_1(z) + iCz + \gamma, \quad (f)$$

其中 $\gamma = A + iB$ 为任意复常数(以后凡大写字母均表示实常数,小写字母表示复常数)。

另一方面,因为由式(e)有 $\varphi_2''(z) = \varphi_1''(z)$, 所以,将式(b)与式(d)对比,可见

$$\psi_2'(z) = \psi_1'(z), \quad (g)$$

积分以后,得

$$\psi_2(z) = \psi_1(z) + \gamma', \quad (h)$$

其中 $\gamma' = A' + iB'$ 为任意复常数。

于是可见,将

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &\text{ 代以 } \varphi_1(z) + iCz + \gamma, \\ \psi_1(z) &\text{ 代以 } \psi_1(z) + \gamma'. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

应力保持不变。因此,在不改变应力状态的条件下,可以任意选择 C 、 γ 、 γ' 。

当位移确定时,应力是完全确定的,而当应力有所改变时,位移必然有改变。因此,为了位移保持不变,决不容许有(i)型以外的代换。现在来进一步考察,(i)型的代换如何才不致改变位移。在平面应力情况下,位移分量的复变函数表示是(5-10),即

$$\frac{E}{1+\mu}(u+iv) = \frac{3-\mu}{1+\mu}\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)}.$$

在这公式中进行(i)型的代换以后,可见该公式成为

$$\frac{E}{1+\mu}(u+iv) = \frac{3-\mu}{1+\mu}\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} + \frac{4}{1+\mu}iCz + \left(\frac{3-\mu}{1+\mu}\gamma - \overline{\gamma'}\right). \quad (j)$$

这就说明,必须

$$C=0, \quad \frac{3-\mu}{1+\mu}\gamma - \overline{\gamma'}=0, \quad (k)$$

(i)型的代换才不致改变位移。这也就是说,在不改变位移的条件下,只能将

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &\text{ 代以 } \varphi_1(z) + \gamma, \\ \psi_1(z) &\text{ 代以 } \psi_1(z) + \frac{3-\mu}{1+\mu}\overline{\gamma}, \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

其中 γ 是可以任意选取的复常数。对于平面形变问题,式(l)中的 μ 须改为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

§ 5-4 边界条件的复变函数表示

在 § 2-5 中, 已经导出平面问题的应力边界条件

$$l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s = \bar{f}_x, \quad m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s = \bar{f}_y,$$

将(5-7)式代入, 得到

$$\left. \begin{aligned} l\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_s - m\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_s &= \bar{f}_x, \\ m\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_s - l\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_s &= \bar{f}_y. \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

设图 5-1 中的曲线 AB 代表任一段边界, 而 s 是从边界上 A 点沿边界量取到 B 点的弧长 (量取时使边界的外法线 N 指向右方), 则由几何关系有

$$l = \cos(N, x) = \cos \alpha = \frac{dy}{ds},$$

$$m = \cos(N, y) = \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}.$$

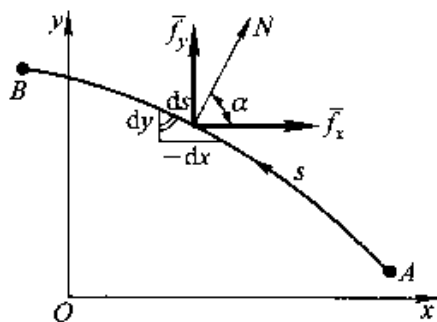


图 5-1

因此, 式(a)可以改写成为

$$\frac{dy}{ds}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_s + \frac{dx}{ds}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_s = \bar{f}_x,$$

$$-\frac{dx}{ds}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_s - \frac{dy}{ds}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_s = \bar{f}_y.$$

也就是

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_s = \bar{f}_x, \quad -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_s = \bar{f}_y.$$

于是得面力矢量的复数表达式

$$\bar{f}_x + i\bar{f}_y = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_s - i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_s = -i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right)_s.$$

将 § 5-2 中曾经得出的式(i)代入, 即得

$$-i\frac{d}{ds}[\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}] = \bar{f}_x + i\bar{f}_y.$$

再将左右两边同乘以 ids , 进行积分, 从 A 点到 B 点, 即得

$$[\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}]_A^B = i\int_A^B (\bar{f}_x + i\bar{f}_y) ds. \quad (5-11)$$

也就是

$$\begin{aligned} & [\varphi_1(z_B) + z_B \overline{\varphi_1'(z_B)} + \overline{\psi_1(z_B)}] - [\varphi_1(z_A) + z_A \overline{\varphi_1'(z_A)} + \overline{\psi_1(z_A)}] \\ &= i \int_A^B (\bar{f}_x + i \bar{f}_y) ds. \end{aligned} \quad (b)$$

现在, 把 A 点当作边界上选定的基点, B 点当作边界上的任意一点, 将 z_B 简写为 z , 并引用记号

$$k = \varphi_1(z_A) + z_A \overline{\varphi_1'(z_A)} + \overline{\psi_1(z_A)},$$

则式(b)可以简写为

$$[\varphi_1(z) + z \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}] - k = i \int_A^B (\bar{f}_x + i \bar{f}_y) ds. \quad (c)$$

在 §5-3 中已经说明, 在函数 $\varphi_1(z)$ 中, 可以任意增加一个复常数 γ 而不致影响应力或位移。现在, 我们假想在函数 $\varphi_1(z)$ 中增加一个复常数 γ , 使 $\varphi_1(z)$ 成为 $\varphi_1(z) + \gamma$ 。这时, $\varphi_1'(z)$ 保持不变, 而 $\psi_1(z)$ 则成为 $\psi_1(z) + \frac{3-\mu}{1+\mu} \bar{\gamma}$ 。于是我们总可以选择 γ , 使式(c)中的复常数 k 被抵消, 而式(c)就可以进一步简写为

$$[\varphi_1(z) + z \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}] = i \int (\bar{f}_x + i \bar{f}_y) ds. \quad (5-12)$$

这就是应力边界条件的复变函数表示, 它指出: 复变函数 $\varphi_1(z) + z \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}$ 在边界 s 上任意一点 z 的值, 就等于基点与该点之间的面力主矢量乘以 i 。

位移边界条件如(2-17)所示, 即

$$u_s = \bar{u}, \quad v_s = \bar{v}, \quad (d)$$

其中 \bar{u} 及 \bar{v} 为边界上的已知位移分量。代入公式(5-10), 即得平面应力情况下位移边界条件的复变函数表示:

$$\left[\frac{3-\mu}{1+\mu} \varphi_1(z) - z \overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} \right] = \frac{E}{1+\mu} (\bar{u} + i \bar{v}). \quad (5-13)$$

对于平面应变的情况, 须将式中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

§5-5 多连体中应力和位移的单值条件

在多连体中, 解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 可能表现为多值的(尽管它们在单连体中是单值的)。现在来考察, 如何选择这些复变函数, 才能保证应力和位移的单值条件。在一般情况下, 多连体可能具有 m 个内边界 $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_m$ 和一个外边界 s_{m+1} , 图 5-2。但是, 为简单起见, 我们先来考虑仅有一个内边界

s_k 和一个外边界 s_{m+1} 的情形。

因为应力分量必须是单值的，而应力分量与复变函数 $\varphi_1(z)$ 之间有关系式 (5-8)，即

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\varphi_1'(z), \quad (a)$$

所以 $\varphi_1'(z)$ 的实部，即 $\operatorname{Re}\varphi_1'(z)$ ，必须是单值的。但是，它的虚部却可以是多值的。因此，在环绕内边界 s_k 绕行一周后， $\varphi_1'(z)$ 可能有一个虚常数增量。为了方便，命这个虚常数增量为 $2\pi A_k i$ ，其中 A_k 是实常数。

在通常用到的复变函数中间，环绕 s_k 一周而具有一个虚常数增量的最简单的函数是 $\ln(z - z_k)$ ，其中 z_k 是边界 s_k 之外的任意一点，图 5-2。注意

$$A_k \ln(z - z_k) = A_k \ln(|z - z_k| e^{i\theta}) = A_k \ln|z - z_k| + A_k i\theta,$$

可见，环绕 s_k 一周后，式中右边的第二项将有增量 $2\pi i A_k$ 。因此，命

$$\varphi_1'(z) = A_k \ln(z - z_k) + \varphi_{1*}'(z), \quad (b)$$

则 $\varphi_{1*}'(z)$ 是在多连体中为单值的解析函数。

将式(b)对 z 积分，得

$$\varphi_1(z) = A_k [(z - z_k) \ln(z - z_k) - (z - z_k)] + \int_{z_0}^z \varphi_{1*}'(z) dz + \text{常数}, \quad (c)$$

其中 z_0 为弹性体之内的任选定点，图 5-2。积分式 $\int_{z_0}^z \varphi_{1*}'(z) dz$ 也是复变数 z 的解析函数，但当绕行 s_k 一周后，它可能有一个增量 $2\pi i c_k$ ，其中 c_k 一般为复数，因子 $2\pi i$ 是为了方便而引用的。于是，与上相似，可以写出

$$\int_{z_0}^z \varphi_{1*}'(z) dz = c_k \ln(z - z_k) + \text{单值解析函数}.$$

代入式(c)，并将 $-A_k z_k \ln(z - z_k)$ 与 $c_k \ln(z - z_k)$ 合并而写成 $\gamma_k \ln(z - z_k)$ ，并注意 $A_k(z - z_k)$ 是单值解析函数，即得

$$\varphi_1(z) = A_k z \ln(z - z_k) + \gamma_k \ln(z - z_k) + \varphi_{1*}(z), \quad (d)$$

其中 $\varphi_{1*}(z)$ 是在多连体中为单值的解析函数，而 γ_k 为常数(一般为复数)。

根据公式(5-9)，即

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)],$$

可以对函数 $\psi_1(z)$ 分析如下：因为式(b)中的 $\varphi_{1*}'(z)$ 是在多连体中为单值解析的，所以它对 z 的导数也必然是单值解析的；因为 $\ln(z - z_k)$ 对 z 的导数，即

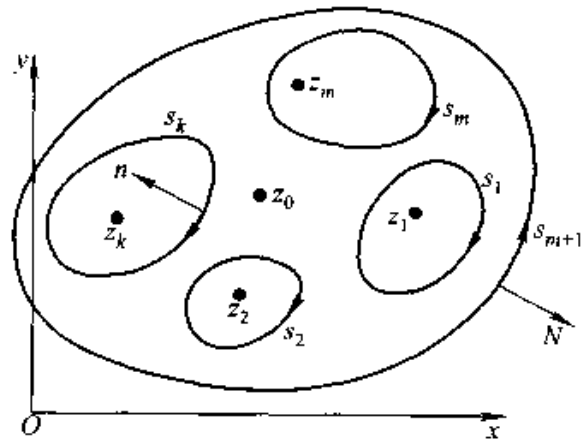


图 5-2

$\frac{1}{z-z_k}$, 也是在多连体中为单值解析的(z_k 不在弹性体之内), 所以 $\varphi'_1(z)$ 对 z 的导数, 即 $\varphi''_1(z)$, 也必然是单值解析的。于是由上式可见, 函数 $\psi'_1(z)$ 也是在多连体中为单值解析的。现在, 对于 $\psi_1(z)$, 和上面对于 $\varphi_{1*}(z)$ 一样, 可以得出

$$\psi_1(z) = \gamma'_k \ln(z-z_k) + \psi_{1*}(z), \quad (e)$$

其中 γ'_k 为常数(一般为复数), 而 $\psi_{1*}(z)$ 是在多连体中为单值的解析函数。

现在来进一步考察位移单值条件对 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$ 的要求。位移分量的复变函数表示, 在平面应力的情况下, 如公式(5-10)所示, 即

$$\frac{E}{1+\mu}(u+iv) = \frac{3-\mu}{1+\mu}\varphi_1(z) - z\overline{\varphi'_1(z)} - \overline{\psi_1(z)}$$

将(b)、(d)、(e)三式代入, 可以看出, 在绕行 s_k 一周后, 表达式 $\frac{E}{1+\mu}(u+iv)$ 将得到增量

$$2\pi i \left[\left(\frac{3-\mu}{1+\mu} + 1 \right) A_k z + \frac{3-\mu}{1+\mu} \gamma_k + \overline{\gamma'_k} \right].$$

可见, 位移的单值条件要求

$$A_k = 0, \quad \frac{3-\mu}{1+\mu} \gamma_k + \overline{\gamma'_k} = 0. \quad (f)$$

现在来说明, 常数 γ_k 及 γ'_k 可以用内边界 s_k 上的面力来表示。为此, 把公式(5-11)应用于绕整个内边界 s_k 一周(B 点与 A 点重合)。这样得到

$$[\varphi_1(z) + z\overline{\varphi'_1(z)} + \overline{\psi_1(z)}]_{s_k} = i(\overline{F}_{xk} + i\overline{F}_{yk}), \quad (g)$$

其中 $\overline{F}_{xk} + i\overline{F}_{yk}$ 是整个内边界 s_k 上的面力主矢量。注意, 绕行的方向必须是顺时针转向, 因为, 按照图 5-2, 绕行时必须使向外法线 N 指向右方。将(d)、(b)、(e)三式代入式(g), 注意式(f)中的 $A_k = 0$, 得

$$-2\pi i(\gamma_k - \overline{\gamma'_k}) = i(\overline{F}_{xk} + i\overline{F}_{yk}). \quad (h)$$

由式(f)及式(h)求解各个常数, 即得

$$A_k = 0, \quad \gamma_k = -\frac{1+\mu}{8\pi}(\overline{F}_{xk} + i\overline{F}_{yk}), \quad \gamma'_k = \frac{3-\mu}{8\pi}(\overline{F}_{xk} - i\overline{F}_{yk}).$$

代入式(d)及式(e), 即得

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{1+\mu}{8\pi}(\overline{F}_{xk} + i\overline{F}_{yk}) \ln(z-z_k) + \varphi_{1*}(z), \\ \psi_1(z) &= \frac{3-\mu}{8\pi}(\overline{F}_{xk} - i\overline{F}_{yk}) \ln(z-z_k) + \psi_{1*}(z). \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

对于具有 m 个内边界和一个外边界的一般多连体, 图 5-2, 可以将上面的论证推广而得到一般的表达式

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{1+\mu}{8\pi} \sum_{k=1}^m (\bar{F}_{xk} + i\bar{F}_{yk}) \ln(z - z_k) + \varphi_{1*}(z), \\ \psi_1(z) &= \frac{3-\mu}{8\pi} \sum_{k=1}^m (\bar{F}_{xk} - i\bar{F}_{yk}) \ln(z - z_k) + \psi_{1*}(z) \end{aligned} \right\} \quad (5-14)$$

总结起来, 为了保证多连体中应力和位移的单值性, 复变函数 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$ 必须如公式(5-14)所示, 其中 $\varphi_{1*}(z)$ 及 $\psi_{1*}(z)$ 是在该多连体中为单值的解析函数。

§ 5-6 无限大多连体的情形

在前一节所讨论的多连体中, 图 5-2, 命外边界 s_{n+1} 趋于无限远, 则该多连体成为无限大的多连体(例如带孔洞的无限大薄板)。这时, 我们还必须考察函数 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$ 在无限远处的性质。

以坐标原点为圆心, 作半径为 R 的大圆周 s_R , 将所有的内边界 s_1 到 s_m 包围在其内, 则对于 s_R 之外、弹性体之内的任意一点 z 显然有 $|z| > |z_k|$, 于是可将 $\ln(z - z_k)$ 展开如下:

$$\begin{aligned} \ln(z - z_k) &= \ln z + \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right) \\ &= \ln z - \frac{z_k}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{z_k}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z_k}{z}\right)^3 - \dots \\ &= \ln z + \text{在 } s_R \text{ 之外为解析的复变函数。} \end{aligned}$$

这样, 公式(5-14)就可以写成

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_x + i\bar{F}_y) \ln z + \varphi_{1*}(z), \\ \psi_1(z) &= \frac{3-\mu}{8\pi} (\bar{F}_x - i\bar{F}_y) \ln z + \psi_{1*}(z), \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中 $\bar{F}_x = \sum_{k=1}^m \bar{F}_{xk}$ 及 $\bar{F}_y = \sum_{k=1}^m \bar{F}_{yk}$ 为 m 个内边界上沿 x 及 y 方向的面力之和, $\varphi_{1*}(z)$ 及 $\psi_{1*}(z)$ 是在 s_R 之外为解析的复变函数(但在无限远处可能是非解析的), 它们可以在 s_R 之外展为罗朗级数:

$$\varphi_{1*}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi_{1*}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (b)$$

应力分量的复变函数表示如公式(5-8)及(5-9)所示, 即

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}] \quad (c)$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] \quad (d)$$

将(a)中的第一式代入式(c), 然后再将(b)中的第一式代入, 得

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \left[-\frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_x + i\bar{F}_y) \frac{1}{z} - \frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_x - i\bar{F}_y) \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} n (a_n z^{n-1} + \overline{a_n z^{n-1}}) \right]$$

在此式的右边, 可能随 $|z|$ 无限增大的项只是

$$\sum_{n=2}^{\infty} n (a_n z^{n-1} + \overline{a_n z^{n-1}})$$

由此可以看出, 在无限远处, 即当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, 为了应力不致成为无限大, 就必须有

$$a_n = 0, \quad (n \geq 2) \quad (e)$$

假定条件(e)满足, 根据式(d), 同样可以看出: 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, 为了应力不致成为无限大, 还必须有

$$b_n = 0, \quad (n \geq 2) \quad (f)$$

于是, 在应力保持为有限的条件下, 复变函数 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$ 可以写成为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_x + i\bar{F}_y) \ln z + (B + iC)z + \varphi_1^0(z), \\ \psi_1(z) &= \frac{3-\mu}{8\pi} (\bar{F}_x - i\bar{F}_y) \ln z + (B' + iC')z + \psi_1^0(z), \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

其中的 B 、 C 、 B' 、 C' 为实常数。在 s_k 之外, 包括在无限远处, 函数 $\varphi_1^0(z)$ 及 $\psi_1^0(z)$ 是解析函数, 因此, 它们可以展为如下的形式(以下将 a_{-1} 改写为 a_1 , b_{-1} 改写为 b_1 , 等等):

$$\varphi_1^0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \quad \psi_1^0(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

根据§5-3中所述, 在不改变应力状态的条件, 可以取

$$C = 0, \quad a_0 = 0, \quad b_0 = 0.$$

于是式(g)可以简写为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_x + i\bar{F}_y) \ln z + Bz + \varphi_1^0(z), \\ \psi_1(z) &= \frac{3-\mu}{8\pi} (\bar{F}_x - i\bar{F}_y) \ln z + (B' + iC')z + \psi_1^0(z), \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^0(z) &= \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \\ \psi_1^0(z) &= \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

式(5-15)和(5-16)就是复变函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 在 s_k 外的一般形式。

公式(5-15)中的常数 B 和 $B' + iC'$ 有其力学意义, 说明如下。试由该公式求出 $\varphi_1'(z)$ 、 $z\varphi_1''(z)$ 和 $\psi_1'(z)$, 然后命 $z \rightarrow \infty$, 可见有

$$\begin{aligned}\lim \varphi_1'(z) &= \lim \overline{\varphi_1'(z)} = B, \\ \lim z\varphi_1''(z) &= 0, \quad \lim \psi_1'(z) = B' + iC'\end{aligned}$$

于是由式(c)及式(d)可见, 在无限远处, 有

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 4B, \quad \sigma_1 - \sigma_2 + 2i\tau_{xy} = 2(B' + iC') \quad (\text{h})$$

设 σ_1 及 σ_2 为弹性体中的在无限远处的主应力, 而 α 为主应力 σ_1 与 x 轴之间的夹角, 则可应用坐标变换式(4-8)而命 $\varphi = \alpha$, $\tau_{\rho\varphi} = 0$, $\sigma_\rho = \sigma_1$, $\sigma_\varphi = \sigma_2$, 得到

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.\end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned}\sigma_1 + \sigma_2 &= \sigma_\rho + \sigma_\varphi, \\ \sigma_1 - \sigma_2 + 2i\tau_{xy} &= -(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha + i(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha \\ &= -(\sigma_1 - \sigma_2)(\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha) \\ &= -(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2i\alpha}\end{aligned}$$

与式(h)对比, 得到

$$B = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad B' + iC' = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2i\alpha} \quad (5-17)$$

可见, 常数 B 与弹性体中无限远处的两个主应力之和成正比, 常数 $B' + iC'$ 与弹性体中无限远处的两个主应力之差(或最大切应力)成正比。

§ 5-7 保角变换与曲线坐标

为了便于根据各复变函数在弹性体边界上的已知条件来决定这些函数, 我们采用保角变换

$$z = \omega(\zeta),$$

把弹性体在 z 平面上(即 xy 面上)所占的区域变换为 ζ 平面上的区域。这样, 在 ζ 平面上命

$$\zeta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \quad (5-18)$$

则 ρ 和 θ 也就是 ζ 平面上 ζ 点的极坐标(不是 z 点的极坐标)、 ζ 平面上的一个圆周 $\rho = \text{const}$ 和一根径向线 $\theta = \text{const}$ 分别对应于 z 平面上的两根曲线。这两根曲线也就可以用 $\rho = \text{const}$ 和 $\theta = \text{const}$ 来表示, 图 5-3。于是, ρ 和 θ 可以看作是 z 平面上一点的曲线坐标。由于变换的保角性, 这个曲线坐标总是正交曲线坐标, 而且坐标轴 ρ 和 θ 的相对方向与坐标轴 x 和 y 的相对方向相同。

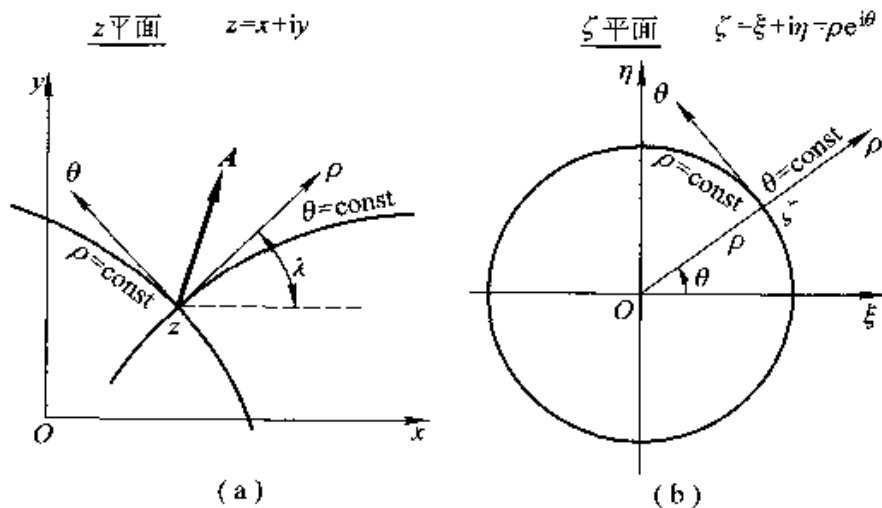


图 5-3

现在, 设 z 平面上有一个矢量 A , 它的起点在 $z = \omega(\zeta) = \omega(\rho e^{i\theta})$ 。用 A_x 及 A_y 分别代表这矢量在 x 及 y 轴上的投影, 用 A_ρ 及 A_θ 分别代表它在曲线坐标 ρ 及 θ 轴上的投影, 图 5-3a。设 ρ 轴与 x 轴成角 λ , 则由几何关系有

$$A_x = A_\rho \cos \lambda - A_\theta \sin \lambda, \quad A_y = A_\rho \sin \lambda + A_\theta \cos \lambda.$$

于是可得

$$\begin{aligned} A_x + iA_y &= (A_\rho \cos \lambda - A_\theta \sin \lambda) + i(A_\rho \sin \lambda + A_\theta \cos \lambda) \\ &= A_\rho (\cos \lambda + i \sin \lambda) + iA_\theta (\cos \lambda + i \sin \lambda) \\ &= (A_\rho + iA_\theta) (\cos \lambda + i \sin \lambda) \\ &= (A_\rho + iA_\theta) e^{i\lambda}, \end{aligned}$$

从而有

$$A_\rho + iA_\theta = (A_x + iA_y) e^{-i\lambda}. \quad (\text{a})$$

为了计算 $e^{-i\lambda}$, 假想沿 ρ 轴方向给 z 点以位移 dz , 因而对应点 ζ 沿径线 ρ 方向得到位移 $d\zeta = d\rho e^{i\theta}$, 于是有

$$\begin{aligned} dz &= |dz| (\cos \lambda + i \sin \lambda) = e^{i\lambda} |dz|, \\ d\zeta &= |d\zeta| (\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} |d\zeta|. \end{aligned}$$

可见

$$\begin{aligned} e^{i\lambda} &= \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta) d\zeta}{|\omega'(\zeta)| \cdot |d\zeta|} = e^{i\theta} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \\ &= \frac{\zeta}{\rho} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}. \end{aligned} \quad (\text{b})$$

取上式两端的共轭复数，即得

$$e^{-i\alpha} = \frac{\overline{\zeta} \overline{\omega'(\zeta)}}{\rho |\omega'(\zeta)|}$$

于是式(a)可以改写为

$$A_\rho + iA_\theta = \frac{\overline{\zeta} \overline{\omega'(\zeta)}}{\rho |\omega'(\zeta)|} (A_r + iA_\tau) \quad (c)$$

现在来对一些重要公式进行变换，把其中 z 的函数变换为 ζ 的函数。为此，引用记号

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi_1(z) = \varphi_1[\omega(\zeta)], \\ \psi(\zeta) &= \psi_1(z) = \psi_1[\omega(\zeta)], \end{aligned} \right\} \quad (5-19)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \varphi'_1(z) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \\ \Psi(\zeta) &= \psi'_1(z) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (5-20)$$

$$\Phi'(\zeta) = \varphi''_1(z) \cdot \omega'(\zeta)$$

这样，关于位移矢量的公式(5-10)就变换为

$$\frac{E}{1+\mu}(u+iv) = \frac{3-\mu}{1+\mu}\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \quad (5-21)$$

命位移矢量在 z 平面 ρ 轴及 θ 轴上的投影分别为 u_ρ 及 u_θ ，则按照式(c)有

$$u_\rho + iu_\theta = \frac{\overline{\zeta} \overline{\omega'(\zeta)}}{\rho |\omega'(\zeta)|} (u+iv) \quad (d)$$

所以(5-21)所示的位移公式又可以变换为

$$\frac{E}{1+\mu}(u_\rho + iu_\theta) = \frac{\overline{\zeta} \overline{\omega'(\zeta)}}{\rho |\omega'(\zeta)|} \left[\frac{3-\mu}{1+\mu}\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \right] \quad (5-22)$$

这是曲线坐标中位移分量的复变函数表示。

现在来变换应力公式。命 σ_ρ 、 σ_θ 、 $\tau_{\rho\theta}$ 为弹性体在 z 平面曲线坐标 ρ 和 θ 中的(一般并不是极坐标中的)应力分量。利用变换式(4-9)，将其中 φ 改为 λ ，即得

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\lambda + \tau_{xy} \sin 2\lambda,$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\lambda - \tau_{xy} \sin 2\lambda,$$

$$\tau_{\rho\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\lambda + \tau_{xy} \cos 2\lambda,$$

从而得出

$$\sigma_\theta + \sigma_\rho = \sigma_x + \sigma_y,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} + 2i\tau_{\rho\theta} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\lambda - 2\tau_{xy} \sin 2\lambda - \\ &\quad i(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\lambda + 2i\tau_{xy} \cos 2\lambda \\ &= (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy})(\cos 2\lambda + i \sin 2\lambda) \\ &= (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy})e^{2i\lambda}.\end{aligned}$$

应用公式(5-8)及(5-9), 上式可以改写成为

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho} &= 2[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}] = 4\operatorname{Re}\varphi_1'(z), \\ \sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} + 2i\tau_{\rho\theta} &= 2[\overline{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)]e^{2i\lambda}.\end{aligned}\right\} \quad (e)$$

按照式(b),

$$e^{2i\lambda} = \frac{\zeta^2 |\omega'(\zeta)|^2}{\rho^2 |\omega'(\zeta)|^2} = \frac{\zeta^2 |\omega'(\zeta)|^2}{\rho^2 \omega'(\zeta) \overline{\omega'(\zeta)}} = \frac{\zeta^2 \overline{\omega'(\zeta)}}{\rho^2 \omega'(\zeta)}. \quad (f)$$

将式(f)代入式(e), 应用公式(5-20), 并注意 $\overline{z} = \overline{\omega(\zeta)}$, 即得

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho} &= 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] = 4\operatorname{Re}\Phi(\zeta), \\ \sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} + 2i\tau_{\rho\theta} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} [\overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi(\zeta)].\end{aligned} \quad (5-23)$$

这是曲线坐标中应力分量的复变函数表示。

§5-8 孔口问题

在各种平面问题中, 孔口问题最能显示复变函数解法的优越性。有些比较复杂的孔口问题, 如果不用这种解法, 几乎就无法求解。从本节开始, 我们来讨论孔口问题的复变函数解法, 但只以无限大弹性体的单孔口问题为限。

对上述问题进行保角变换时, 最简单的是把弹性体在 z 平面上所占的区域, 变换成为 ζ 平面上的所谓“中心单位圆”(它的圆心在坐标原点 $\zeta=0$, 而半径等于1)内部, 孔口边界变换为单位圆周。这种变换函数的最普遍的形式是

$$\begin{aligned}z = \omega(\zeta) &= R \left(\frac{1}{\zeta} + c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \cdots + c_n \zeta^n \right) \\ &= R \left(\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=0}^n c_k \zeta^k \right),\end{aligned} \quad (5-24)$$

其中 n 为正整数, R 为实数, c_k 一般为复数, 而 $\sum_{k=0}^n |c_k| < 1$ 。在大多数的情况下, 级数中只须取很少几项就足够精确。

现在来对表达式(5-15)进行变换。对于该式中的 $\ln z$, 按照变换式(5-24), 可以写成

$$\ln z = \ln \left[\frac{R}{\zeta} (1 + c_0 \zeta + c_1 \zeta^2 + \cdots + c_n \zeta^{n+1}) \right].$$

$$= -\ln \zeta + \ln R + \ln [1 + (c_0 \zeta + c_1 \zeta^2 + \cdots + c_n \zeta^{n+1})]$$

在单位圆之内及圆周上, 我们有 $|\zeta| \leq 1$ 。因为

$$|c_0| + |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_n| < 1,$$

所以

$$|c_0 \zeta + c_1 \zeta^2 + \cdots + c_n \zeta^{n+1}| < 1,$$

于是可以有展式

$$\begin{aligned} \ln [1 + (c_0 \zeta + c_1 \zeta^2 + \cdots + c_n \zeta^{n+1})] \\ = (c_0 \zeta + c_1 \zeta^2 + \cdots) - \frac{1}{2} (c_0 \zeta + c_1 \zeta^2 + \cdots)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

从而有

$\ln z = -\ln \zeta + \zeta$ 的在圆内为单值的解析函数。

根据同样的理由, 对于(5-15)式中 $\varphi_1^0(z)$ 及 $\psi_1^0(z)$ 的各项, 例如 a_1/z 等等, 可以有展式

$$\frac{a_1}{z} = \frac{a_1}{\frac{R}{\zeta} (1 + c_0 \zeta + c_1 \zeta^2 + \cdots)} = \frac{a_1 \zeta}{R} (1 - c_0 \zeta - \cdots)$$

等等, 从而可见, $\varphi_1^0(z)$ 及 $\psi_1^0(z)$ 的所有各项都是 ζ 的在圆内为单值的解析函数。将以上所得的结果代入表达式(5-15), 则该式可以写成

$$\varphi(\zeta) = \frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_1 + i \bar{F}_1) \ln \zeta + B\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \quad (5-25)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{3-\mu}{8\pi} (\bar{F}_1 - i \bar{F}_1) \ln \zeta + (B' + iC')\omega(\zeta) + \psi_0(\zeta). \quad (5-26)$$

其中的

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^k, \quad (5-27)$$

$$\psi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \zeta^k, \quad (5-28)$$

在中心单位圆之内是 ζ 的解析函数, 并且在圆内及圆周上是连续的。式中的常数项已被删去, 因为它们不影响应力。

现在来对边界条件进行变换(假定弹性体的全部边界都是应力边界)。在 § 5-4 中已经看到, 函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 在弹性体的边界上必须满足(5-12), 即

$$[\varphi_1(z) + z \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}]_{,s} = i \int (\bar{f}_1 + i \bar{f}_1) ds_s$$

按照公式(5-19)及(5-20)对上式的左边进行变换, 并注意 $z = \omega(\zeta)$, 得到

$$\left[\varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} \right]_{,s} = i \int (\bar{f}_1 + i \bar{f}_1) ds_s \quad (a)$$

在边界上, $\rho = 1$, 因而 $\zeta = \rho e^{i\theta} = e^{i\theta}$ 。引用记号

$$\sigma = e^{i\theta}, \quad (5-29)$$

则式(a)成为

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = i \int (\bar{f}_x + i \bar{f}_y) ds. \quad (b)$$

另一方面, 取公式(5-25)及(5-26)的边界值, 得

$$\varphi(\sigma) = \frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_x + i \bar{F}_y) \ln \sigma + B\omega(\sigma) + \varphi_0(\sigma), \quad (c)$$

$$\psi(\sigma) = -\frac{3-\mu}{8\pi} (\bar{F}_x - i \bar{F}_y) \ln \sigma + (B' + iC')\omega(\sigma) + \psi_0(\sigma). \quad (d)$$

代入式(b), 并注意 $\bar{\sigma} = e^{-i\theta} = \frac{1}{\sigma}$, 可见函数 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$ 的边界条件可以

写成

$$\begin{aligned} \varphi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'_0(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = & i \int (\bar{f}_x + i \bar{f}_y) ds - \\ & \frac{\bar{F}_x + i \bar{F}_y}{2\pi} \ln \sigma - \frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_x - i \bar{F}_y) \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \sigma - \\ & 2B\omega(\sigma) - (B' - iC') \overline{\omega(\sigma)}. \end{aligned} \quad (e)$$

引用记号

$$\begin{aligned} f_0 = & i \int (\bar{f}_x + i \bar{f}_y) ds - \frac{\bar{F}_x + i \bar{F}_y}{2\pi} \ln \sigma - \frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_x - i \bar{F}_y) \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \sigma - \\ & 2B\omega(\sigma) - (B' - iC') \overline{\omega(\sigma)}, \end{aligned} \quad (5-30)$$

则式(e)所示的边界条件及其共轭式可以简写为

$$\varphi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'_0(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = f_0, \quad (5-31)$$

$$\overline{\varphi_0(\sigma)} + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi'_0(\sigma) + \psi_0(\sigma) = \bar{f}_0. \quad (5-32)$$

当孔口不受面力时, $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$, $\bar{F}_x = \bar{F}_y = 0$, 常数 B 和 $B' - iC'$ 决定于距孔口很远处的应力主向和主应力, 如公式(5-17)所示。当仅是孔口受有面力时, 应力分布是局部性的, 距孔口很远处的应力趋于零, 即 $B = B' = C' = 0$, 而 \bar{F}_x 及 \bar{F}_y 决定于孔口上的已知面力分量 \bar{f}_x 和 \bar{f}_y 。总之, f_0 是 σ 的已知函数。

为了把(5-31)及(5-32)两式转换为决定函数 $\varphi_0(\zeta)$ 及 $\psi_0(\zeta)$ 的条件, 并为了以后的具体运算, 可应用柯西积分公式。这里将介绍两种应用情况: (1) 设函数 $F(\zeta)$ 在单位圆之内是解析的, 而且在圆内及圆周上是连续的(该圆周就用 σ 表示), 那么, 对于圆内的任意一点 ζ 都将有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{F(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} = F(\zeta). \quad (5-33)$$

这就是通常应用于有限大区域的柯西积分公式。(2) 设函数 $F(\zeta)$ 在单位圆之外是解析的, 而且在圆外及圆周上是连续的(该圆周就用 σ 表示), 那么, 对于圆内的任意一点 ζ 都将有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{F(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} = F(\infty). \quad (5-34)$$

这是应用于无限大区域的柯西积分公式, 它的推导见参考教材[3]的第四章。

现在, 将公式(5-31)的两边乘以 $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$, 并沿整个孔边进行积分, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\varphi_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\overline{\psi_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f_0}{\sigma - \zeta} d\sigma, \end{aligned} \quad (f)$$

由公式(5-27)可见, 函数 $\varphi_0(\zeta)$ 在中心单位圆之内是解析的, 而且在圆内和圆周上是连续的, 因此, 按照公式(5-33)有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\varphi_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \varphi_0(\zeta). \quad (g)$$

又由公式(5-28)可见

$$\overline{\psi_0(\sigma)} = \overline{\beta_1 \sigma + \beta_2 \sigma^2 + \dots} = \frac{\overline{\beta_1}}{\sigma} + \frac{\overline{\beta_2}}{\sigma^2} + \dots,$$

而

$$\frac{\overline{\beta_1}}{\zeta} + \frac{\overline{\beta_2}}{\zeta^2} + \dots$$

在中心单位圆之外是解析的, 而且在圆外和圆周上是连续的。因此, 按照公式(5-34)有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\overline{\psi_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \overline{\psi_0(\infty)} = 0. \quad (h)$$

将式(g)和式(h)代入式(f), 得

$$\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f_0 d\sigma}{\sigma - \zeta}. \quad (5-35)$$

对公式(5-32)进行同样的处理, 可以得到

$$\psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi_0'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\overline{f_0} d\sigma}{\sigma - \zeta}. \quad (5-36)$$

对于任何形状的孔口, 只要由复变函数的书籍中查得现成的变换式(5-24), 或者根据复变函数理论建立该变换式, 就可以把那由该变换式得来的 $\omega(\sigma)$ 和公

式(5-27)代入(5-35)式,应用柯西积分公式而得出函数 $\varphi_0(\zeta)$,然后代入(5-36)式,应用柯西积分公式而得出函数 $\psi_0(\zeta)$,再由公式(5-25)和(5-26)求出函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 。将求得的函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 代入(5-20),即可求得函数 $\Phi(\zeta)$ 和 $\Psi(\zeta)$,从而由公式(5-23)求得曲线坐标中的应力分量。

用上述方法求解孔口问题,虽然运算工作可能比较繁复,但有一定的步骤可以遵循,不会遇到原则性的困难。这个方法归功于数学家兼力学家穆斯赫利什维里。自从这个方法建立以后,很多复杂的孔口问题得到了解答。

§5-9 椭圆孔口

设有薄板或长柱,在距离边界较远处有椭圆形孔口,它的长轴和短轴分别为 $2a$ 和 $2b$,图5-4a,试考察该薄板或长柱在各种受力情况下孔口附近的应力分布。

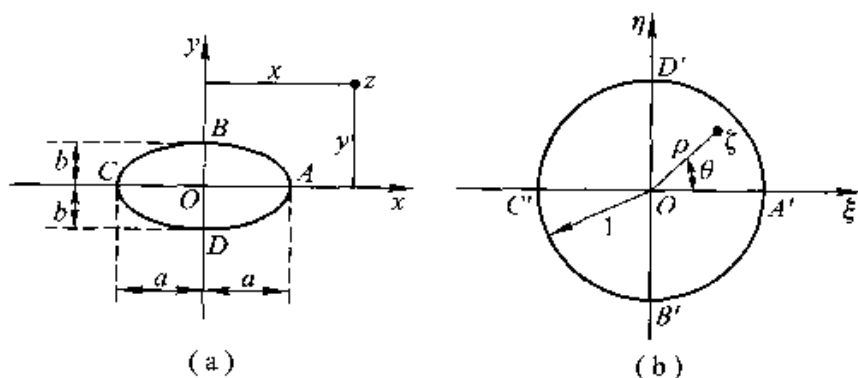


图 5-4

将 x 轴及 y 轴分别放在长轴及短轴方向。为了把薄板的中面或长柱的横截面在 z 平面上所占的区域变换成为 ζ 平面上的中心单位圆,其中 $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$,图5-4b,可采用一般复变函数书籍中都给出的变换式

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right), \quad (a)$$

其中 R 和 m 都是实数,决定于 a 和 b :

$$R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} \quad (b)$$

以 $z = x + iy$ 及 $\zeta = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ 代入式(a)的左右两端,然后分开实部和虚部,得

$$x = R \left(\frac{1}{\rho} + m\rho \right) \cos \theta, \quad y = -R \left(\frac{1}{\rho} - m\rho \right) \sin \theta.$$

依次消去 θ 和 ρ , 得

$$\frac{x^2}{R^2\left(\frac{1}{\rho} + m\rho\right)^2} + \frac{y^2}{R^2\left(\frac{1}{\rho} - m\rho\right)^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{4R^2m\cos^2\theta} - \frac{y^2}{4R^2m\sin^2\theta} = 1.$$

可见, ζ 平面上的圆周 $\rho = \text{const}$ 对应于 z 平面上的中心椭圆, 它的半轴是 $R\left(\frac{1}{\rho} + m\rho\right)$ 和 $R\left(\frac{1}{\rho} - m\rho\right)$; ζ 平面上的径向线 $\theta = \text{const}$ 对应于 z 平面上的中心双曲线, 它和 x 轴的交点的横坐标是 $2R\sqrt{m}\cos\theta$. 这一族椭圆和一族双曲线就是 z 平面上的坐标曲线。特别指出: ζ 平面上的 $\rho = 1$ 的圆周所对应的 z 平面上的椭圆, 它的半轴是 $R(1+m)$ 和 $R(1-m)$, 也就是 a 和 b . 可见, 这个椭圆就是孔口曲线。

注意: 在 ζ 平面上, θ 是以反时针转向为正, 而在 z 平面上, θ 则以顺时针转向为正。因此, 图 5-4b 中的 A' 、 B' 、 C' 、 D' 四点分别对应于 5-4a 中的 A 、 B 、 C 、 D 四点。还须注意: 坐标原点 $\zeta = 0$ 对应于弹性体中距孔口无限远处的各点。

根据式 (a), 并注意 $\rho = 1$, $\zeta = e^{i\theta} = \sigma$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$, 可以导出下列各式:

$$\left. \begin{aligned} \omega(\sigma) &= R\left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma\right), & \overline{\omega(\sigma)} &= R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right), \\ \omega'(\sigma) &= R\left(m - \frac{1}{\sigma^2}\right), & \overline{\omega'(\sigma)} &= R(m - \sigma^2), \\ \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} &= -\frac{1}{\sigma} \frac{m\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - m}, & \overline{\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}} &= \sigma \frac{\sigma^2 + m}{m\sigma^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

于是, 决定函数 $\varphi_0(\zeta)$ 的公式 (5-35) 成为

$$\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left(-\frac{1}{\sigma} \frac{m\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - m} \right) \frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f_0 d\sigma}{\sigma - \zeta}.$$

将由公式 (5-27) 求出的 $\overline{\varphi_0'(\sigma)}$ 代入, 得

$$\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left(-\frac{1}{\sigma} \frac{m\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - m} \right) \left(\bar{\alpha}_1 + 2\frac{\bar{\alpha}_2}{\sigma} + 3\frac{\bar{\alpha}_3}{\sigma^2} + \dots \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f_0 d\sigma}{\sigma - \zeta}.$$

因为函数

$$\left(-\frac{1}{\zeta} \frac{m\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - m} \right) \left(\bar{\alpha}_1 + 2\frac{\bar{\alpha}_2}{\zeta} + 3\frac{\bar{\alpha}_3}{\zeta^2} + \dots \right)$$

在单位圆之外 ($|\zeta| > 1$) 是解析的, 而且在圆外和圆周上是连续的, 所以, 按

照公式(5-34), 上式左边的积分式等于零。于是得

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f_0 d\sigma}{\sigma - \zeta} \quad (d)$$

决定函数 $\psi_0(\zeta)$ 的公式(5-36)则成为

$$\psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \sigma \frac{\sigma^2 + m}{m\sigma^2 - 1} \frac{\varphi_0'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\bar{f}_0 d\sigma}{\sigma - \zeta} \quad (e)$$

因为函数

$$\zeta \frac{\zeta^2 + m}{m\zeta^2 - 1} \varphi_0'(\zeta) = \zeta \frac{\zeta^2 + m}{m\zeta^2 - 1} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \zeta + 3\alpha_3 \zeta^2 + \dots)$$

在单位圆之内 ($|\zeta| < 1$) 是解析的, 而且在圆内和圆周上是连续的, 所以, 按照公式(5-33), 式(e)成为

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\bar{f}_0 d\sigma}{\sigma - \zeta} - \zeta \frac{\zeta^2 + m}{m\zeta^2 - 1} \varphi_0'(\zeta) \quad (f)$$

作为例题, 设薄板或长柱在与 x 轴成 α 角的方向受有均匀拉应力 q , 而孔边不受面力, 图 5-5。这时有

$$\sigma_1 = q, \quad \sigma_2 = 0, \quad \bar{f}_x = \bar{f}_y = 0, \quad \bar{F}_x = \bar{F}_y = 0, \quad (g)$$

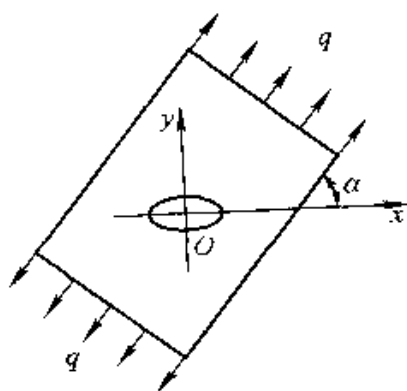


图 5-5

并按公式(5-17)有

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{q}{4}, \\ B' + iC' &= -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2i\alpha} = -\frac{q}{2}e^{-2i\alpha}, \\ B' - iC' &= -\frac{q}{2}e^{2i\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

于是由公式(5-30)得

$$\begin{aligned} f_0 &= -2B\omega(\sigma) - (B' - iC')\overline{\omega(\sigma)} \\ &= -\frac{qR}{2}\left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma\right) + \frac{qR}{2}\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right)e^{2i\alpha} \end{aligned} \quad (i)$$

代入式(d), 并利用公式(5-33)和(5-34), 得

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{qR}{2}(e^{2i\alpha} - m)\zeta \quad (j)$$

将式(i)和式(j)代入式(f), 经过与上相似的运算, 可得

$$\psi_n(\zeta) = -\frac{qR}{2} \left[(1 - me^{-2i\alpha})\zeta + (m - e^{2i\alpha}) \frac{m + \zeta^2}{1 - m\zeta^2} \zeta \right], \quad (k)$$

再将式(j)及式(k)分别代入公式(5-25)及(5-26), 并注意式(g)及式(h), 简化以后, 得

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{qR}{4} \left[\frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha} - m)\zeta \right], \\ \psi(\zeta) &= -\frac{qR}{2} \left[\frac{1}{\zeta} e^{-2i\alpha} + \frac{\zeta^3 e^{2i\alpha} + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)\zeta}{m\zeta^2 - 1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

现在来求应力分量。由式(a)可以求得(注意 $\bar{\zeta} = \frac{\rho^2}{\zeta}$):

$$\begin{aligned} \overline{\omega(\zeta)} &= R \left(\frac{\zeta}{\rho^2} + m \frac{\rho^2}{\zeta} \right), \\ \omega'(\zeta) &= R \left(m - \frac{1}{\zeta^2} \right), \\ \overline{\omega'(\zeta)} &= R \left(m - \frac{\zeta^2}{\rho^4} \right). \end{aligned}$$

由式(1)可以求得:

$$\begin{aligned} \varphi'(\zeta) &= \frac{qR}{4} \left[(2e^{2i\alpha} - m) - \frac{1}{\zeta^2} \right], \\ \psi'(\zeta) &= -\frac{qR}{2} \left[-\frac{e^{-2i\alpha}}{\zeta^2} + \frac{3e^{2i\alpha}\zeta^2 + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)}{m\zeta^2 - 1} - \frac{\zeta^3 e^{2i\alpha} + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)\zeta}{(m\zeta^2 - 1)^2} 2m\zeta \right]. \end{aligned}$$

于是可以根据公式(5-20)求得

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{q}{4} \frac{(2e^{2i\alpha} - m)\zeta^2 - 1}{m\zeta^2 - 1}, \\ \Psi(\zeta) &= \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = -\frac{q}{2} \left[-\frac{e^{-2i\alpha}}{m\zeta^2 - 1} + \frac{3e^{2i\alpha}\zeta^2 + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)}{(m\zeta^2 - 1)^2} \zeta^2 - \frac{\zeta^3 e^{2i\alpha} + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)\zeta}{(m\zeta^2 - 1)^3} 2m\zeta \cdot \zeta^2 \right], \end{aligned}$$

并从而求得

$$\Phi'(\zeta) = \frac{q}{4} \left[\frac{(2e^{2i\alpha} - m)2\zeta}{m\zeta^2 - 1} - \frac{(2e^{2i\alpha} - m)\zeta^2 - 1}{(m\zeta^2 - 1)^2} 2m\zeta \right],$$

将以上各式代入公式(5-23), 简化以后, 得应力分量的复变数表达式:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_\rho + \sigma_\theta &= q \operatorname{Re} \frac{(2e^{2i\alpha} - m)\zeta^2 - 1}{m\zeta^2 - 1}, \\
 \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} &= \frac{q(m\rho^4 + \zeta^2)\zeta^2}{\rho^4 \left(m - \frac{\zeta^2}{\rho^4}\right)(m\zeta^2 - 1)} \left[2e^{2i\alpha} - m + \right. \\
 &\quad \left. m \frac{1 + m\zeta^2 - 2e^{2i\alpha}\zeta^2}{m\zeta^2 - 1} \right] + \frac{q}{\rho^2 \left(m - \frac{\zeta^2}{\rho^4}\right)} \left[e^{-2i\alpha} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{3e^{2i\alpha}\zeta^2 + me^{2i\alpha} - m^2 - 1}{m\zeta^2 - 1} \zeta^2 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{e^{2i\alpha}\zeta^2 + me^{2i\alpha} - m^2 - 1}{(m\zeta^2 - 1)^2} 2m\zeta^4 \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

将 $\zeta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ 代入上列二式, 分开实部和虚部后, 即可得出 σ_ρ 、 σ_θ 和 $\tau_{\rho\theta}$ 的表达式。具体的运算可参考文献[1]。

孔边应力是最重要的应力。在孔边, $\sigma_\rho = 0$, $\zeta = \sigma$, 故由(m)中的第一式得

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta &= q \operatorname{Re} \frac{(2e^{2i\alpha} - m)\sigma^2 - 1}{m\sigma^2 - 1} \\
 &= q \operatorname{Re} \frac{[2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) - m](\cos 2\theta + i \sin 2\theta) - 1}{m(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) - 1} \\
 &= q \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\alpha - 2 \cos 2(\theta + \alpha)}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}.
 \end{aligned} \quad (n)$$

当 $\alpha = 0$ 时(拉力 q 平行于 x 轴), 由式(n)得出孔边应力为

$$\sigma_\theta = q \frac{1 - m^2 + 2m - 2 \cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}.$$

最大正应力是

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\max} &= (\sigma_\theta)_{\theta = \frac{\pi}{2}} = q \frac{3 + 2m - m^2}{1 + 2m + m^2} = q \frac{3 - m}{1 + m} \\
 &= q \frac{3 - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a-b}{a+b}} = q \left(1 + \frac{2b}{a} \right),
 \end{aligned}$$

最小正应力是

$$\sigma_{\min} = (\sigma_\theta)_{\theta = 0, \pi} = q \frac{-m^2 + 2m - 1}{1 + m^2 - 2m} = -q.$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时(拉力 q 平行于 y 轴), 孔边应力为

$$\sigma_\theta = q \frac{1 - m^2 - 2m + 2 \cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}.$$

最大正应力是

$$\sigma_{\max} = (\sigma_{\theta})_{\theta=0, \pi} = q \frac{3-2m-m^2}{1-2m+m^2} = q \left(2 \frac{a}{b} + 1 \right),$$

最小正应力是

$$\sigma_{\min} = (\sigma_{\theta})_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = q \frac{-1-2m-m^2}{1+2m+m^2} = -q。$$

作为另一个例题，设孔边受有均匀压力，集度为 q ，图 5-6。这时，面力分量为

$$\bar{f}_x = -q \cos(N, x) = -lq,$$

$$\bar{f}_y = -q \cos(N, y) = -mq,$$

因而面力矢量为

$$\bar{f}_x + i\bar{f}_y = -q(l + im)。$$

于是得

$$(\bar{f}_x + i\bar{f}_y) ds = -q(lds + imds) = -q(dy - idx) = iq(dx + idy) = iqdz。$$

注意： $\bar{F}_x = \bar{F}_y = 0$ （面力为平衡力系），而且 $B = 0$ ， $B' - iC' = 0$ 。因此，公式 (5-30) 所示的 f_0 成为

$$f_0 = i \int (\bar{f}_x + i\bar{f}_y) ds = -q \int dz = -qz = -qR \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right)。$$

因为在边界上有 $\zeta = \sigma$ ，所以上式成为

$$f_0 = -qR \left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma \right)。$$

进行与上相似的运算，可以得出

$$\varphi_0(\zeta) = \varphi(\zeta) = -qRm\zeta,$$

$$\psi_0(\zeta) = \psi(\zeta) = -qR(1+m^2) \frac{\zeta}{1-m\zeta^2},$$

从而得出孔边应力的表达式

$$\sigma_{\theta} = q \frac{1-3m^2+2m\cos 2\theta}{1+m^2-2m\cos 2\theta}, \quad \sigma_{\rho} = -q。$$

最大与最小的正应力为：

$$\sigma_{\max} = (\sigma_{\theta})_{\theta=0, \pi} = q \frac{1+3m}{1-m} = q \left(2 \frac{a}{b} - 1 \right),$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\rho} = -q。$$

本节中的普遍解答，是穆斯赫利什维里在 1919 年发表的。在稍前和稍后，英格立斯、普厄希尔、克洛索夫等人曾发表过一些特殊情况下的解答。

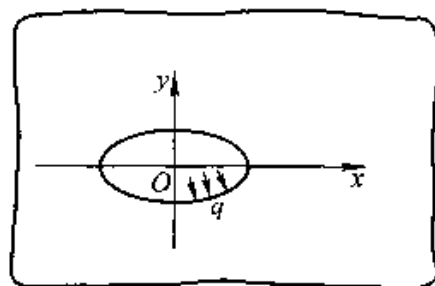


图 5-6

§ 5-10 裂隙附近的应力集中

对于图 5-4a 所示的椭圆形孔口, 如果令 b 趋于零, 则该孔口退化成为 x 方向的、长度为 $2a$ 的裂隙(即贯穿的裂缝), 如图 5-7 中的 AB 所示。在这种情况下, § 5-9 中的式(b)及式(a)分别简化为

$$R = \frac{a}{2}, \quad m = 1, \quad (a)$$

$$z = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right). \quad (b)$$

当具有这种裂隙的薄板或长柱受到单向的均匀拉力 q 时, 图 5-7, 为了得出函数 $\varphi(\zeta)$ 及 $\psi(\zeta)$, 只须将式(a)代入 § 5-9 中的式(1), 这样就得到

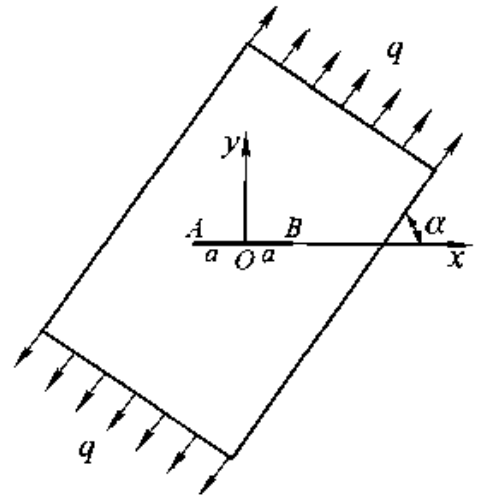


图 5-7

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{qa}{8} \left[\frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha} - 1)\zeta \right], \\ \psi(\zeta) &= -\frac{qa}{4} \left[\frac{1}{\zeta} e^{-2i\alpha} + \frac{\zeta^3 e^{2i\alpha} + (e^{2i\alpha} - 2)\zeta}{\zeta^2 - 1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

当拉力 q 垂直于裂隙时, 图 5-8, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 我们有

$$e^{2i\alpha} = e^{-2i\alpha} = e^{\pm\pi i} = -1.$$

于是式(c)简化为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{qa}{8} \left(\frac{1}{\zeta} - 3\zeta \right), \\ \psi(\zeta) &= \frac{qa}{4} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3 + 3\zeta}{1 - \zeta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

为了便于求得直角坐标中的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} , 宜将式(d)中的 ζ 用 z 来表示。因此, 由式(b)解出 ζ , 得

$$\zeta = \frac{z}{a} \pm \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1}.$$

注意, z 平面上距孔口或裂隙无限远处的那些点, 是和 ζ 平面上单位圆的圆心相对应的。这就是说, 当 $|z|$ 趋于无限大时, $|\zeta|$ 应当趋于零。因此, 在上式中应取负号而不取正号。于是得

$$\zeta = \frac{z}{a} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1} \quad (e)$$

代入式(d), 并应用公式(5-19), 得到

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) = \varphi(\zeta) &= \frac{q}{4} (2\sqrt{z^2 - a^2} - z), \\ \psi_1(z) = \psi(\zeta) &= \frac{q}{2} \left(z - \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

代入公式(5-8)及(5-9), 即得求解 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 的下列方程:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= q \left[2 \operatorname{Re} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right], \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= q \left[\frac{2ia^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} + 1 \right] c \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

在裂隙问题中, 重要的是分析裂隙端点附近的应力分布, 特别是应力随着距裂隙端点的距离而变化的规律, 因此, 引用以裂隙端点 B 为原点的极坐标 (r, θ) , 图 5-8。由图可见有几何关系

$$z = a + r \cos \theta + ir \sin \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

代入(g)中二式的右边, 即可得出用极坐标 r 和 θ 表示 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 的表达式。当然, 这些表达式将是非常冗长的。但是, 由于在裂隙端点 B 的附近, r 远小于 a , 因此可将上述表达式按 r/a 的升幂次展开, 只保留其中随着 r 的减小而增大的所谓主项, 而略去其中的次要项, 即不随 r 变化的常数项以及随着 r 的减小而减小的各项。这样就得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= q \sqrt{\frac{2a}{r}} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= q \sqrt{\frac{2a}{r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{3\theta}{2} + i \cos \frac{3\theta}{2} \right) c \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

从而得出

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= q \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_y &= q \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \tau_{xy} &= q \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} c \end{aligned} \right\} \quad (5-37)$$

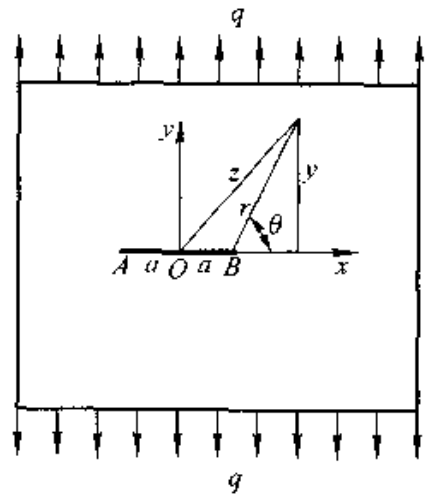


图 5-8

当薄板或长柱在裂隙方向及其垂直方向受有均布剪力 q 时, 图 5-9, 受力情况显然可用这样的情况来代替: 在 $\alpha = \pi/4$ 的方向受均布拉力 q , 并在 $\alpha = -\pi/4$ 的方向受均布压力 q 。于是可以由式(c)得出

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \frac{qa}{8} \left[\frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha} - 1)\zeta \right]_{\alpha=\pi/4} - \\ &\quad \frac{qa}{8} \left[\frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha} - 1)\zeta \right]_{\alpha=-\pi/4} \\ &= \frac{iga}{2} \zeta.\end{aligned}$$

同样可由式(c)得出

$$\psi(\zeta) = \frac{iga}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^3 + \zeta}{1 - \zeta^2} \right).$$

将式(e)代入上列二式, 并应用公式(5-19), 得到

$$\left. \begin{aligned}\varphi_1(z) = \varphi(\zeta) &= \frac{iq}{2} (z - \sqrt{z^2 - a^2}), \\ \psi_1(z) = \psi(\zeta) &= \frac{iq}{2} \left(2\sqrt{z^2 - a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right); \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

代入公式(5-8)及(5-9), 即得求解 σ_y 、 σ_x 、 τ_{xy} 的下列方程:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_y + \sigma_x &= -2q \operatorname{Re} \frac{iz}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= q \frac{ia^2 \bar{z} + iz(2z^2 - 3a^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}}; \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

引用以裂隙端点 B 为原点的极坐标 (r, θ) , 图 5-9, 则将有几何关系

$$\begin{aligned}z &= a + r \cos \theta + ir \sin \theta, \\ \bar{z} &= a + r \cos \theta - ir \sin \theta.\end{aligned}$$

代入式(j)的右边, 然后按 r/a 的升幂次展开, 而只保留其中的主项, 即得

$$\left. \begin{aligned}\sigma_y + \sigma_x &= -q \sqrt{\frac{2a}{r}} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= q \sqrt{\frac{2a}{r}} \left[\sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. i \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

从而得出

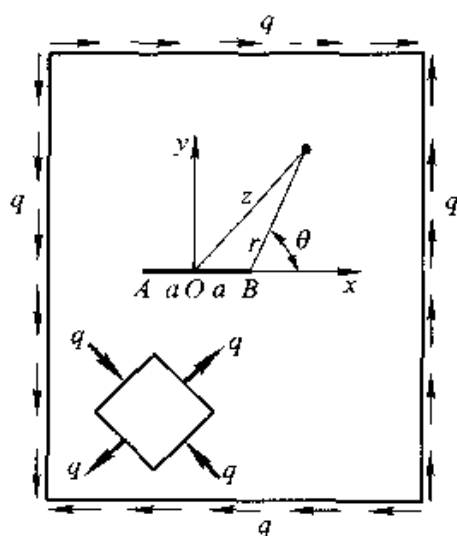


图 5-9

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -q \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_y &= q \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \tau_{xy} &= q \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5-38)$$

如果在(5-37)式或(5-38)式中命 r 趋于零, 则各个应力分量的数值趋于无限大。这就表示, 在裂隙的端点, 应力是无限大的。实际上, 由于在裂隙端点的附近总是出现或大或小的塑性区, 因此就不会发生无限大的应力, 而(5-37)式及(5-38)式只适用于塑性区之外。虽然如此, 在脆性材料的情况下, 以及在塑性区范围很小的情况下, (5-37)式及(5-38)式所示的应力, 可以令人满意地表明裂隙端点附近的应力状态, 因而也就用来作为断裂力学中有关裂隙开展现象的重要资料。

§ 5-11 正方形孔口

为了把 z 平面上的带正方形孔口的无限域变换成为 ζ 平面上的中心单位圆, 可以采用复变函数书籍中给出的变换式

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3 + \frac{1}{56}\zeta^7 - \frac{1}{176}\zeta^{11} + \dots \right). \quad (a)$$

其中 R 为实数, 它反映正方形的大小。

设在式(a)中只取两项, 即, 近似地取

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3 \right), \quad (b)$$

则当 $\rho = 1$ 而 $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} x + iy &= R \left(e^{-i\theta} - \frac{1}{6}e^{3i\theta} \right) \\ &= R \left(\cos \theta - i \sin \theta - \frac{1}{6} \cos 3\theta - \frac{1}{6} i \sin 3\theta \right). \end{aligned}$$

分开实部和虚部, 得到 z 平面上孔边曲线方程的参数表示:

$$x = R \left(\cos \theta - \frac{1}{6} \cos 3\theta \right), \quad y = -R \left(\sin \theta + \frac{1}{6} \sin 3\theta \right).$$

令 θ 取不同的数值, 点绘而成的孔边曲线如图 5-10a 所示。当 $\theta = 0$ 时, $x = \frac{5}{6}R$ 而 $y = 0$; 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = 0$ 而 $y = -\frac{5}{6}R$; 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $x = -y = \frac{7}{12}\sqrt{2}R$ 。用

见这“近似正方形”的中心高度及中心宽度为 $a = 2 \times \frac{5}{6}R = \frac{5}{3}R$ ，而对角线的长度为

$$d = 2\sqrt{2} \frac{7}{12}\sqrt{2}R = \frac{7}{3}R = \frac{7}{5}a = 1.400a。$$

四个圆角的曲率半径为

$$|r| = \left| \frac{\left\{ \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d^2x}{d\theta^2}} \right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{R}{10} = \frac{3}{50}a = 0.060a。$$

设在式(a)中取三项，即

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3 + \frac{1}{56}\zeta^7 \right), \quad (c)$$

则得 $|r| = 0.025a$ ，孔边曲线如图 5-10b 所示。设在式(a)中取四项，即

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3 + \frac{1}{56}\zeta^7 - \frac{1}{176}\zeta^{11} \right), \quad (d)$$

则得 $|r| = 0.014a$ ，在孔边曲线与精确正方形之间看不出什么区别。

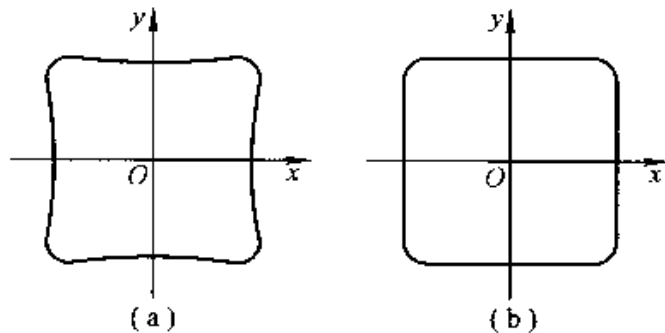


图 5-10

现在，设具有正方形孔口的薄板在与 x 轴成 α 角的方向受有均匀拉力 q ，孔口不受面力。和前一节中一样，我们有

$$\bar{f}_x = \bar{f}_y = \bar{F}_x = \bar{F}_y = 0, \quad (e)$$

$$B = \frac{q}{4}, \quad B' - iC' = -\frac{q}{2}e^{2i\alpha}. \quad (f)$$

按照式(b)导出下列公式：

$$\left. \begin{aligned} \omega(\sigma) &= R \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{6}\sigma^3 \right), & \overline{\omega(\sigma)} &= R \left(\sigma - \frac{1}{6\sigma^3} \right), \\ \omega'(\sigma) &= -R \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2} \right), & \overline{\omega'(\sigma)} &= -R \left(\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \right), \\ \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} &= \frac{\sigma}{6} - \frac{13\sigma}{6(2\sigma^4 + 1)}, & \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} &= \frac{1}{6\sigma} - \frac{13\sigma^3}{6(2 + \sigma^4)} \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

于是由公式(5-30)得

$$f_0 = -\frac{qR}{2} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma^3}{6} \right) + \frac{qR}{2} \left(\sigma - \frac{1}{6\sigma^3} \right) e^{2i\alpha} \quad (\text{h})$$

公式(5-35)右边的积分式成为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f_0 d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{qR}{12} (\zeta^2 + 6e^{2i\alpha}) \zeta,$$

而左边的积分式成为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \cdot \frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left[\frac{\sigma}{6} - \frac{13\sigma}{6(2\sigma^4 + 1)} \right] \times \left(\overline{\alpha_1} + \frac{2\alpha_2}{\sigma} + \frac{3\overline{\alpha_3}}{\sigma^2} + \dots \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{6} \overline{\alpha_1} \zeta + \frac{1}{3} \overline{\alpha_2} \zeta^2 \end{aligned}$$

代入公式(5-35), 得

$$\alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_3 \zeta^3 + \dots + \frac{1}{6} \overline{\alpha_1} \zeta + \frac{1}{3} \overline{\alpha_2} \zeta^2 = \frac{qR}{12} (\zeta^2 + 6e^{2i\alpha}) \zeta.$$

将两边 ζ 的同幂次项的系数对比, 得

$$\alpha_1 + \frac{1}{6} \overline{\alpha_1} = \frac{qR}{2} e^{2i\alpha}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{qR}{12}, \quad \alpha_4 = \alpha_5 = \dots = 0,$$

从而得出

$$\alpha_1 = qR \left(\frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right), \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{qR}{12}.$$

于是有

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_3 \zeta^3 \\ &= qR \left[\left(\frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right) \zeta + \frac{1}{12} \zeta^3 \right] \end{aligned} \quad (\text{i})$$

将式(i)、式(g)和式(h)代入公式(5-36), 得

$$\begin{aligned} \psi_0(\zeta) &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left[\frac{1}{6\sigma} - \frac{13\sigma^3}{6(2 + \sigma^4)} \right] qR \left[\left(\frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right) + \frac{1}{4} \sigma^3 \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left[-\frac{qR}{2} \left(\sigma - \frac{1}{6\sigma^3} \right) + \frac{qR}{2} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma^3}{6} \right) e^{2i\alpha} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \end{aligned}$$

进行积分, 得

$$\begin{aligned} \psi_0(\zeta) &= \frac{13\zeta^3}{6(2 + \zeta^4)} - qR \left(\frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right) + \\ & \left[\frac{1}{6\zeta} - \frac{13\zeta^3}{6(2 + \zeta^4)} \right] qR \frac{1}{4} \zeta^2 = -\frac{qR}{2} \left[\zeta + \frac{1}{6} \zeta^3 e^{-2i\alpha} \right]. \end{aligned}$$

简化以后, 得

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{qR}{12} \left[e^{-2i\alpha} \zeta^3 + \frac{13\zeta - 26 \left(\frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right) \zeta^3}{2 + \zeta^4} \right], \quad (j)$$

将式(i)及式(j)分别代入公式(5-25)及(5-26), 并注意式(e)及式(f), 即得

$$\varphi(\zeta) = qR \left[\frac{1}{4\zeta} + \left(\frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right) \zeta + \frac{1}{24} \zeta' \right],$$

$$\psi(\zeta) = -qR \left[\frac{e^{-2i\alpha}}{2\zeta} + \frac{13\zeta - 26 \left(\frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right) \zeta^3}{12(2 + \zeta^4)} \right].$$

关于应力的计算, 见文献[2]的第二章。

习 题

5-1 试考察下列复变函数所解决的问题:

$$(a) \varphi_1(z) = \frac{q}{4}z, \quad \psi_1(z) = \frac{q}{2}z$$

$$(b) \varphi_1(z) = \frac{q}{4}z, \quad \psi_1(z) = -\frac{q}{2}z$$

$$(c) \varphi_1(z) = 0, \quad \psi_1(z) = iqz$$

答案: (a) 矩形薄板在 y 方向受均布拉力 q 。

(b) 矩形薄板在 x 方向受均布拉力 q 。

(c) 矩形薄板受均布剪力 q 。

5-2 试证矩形截面梁的纯弯曲问题可用如下的复变函数求解:

$$\varphi_1(z) = -\frac{iM}{8I}z^2, \quad \psi_1(z) = \frac{iM}{8I}z^2,$$

其中 I 为梁截面的惯矩, M 为作用的弯矩。

5-3 试导出用复变函数 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$ 表示极坐标 (r, θ) 中应力分量的公式

$$\sigma_\theta + \sigma_r = 4\operatorname{Re}\varphi_1'(z)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)]e^{2i\theta}.$$

5-4 试用习题 5-3 中的公式由

$$\varphi_1(z) = -\frac{F}{2\pi} \ln z \quad \text{及} \quad \psi_1(z) = \frac{F}{2\pi} \ln z$$

导出解答(4-26)。

5-5 试用习题 5-3 中的公式由

$$\varphi_1(z) = \frac{qa}{4} \left(\frac{z}{a} + 2\frac{a}{z} \right) \quad \text{及} \quad \psi_1(z) = -\frac{qa}{2} \left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z} - \frac{a^2}{z^2} \right)$$

导出解答(4-17)。

5-6 具有椭圆孔口的薄板，在平行于孔轴的方向受有均布剪力 q ，图 5-11。试求复变函数 $\varphi(\zeta)$ 及 $\psi(\zeta)$ ，并求出孔边应力及其极值。

答案：
$$\varphi(\zeta) = iqR\zeta, \quad \psi(\zeta) = iqR \frac{1 + \zeta^4}{\zeta(1 - m\zeta^2)},$$

$$\frac{4q\sin 2\theta}{1 + m^2 - 2m\cos 2\theta}, \quad \pm \frac{4}{1 - m^2}q.$$

5-7 具有椭圆孔口的薄板，在孔边受均布剪力 q ，图 5-12。试求复变函数 $\varphi(\zeta)$ 及 $\psi(\zeta)$ ，并求出孔边应力及其极值。

答案：
$$\varphi(\zeta) = imqR\zeta, \quad \psi(\zeta) = -iqR\zeta \frac{1 - m^2 - 2m\zeta^2}{1 - m\zeta^2},$$

$$\frac{4mq\sin 2\theta}{1 + m^2 - 2m\cos 2\theta}, \quad \pm \frac{4m}{1 - m^2}q.$$

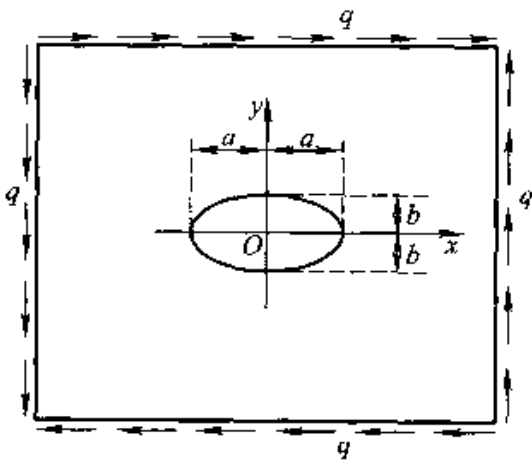


图 5-11

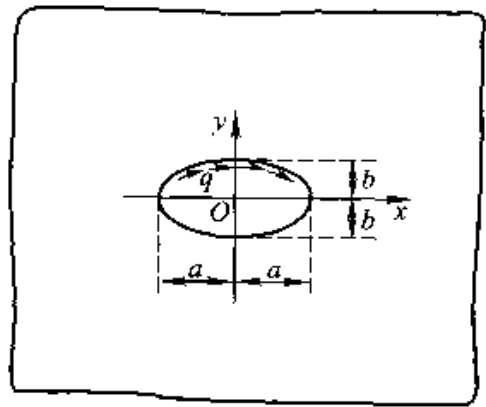


图 5-12

5-8 试导出表达式(5-37)及(5-38)。

参 考 教 材

- [1] 张芝琪著. 坝体内的孔口和廊道[J]. 水利水电建设, 1959, 第14期.
- [2] Г. И. 萨文著. 孔附近的应力集中[M]. 卢鼎霍译. 北京: 科学出版社, 1958; 第一章及第二章.
- [3] Н. И. Мухелишвили 著. 数学弹性力学的几个基本问题[M]. 赵惠元译. 北京: 科学出版社, 1958; 第二章、第四章及第五章.
- [4] 赵光恒著. 标准廊道附近的应力集中[J]. 高等学校自然科学学报, 土木、建筑、水利版, 1965, 第一卷第一期.

第六章 温度应力的平面问题

当弹性体的温度有所改变时，它的每一部分一般都将由于温度的升高或降低而趋于膨胀或收缩。但是，由于弹性体所受的外在约束，以及各个部分之间的相互约束，这种膨胀或收缩并不能自由地发生，于是就产生应力，即所谓变温应力。近年来，变温应力已趋于改称为温度应力，但读者不可因此而有这样的误解：“温度应力是温度引起的，因而一定的温度相应于一定的应力。”实际上，这个应力是变温引起的，一定的变温才相应于一定的应力。

为了决定弹性体内的温度应力，须进行两方面的计算：(1)按照“热传导理论”，根据弹性体的热学性质、内部热源、初始条件和边界条件，计算弹性体内各点在各瞬时的温度，即所谓“决定温度场”，而前后两个温度场之差就是弹性体的变温。(2)按照“热弹性力学”，根据弹性体的变温来求出体内各点的温度应力，即所谓“决定应力场”。本章将对这两方面的计算进行简单的介绍。

§ 6-1 关于温度场和热传导的一些概念

热量从物体的一部分传递到另一部分，或从一个物体传入与之相接触的另一个物体，都称为热传导。在热传导理论中，和在弹性力学中一样，也是概不考虑物质的微粒构造，而把物体当做是连续介质。

一般而论，在热传导的过程中，物体各点的温度随着各点的位置不同和时间的经过而变化，因而温度 T 是位置坐标和时间 t 的函数：

$$T = T(x, y, z, t), \quad (\text{a})$$

在任一瞬时，所有各点的温度值的总体，称为温度场。

一个温度场，如果它的温度随时间而变，如式(a)所示，就称为不稳定温度场或非定常温度场；如果它的温度不随时间而变，就称为稳定温度场或定常温度场。在稳定温度场中，温度只是位置坐标的函数，即

$$T = T(x, y, z), \quad \left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right). \quad (\text{b})$$

如果温度场的温度随着三个位置坐标而变，如式(a)所示，它就称为空间温度场或三维温度场；如果温度只随平面内的两个位置坐标而变，它就称为平

面温度场，它的数学表示是

$$T = T(x, y, t), \quad \left(\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \right) \quad (c)$$

平面稳定温度场的数学表示则为

$$T = T(x, y), \quad \left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \right) \quad (d)$$

在任一瞬时，连接场内温度相同的各点，就得到这一瞬时的一个等温面。图 6-1 中的虚线，表示温度相差为 ΔT 的一些等温面。显然，沿着等温面，温度不变；沿着其他方向，温度都有变化，沿着等温面的法线方向，温度的变化率最大。

为了明确表示温度 T 在某一点 P 处的变化率，在这一点取一个矢量，称为温度梯度，用 ∇T 表示，它沿着等温面的法线方向，指向增温的方面，而大小等于 $\frac{\partial T}{\partial n}$ ，其中 n 是沿着等温面法线而量的距离。取单位矢量 n_0 ，沿着等温面法线而指向增温的方面，则

$$\nabla T = n_0 \frac{\partial T}{\partial n} \quad (e)$$

显然， P 点的温度梯度表示该点的最大变温率的方向和大小。该点沿坐标方向的变温率，则等于该点的温度梯度在坐标轴上的投影，即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial n} \cos(n, x), \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial n} \cos(n, y), \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial T}{\partial n} \cos(n, z) \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

在单位时间内通过等温面面积 S 的热量，称为热流速度（与水流的流量相似），用 $\frac{dQ}{dt}$ 表示，它的量纲是 L^2MT^{-3} 。通过等温面单位面积的热流速度，称为热流密度（与水流的速度相似）。用 q 表示热流密度的大小，则有

$$q = \frac{dQ}{dt} / S, \quad (g)$$

它的量纲是 MT^{-3} 。在热传导中，热流密度必须当作矢量看待（和水流速度一样），它的矢量表示是

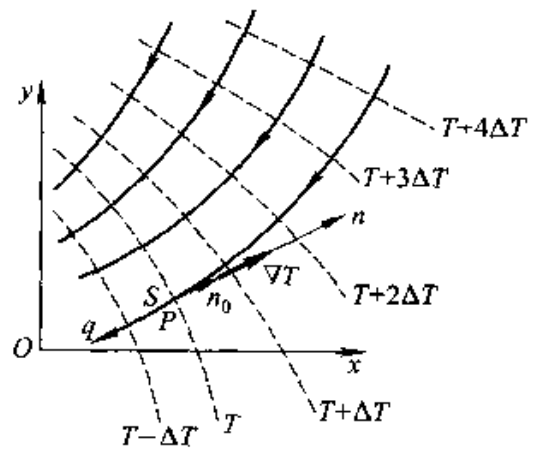


图 6-1

$$q = -n_0 \frac{dQ}{dt} / S, \quad (\text{h})$$

因为它也是沿着等温面的法线方向，但指向降温的方面。

热传导的基本定律是：热流密度与温度梯度成正比而方向相反，也就是

$$q = -\lambda \nabla T, \quad (\text{i})$$

其中的比例常数 λ 称为导热系数。由 (e)、(h)、(i) 三式中消去矢量 q 及 ∇T ，得到

$$\lambda = \frac{dQ}{dt} / \frac{\partial T}{\partial n} S, \quad (\text{j})$$

由此可见，导热系数 λ 表示“在单位温度梯度下通过等温面单位面积的热流速度”，也就是，当温度沿等温面法线每单位长度降低一度时，在单位时间内传过等温面单位面积的热量，它的量纲是 $\text{LMT}^{-1}\Theta^{-1}$ ，其中 Θ 是热力学温度。

由式 (e) 及式 (i) 可见，热流密度 q 的大小是

$$q = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (6-1)$$

所以热流密度 q 在 x 轴上的投影是

$$q_x = q \cos(q, x) = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cos(q, x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cos(n, x),$$

从而通过式 (f) 得到

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

同样可得热流密度 q 在 y 轴和 z 轴上的投影，总共得到

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (6-2)$$

因为坐标轴是任意选取的，所以上式表示：热流密度在任一方向的分量，等于导热系数乘以温度在该方向的递减率。

§ 6-2 热传导微分方程

热传导微分方程的建立，是以如下的热量平衡原理为依据的：在任意一段时间内，物体的任一微小部分所积蓄的热量（亦即温度增高所需的热量），等于传入该微小部分的热量加上内部热源所供给的热量。

取直角坐标系并取微小六面体 $dx dy dz$ ，如图 6-2 所示。假定该六面体的温度在 dt 时间内由 T 升高到 $T + \frac{\partial T}{\partial t} dt$ ，由于温度升高了 $\frac{\partial T}{\partial t} dt$ ，它所积蓄的热量

是 $cpdx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} dt$ ，其中 ρ 是物体的密度； c 是比热容，也就是单位质量的物体升高一度时所需的热量。

在同一时间 dt 内，由六面体左面传入热量 $q_x dy dz dt$ ，由右面传出 $(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dy dz dt$ 。因此，传入的净热量为

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt,$$

并由 (6-2) 中的第一式可见其等于

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz dt.$$

同样，由上下两面及前后两面传入的净热量分别为 $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy dz dx dt$ 及

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz dx dy dt.$$

这样，传入六面体的净热量

总共是 $\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dy dz dt$ ，或简写

为 $\lambda \nabla^2 T dx dy dz dt$ 。

设该六面体的内部有热源，其强度为 W (在单位时间、单位体积内供给的热量)，则该热源在时间 dt 内所供给的热量为 $W dx dy dz dt$ 。在这里，供热的热源作为正的热源，例如金属通电时发热，混凝土硬化时发热，水分结冰时发热，等等；吸热的热源作为负的热源，例如水分蒸发时吸热，冰粒溶解时吸热，等等。

于是，根据热量平衡原理，我们有

$$cp dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} dt = \lambda \nabla^2 T dx dy dz dt + W dx dy dz dt.$$

除以 $cp dx dy dz dt$ ，移项以后，即得热传导微分方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{cp} \nabla^2 T = \frac{W}{cp}, \quad (a)$$

或简写为

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \nabla^2 T = \frac{W}{cp}, \quad (b)$$

其中

$$a = \frac{\lambda}{cp} \quad (6-3)$$

称为导温系数 (又称为热扩散率)，它的量纲是 $L^2 T^{-1}$ 。它的单位是 m^2/h 。在通常的情况下，混凝土的导温系数在 0.003 与 0.005 之间。

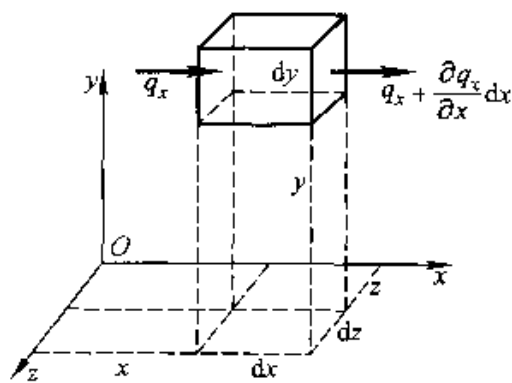


图 6-2

方程(a)或(b)中的系数 λ 、 c 、 ρ 、 a 都可以近似地当做常量,但热源强度 W 却往往随着时间的经过而有较大的变化,它必须作为时间 t 的函数(已知函数)。

分析混凝土体在硬化发热期间的不稳定温度场时,引用所谓绝热温升来代替热源强度,比较方便一些。我们把拌捣好了的一块混凝土放在绝热条件下,使混凝土硬化时所发的热量全部用于提高混凝土试块本身的温度,这时量得的试块温度的升高 θ 称为绝热温升,它随时间(龄期) t 的变化大致如图6-3中的绝热温升图线所示。

绝热温升对于时间的改变率,即 $\frac{\partial \theta}{\partial t}$,称为绝热温升率,可由绝热温升图线的斜率得来。

由于混凝土试块不大,而且是处于绝热情况下,所以试块内的温度可以认为是均匀的,也就是,它的温度只随时间变化而不是坐标的函数。这样我们就有 $\nabla^2 T = 0$,从而由式(a)或式(b)可见有

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{W}{c\rho} \quad (c)$$

但这时的 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 就是绝热温升率 $\frac{\partial \theta}{\partial t}$,因此又有

$$\frac{W}{c\rho} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

再代回式(b),即得

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \nabla^2 T = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (6-4)$$

这就是混凝土在硬化发热期间的热传导微分方程。

§ 6-3 温度场的边值条件

为了能够求解热传导微分方程,从而求得温度场,必须已知物体在初瞬时的温度分布,即所谓初始条件;同时还必须已知初瞬时以后物体表面与周围介质之间进行热交换的规律,即所谓边界条件。初始条件和边界条件合称为边值条件。初始条件是时间边值条件,而边界条件是空间边值条件。

初始条件一般表示为如下的形式:

$$(T)_{t=0} = f(x, y, z) \quad (6-5)$$

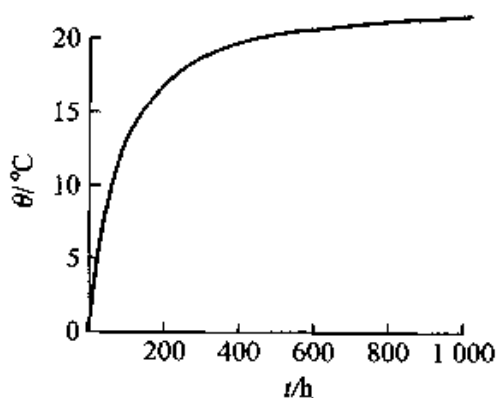


图 6-3

在某些特殊情况下，在初瞬时，温度为均匀分布，即

$$(T)_{t=0} = C, \quad (6-6)$$

其中 C 是常数。

边界条件可能以四种方式给出。

这一类边界条件是：已知物体表面上任意一点在所有各瞬时的温度，即

$$T_s = f(t), \quad (6-7)$$

其中 T_s 是物体表面的温度。在最简单的情况下，上式成为

$$T_s = C, \quad (6-8)$$

即，物体表面的温度保持不变。这种边界条件可能是借人工维持的，或是当物体与周围介质进行特殊热交换时实现的，参阅下面所说的第三类边界条件。

第二类边界条件是：已知物体表面上任意一点的法向热流密度，即

$$(q_n)_s = f(t),$$

其中角码 s 表示“表面”，角码 n 表示法向。按照 § 6-1 中最后的结论，上式可以改写成为

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = (q_n)_s = f(t). \quad (6-9)$$

在绝热边界上，由于热流密度为零，由上式得到

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = 0. \quad (6-10)$$

第三类边界条件是：已知物体边界上任意一点在所有各瞬时的运流（对流）放热情况。按照热量的运流定律，在单位时间内从物体表面传向周围介质的热流密度，是和两者的温度差成正比的，即

$$(q_n)_s = \beta (T_s - T_\infty), \quad (6-11)$$

其中 T_∞ 是周围介质的温度； β 称为运流放热系数（又称为表面传热系数），或简称为放热系数，它的量纲是 $\text{MT}^{-3}\Theta^{-1}$ 。放热系数 β 依赖于周围介质的密度、粘度、流速、流向、流态，还依赖于物体表面的曲率及糙率，它的数值范围是很大的。按照 § 6-1 中最后的结论，(6-11) 式可以改写成为

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = \beta (T_s - T_\infty),$$

也就是

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = -\frac{\beta}{\lambda} (T_s - T_\infty). \quad (6-12)$$

如果周围介质的流速较大，运流几乎是完全的，则物体表面被迫取周围介质的温度，而上式可以近似地代以

$$T_n = T_{n_0} \quad (6-13)$$

这时, (6-12)式中的 $\frac{\beta}{\lambda}$ 很大, 而 $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_0$ 仍然取普通的数值。如果 T_n 随时间变化, 是时间 t 的函数, 则(6-13)式等同于(6-7)式。如果 T_n 不随时间变化, 则(6-13)式等同于(6-8)式。

第四类边界条件是: 已知物体和与之接触的另一物体以热传导方式进行热交换的情况。通常都假定接触是完全的, 即, 物体表面的温度 T_s 和接触体表面的温度 T_c 相同, 即

$$T_s = T_c \quad (6-14)$$

按照边值条件求解热传导微分方程, 在数学上是个难题, 对于工程实际上提出的问题, 用函数求解一般是不现实的。对于平面问题, 可以用差分法求解(见第七章), 最好是用有限单元法求解。对于空间问题, 就只能用有限单元法求解。

§ 6-4 按位移求解温度应力的平面问题

从现在开始, 我们来讨论温度应力问题的第二部分, 即, 根据弹性体内的已知变温来决定体内的温度应力。为此, 首先要导出热弹性力学的基本方程和边界条件。

命弹性体内各点的变温为 T , 即后一瞬时的温度减去前一瞬时的温度, 以升温时为正, 降温时为负(现在和以后都不再用 T 表示某一瞬时的温度)。由于变温 T , 弹性体内各点的微小长度, 如果不受约束, 将发生线应变 αT , 其中 α 是弹性体的线胀系数, 它的量纲是 $^{\circ}\text{C}^{-1}$ 。在各向同性体中, 系数 α 不随方向而变, 所以这种线应变在所有各个方向都相同, 因而也就不伴随着任何切应变。在通常的温度应力问题中, 还假定 α 也不随温度的改变而改变(不然的话, 温度应力问题将成为非线性问题)。这样, 弹性体内各点的形变分量为

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha T, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0 \quad (a)$$

而式中的 α 是常数。

但是, 由于弹性体所受的外在约束以及体内各部分之间的相互约束, 上述形变并不能自由发生, 于是就产生了应力, 即所谓温度应力。这个温度应力又将由于物体的弹性而引起附加的形变, 如胡克定律所示。因此, 连同式(a)所示的形变, 总的形变分量是

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (6-15)$$

假定在如图 2-1 所示的等厚度薄板及坐标系中，没有体力和面力的作用，但是有变温 T 的作用，而这个变温 T 是平行于 xy 面的、前后两个瞬时的平面温度场之差，因而只是 x 和 y 的函数，不随 z 而变化。通过与 § 2-1 中相同的论证，可见这里仍然是平面应力的问题，因而有

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad (b)$$

并由 (6-15) 式得出用应力分量和变温 T 表示形变分量的物理方程，即所谓热弹性力学的物理方程：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y) + \alpha T, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x) + \alpha T, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (6-16)$$

由上式求解应力分量，就得出用形变分量和变温 T 表示应力分量的物理方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

几何方程仍然如 (2-3) 式所示，得

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (d)$$

这是因为，形变与位移之间的纯粹几何关系，不会因为引起形变和位移的原因不同而有所改变。但须注意，这里的形变和位移是由于变温和温度应力共同作

用而引起的。将式(d)代入式(c), 得出用位移分量和变温 T 表示应力分量的公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6-17)$$

求解温度应力时, 一般都宜于按位移求解(关于按应力求解, 见 §7-6)。为了得出按位移求解时所需用的微分方程, 将(6-17)式代入平衡微分方程(2-2), 并注意在这里 $f_x = 0, f_y = 0$, 简化以后得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - (1+\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (1+\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6-18)$$

为了得出按位移求解时的应力边界条件, 将(6-17)式代入(2-18)式, 并注意在这里 $\bar{f}_x = 0, \bar{f}_y = 0$, 简化以后得

$$\left. \begin{aligned} l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)_s + m \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_s \\ = l(1+\mu)\alpha T, \\ m \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_s + l \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \\ = m(1+\mu)\alpha T. \end{aligned} \right\} \quad (6-19)$$

位移边界条件仍然如(2-17)所示。

将方程(6-18)及(6-19)分别与(2-20)及(2-21)对比, 可见

$$-\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial x} \text{ 及 } -\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial y}$$

代替了体力分量 f_x 及 f_y , 而

$$l \frac{E\alpha T}{1-\mu} \text{ 及 } m \frac{E\alpha T}{1-\mu} \quad (e)$$

代替了面力分量 \bar{f}_x 及 \bar{f}_y 。于是可知, 在一定的位移边界条件下, 弹性体中由于变温 T 而引起的位移, 就等于温度不变而受有下列假想外来作用时的位移:

(1) 体力, 它的分量是

$$f_x = -\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad (f)$$

(2) 法向面力

$$\sigma_x = \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \quad (g)$$

它的分量如式(e)所示。按照应力边界条件(2-21)及位移边界条件(2-17)求出微分方程(2-20)的解答 u 及 v 以后, 就可以按照(6-17)式求得应力分量。这里须注意: 应力分量应当包含两部分, 一部分是和通常一样根据位移分量求得的, 另一部分是与各点的变温 T 成正比的、各向相同的正应力 $-\frac{E\alpha T}{1-\mu}$ 。

总结起来, 在温度应力的平面应力问题中, 温度应力就等于假想体力(f)和假想面力(g)所引起的应力, 叠加以各向相同的正应力 $-\frac{E\alpha T}{1-\mu}$ 。这样就把温度应力的平面问题变换成为通常的、已知体力和面力的平面问题。

这样的变换, 对于温度应力的模型实验有很大的帮助。用模型实验量测温度应力时, 控制温度就有困难, 而要使得模型和原型在热学方面和力学方面都能满足模型相似律, 就更加困难。通过上述变换, 就可以用施加荷载来代替加热, 把一个热学和力学的混合模型变换成为单纯的力学模型, 减少实验工作中的困难。

现在, 假定在如图 2-2 所示的无限长柱形体及坐标系中, 没有体力和面力作用, 但是有变温 T 的作用, 而这个变温也只是 x 和 y 的函数, 不随 z 而变化。通过与 § 2-1 及 § 2-4 中相同的论证, 可见这里仍然是平面应变的问题, 因而有

$$\varepsilon_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0,$$

并从而由(6-15)式得出与(6-16)相似的物理方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right) + (1+\mu) \alpha T, \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right) + (1+\mu) \alpha T, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

将物理方程(h)与(6-16)对比, 可见 E 变换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 变换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$, 此外还有 α 变换为 $(1+\mu)\alpha$ 。于是又可见, 上面针对温度应力的平面应力问题而推导出来那些方程和结论, 进行这样的变换以后, 就适用于温度应力的平面应变问题。这是因为, 在推导过程中所用到的方程, 除了物理方程(6-16)以外, 都不包含 E 、 μ 、 α 这三个物理常数。

但是, 必须指出: 在温度应力的平面应变问题中, 除了应力分量 σ_x 、 σ_y 、

τ_{xy} 以外, 还有一个应力分量 σ_z 。在(6-15)的第三式中, 命 $\varepsilon_z = 0$, 就得到这个应力分量:

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) - E\alpha T_c \quad (6-20)$$

§ 6-5 位移势函数的引用

前一节中已经说明, 在平面应力的情况下, 按位移求解温度应力问题时, 须使位移分量 u 和 v 满足微分方程(6-18), 并在边界上满足位移边界条件和应力边界条件。实际求解时, 宜分两步进行: (1) 求出微分方程(6-18)的任意一组特解, 它只须满足(6-18), 而不一定要满足边界条件。(2) 不计变温 T , 求出(6-18)的一组补充解, 使它和特解叠加以后, 能满足边界条件。

为了求得一组位移特解, 引用一个函数 $\psi(x, y)$, 将位移特解取为

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6-21)$$

函数 ψ 称为位移势函数。以 u' 及 v' 分别作为 u 及 v 代入(6-18), 简化以后, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi &= (1 + \mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi &= (1 + \mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial y}. \end{aligned}$$

注意 μ 和 α 都是常量, 即显然可见, 如果取函数 ψ 满足微分方程

$$\nabla^2 \psi = (1 + \mu) \alpha T, \quad (6-22)$$

则上式可以满足, 因而微分方程(6-18)也能满足。于是表达式(6-21)就可以作为一组特解。将表达式(6-21)以及由(6-22)式得来的 $\alpha T = \frac{1}{1 + \mu} \nabla^2 \psi$ 代入

公式(6-17), 可见相应于位移特解的应力分量是

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= -\frac{E}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \\ \sigma'_y &= -\frac{E}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \tau'_{xy} &= \frac{E}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (6-23)$$

位移的补充解 u'' 及 v'' 须满足(6-18)的齐次微分方程, 即

$$\frac{\partial^2 u''}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u''}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v''}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v''}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v''}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u''}{\partial x \partial y} = 0,$$

相应于位移补充解的应力分量可由公式(6-17)得来(注意变温项已计入位移特解之中,这时不再计变温,因而有 $T=0$):

$$\sigma_x'' = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u''}{\partial x} + \mu \frac{\partial v''}{\partial y} \right),$$

$$\sigma_y'' = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v''}{\partial y} + \mu \frac{\partial u''}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{xy}'' = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial v''}{\partial x} + \frac{\partial u''}{\partial y} \right).$$

这样,总的位移分量是

$$u = u' + u'', \quad v = v' + v'',$$

它们须满足位移边界条件;总的应力分量是

$$\sigma_x = \sigma_x' + \sigma_x'', \quad \sigma_y = \sigma_y' + \sigma_y'', \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}' + \tau_{xy}''.$$

它们须满足应力边界条件。

在应力边界问题中(没有位移边界条件),为了避免寻求位移补充解的困难,可以把相应于位移补充解的应力分量直接用应力函数来表示,即

$$\sigma_x'' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y'' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}'' = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (6-24)$$

其中的应力函数 Φ 可以按照应力边界条件的要求来选取。第三章中一些满足相容方程的应力函数可供参考。

在平面应变的情况下,须要按照前一节中所述,将以上各方程中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, 将 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$, 并将 α 换为 $(1+\mu)\alpha$ 。这样,位移势函数 ψ 所应满足的方程(6-22)就成为

$$\nabla^2 \psi = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha T, \quad (6-25)$$

但相应于位移特解的应力分量仍然如(6-23)所示。应力分量 σ_x 仍可由(6-20)式求得。

作为简例,设图6-4a所示的矩形薄板中发生如下的变温:

$$T = T_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

其中的 T_0 是常量。在这里,位移势函数 ψ 所应满足的微分方程(6-22)成为

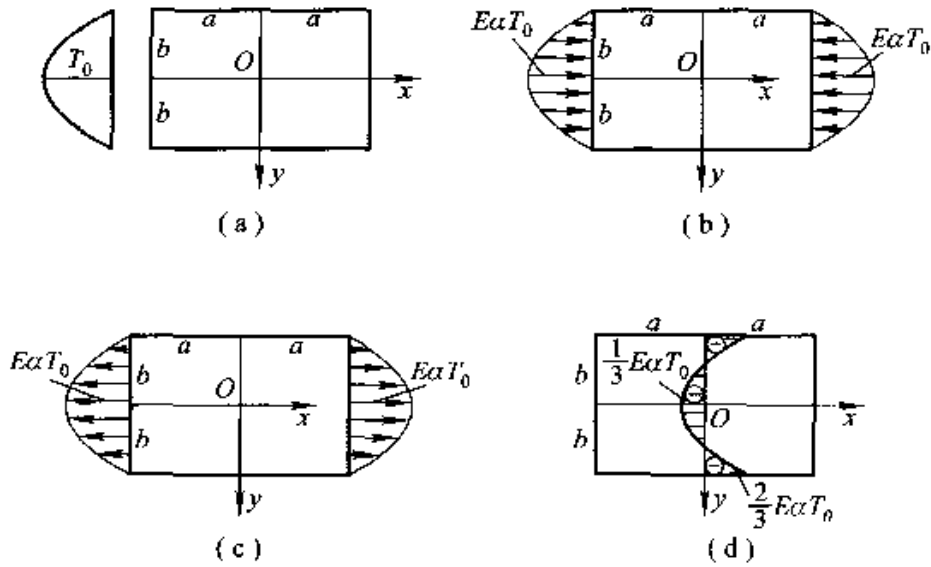


图 6-4

$$\nabla^2 \psi = (1 + \mu) \alpha T_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (a)$$

显然，取

$$\psi = Ay^2 + By^4, \quad (b)$$

可以满足式(a)。为了求出常数 A 及 B ，将式(b)代入式(a)，得

$$2A + 12By^2 = (1 + \mu) \alpha T_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

比较两边的系数，可见常数 A 及 B 应为

$$A = \frac{(1 + \mu) \alpha T_0}{2}, \quad B = -\frac{(1 + \mu) \alpha T_0}{12b^2}$$

再代回式(b)，得位移势函数

$$\psi = (1 + \mu) \alpha T_0 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12b^2} \right)$$

于是由(6-23)式得出相应于位移特解的应力分量

$$\sigma'_x = -E\alpha T_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad \sigma'_y = 0, \quad \tau'_{xy} = 0 \quad (c)$$

相应的面力如图 6-4b 所示。

为了满足边界条件，可以在薄板上施以与上述面力大小相同而方向相反的面力，图 6-4c，把由此而引起的应力作为补充解 σ''_x 、 σ''_y 、 τ''_{xy} 。在 a 与 b 同等大小的情况下，这个应力的精确函数解很难求得，而只能用数值解法求出近似解，如第七章及第十一章中所述。

在 a 远大于 b 的情况下，矩形薄板的左右两边成为次要的小部分的边界，

就可以按照圣维南原理,把两边上的面力化为静力等效的均布拉力。这就启示我们,采用 § 3-1 中满足相容方程的应力函数

$$\Phi = cy^2,$$

可以得出所需要的、相应于位移补充解的应力分量:

$$\sigma_x'' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2c, \quad \sigma_y'' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy}'' = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

将这些应力分量和式(c)所示的应力分量相叠加,得到总的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x' + \sigma_x'' = 2c - E\alpha T_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right), \\ \sigma_y &= \sigma_y' + \sigma_y'' = 0, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}' + \tau_{xy}'' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

边界条件要求

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{x=\pm a} &= 0, & (\tau_{xy})_{x=\pm a} &= 0, \\ (\sigma_y)_{x=\pm a} &= 0, & (\tau_{xy})_{x=\pm a} &= 0, \end{aligned}$$

其中后三个条件是满足的,而第一个条件不能满足。现在,应用圣维南原理,把第一个条件变换为静力等效的条件,即,在 $x = \pm a$ 的边界上, σ_x 的主矢量及主矩等于零;

$$\int_{-b}^b (\sigma_x)_{x=\pm a} dy = 0, \quad \int_{-b}^b (\sigma_x)_{x=\pm a} y dy = 0.$$

将式(d)代入,求得 $2c = \frac{2}{3} E\alpha T_0$ 。于是由式(d)得最后的温度应力

$$\sigma_x = E\alpha T_0 \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{3} \right), \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (e)$$

应力分布如图 6-4(d)所示。最大及最小的应力为

$$(\sigma_x)_{y=\pm b} = \frac{2}{3} E\alpha T_0, \quad (\sigma_x)_{y=0} = -\frac{1}{3} E\alpha T_0. \quad (6-26)$$

在 x 为常量的所有截面上,包括两端截面 $x = \pm a$ 在内,都有如图 6-4d 所示的正应力。因此,该两端的边界条件是不能精确满足的。但是,根据圣维南原理,每一端上自成平衡的面力只会影响靠近该端处的应力。在离开两端较远之处,不论两端是否有这样的、等效于零的面力,都可以认为应力如式(e)所示。

§ 6-6 用极坐标求解问题

对于圆形、楔形、扇形、瓦形弹性体中的温度应力,宜用极坐标求解。

在平面应力的情况下，变温 $T(\rho, \varphi)$ 及温度应力引起的形变分量是

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{1}{E}(\sigma_\rho - \mu\sigma_\varphi) + \alpha T, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \mu\sigma_\rho) + \alpha T, \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{\rho\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

进行与 §6-5 中相同的论证，并且位移势函数 $\psi(\rho, \varphi)$ 把径向和环向位移的特解表示为

$$u'_\rho = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \quad u'_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad (6-27)$$

可见 ψ 所应满足的微分方程仍然是

$$\nabla^2\psi = (1+\mu)\alpha T, \quad (6-28)$$

但其中的 ∇^2 为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

应用极坐标中的几何方程(4-2)及物理方程(4-3)，可将相应于位移特解的应力分量表示成为

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_\rho &= -\frac{E}{1+\mu} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \right), \\ \sigma'_\varphi &= -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}, \\ \tau'_{\rho\varphi} &= \frac{E}{1+\mu} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6-29)$$

对于轴对称的变温，即 $T = T(\rho)$ ，位移势函数只须取为 $\psi(\rho)$ ，于是 ψ 所应满足的微分方程(6-28)成为

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \psi = (1+\mu)\alpha T,$$

或
$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\psi}{d\rho} \right) = (1+\mu)\alpha T。$$

两边乘以 $\rho d\rho$ ，对 ρ 积分，再乘以 $\frac{d\rho}{\rho}$ ，再对 ρ 积分，得

$$\psi(\rho) = (1+\mu)\alpha \int \frac{1}{\rho} \int T\rho d\rho^2 + (1+\mu)\alpha A \ln \rho + B, \quad (6-30)$$

其中的 A 和 B 是任意常数。常数 A 的前面乘以因子 $(1+\mu)\alpha$ ，只是为了下面运算时比较方便。

将(6-30)式代入公式(6-29)，即得相应于位移特解的应力分量为

$$\begin{aligned}\sigma'_\rho &= -\frac{E}{1+\mu} \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} = -\frac{E\alpha}{\rho^2} \left[\int T\rho d\rho + A \right], \\ \sigma'_\varphi &= -\frac{E}{1+\mu} \frac{d^2\psi}{d\rho^2} = \frac{E\alpha}{\rho^2} \left[\int T\rho d\rho + A - T\rho^2 \right], \\ \tau'_{\rho\varphi} &= 0.\end{aligned}$$

在这里，积分的上限当然必须取为 ρ ，但下限可以任意选取。取不同的下限，积分式只相差一个常数，而这个常数可以用任意常数 A 来调整，因此，上式可以改写为

$$\left. \begin{aligned}\sigma'_\rho &= -\frac{E\alpha}{\rho^2} \left[\int_r^\rho T\rho d\rho + A \right], \\ \sigma'_\varphi &= \frac{E\alpha}{\rho^2} \left[\int_r^\rho T\rho d\rho + A - T\rho^2 \right], \\ \tau'_{\rho\varphi} &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (6-31)$$

其中 r 为任意选取的常数，它的因次必须是长度。

在平面应变的情况下，如 § 6-4 中所述，须在以上的各公式中将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ， μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ ， α 换为 $(1+\mu)\alpha$ 。至于多出的应力分量 σ_z ，则可根据 $\varepsilon_z = 0$ 的条件得出与 (6-20) 相似的公式

$$\sigma_z = \mu(\sigma_\rho + \sigma_\varphi) - E\alpha T. \quad (6-32)$$

如果边界条件不能满足，则上述相应于位移特解的应力分量还须叠加以相应于位移补充解的应力分量，而后者可以用第四章中所述的方法求得。

§ 6-7 圆环和圆筒的轴对称温度应力

设有圆环，内半径为 a ，外半径为 b ，发生轴对称的变温 $T = T(\rho)$ 。边界条件是

$$(\sigma_\rho)_{\rho=a} = 0, \quad (\sigma_\rho)_{\rho=b} = 0, \quad (a)$$

按照公式 (6-31)，取 $r = a$ ，得到相应于位移特解的应力分量

$$\left. \begin{aligned}\sigma'_\rho &= -\frac{E\alpha}{\rho^2} \left[\int_a^\rho T\rho d\rho + A \right], \\ \sigma'_\varphi &= \frac{E\alpha}{\rho^2} \left[\int_a^\rho T\rho d\rho + A - T\rho^2 \right], \\ \tau'_{\rho\varphi} &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (b)$$

显然，边界条件 (a) 不能满足（在一般情况下，不可能选择一个常数 A ，使 $\rho = a$

及 $\rho = b$ 处的两个条件同时满足)。因此，我们由满足相容条件的应力函数 $\Phi = \frac{C}{2}\rho^2$ ，求出如下的应力作为补充解：

$$\sigma_{\rho}'' = \sigma_{\varphi}'' = C, \quad \tau_{\rho\varphi}'' = 0 \quad (c)$$

于是由式(b)及式(c)得总的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -\frac{E\alpha}{\rho^2} \left[\int_a^{\rho} T\rho d\rho + A \right] + C, \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{E\alpha}{\rho^2} \left[\int_a^{\rho} T\rho d\rho + A - T\rho^2 \right] + C, \\ \tau_{\rho\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

代入边界条件(a)，并注意 $\int_a^a T\rho d\rho = 0$ ，得

$$-\frac{E\alpha}{a^2}A + C = 0, \quad -\frac{E\alpha}{b^2} \left[\int_a^b T\rho d\rho + A \right] + C = 0.$$

求解 A 和 C ，得

$$A = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T\rho d\rho, \quad C = \frac{E\alpha}{b^2 - a^2} \int_a^b T\rho d\rho \quad (e)$$

再代回式(d)，即得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{E\alpha}{\rho^2} \left[\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T\rho d\rho - \int_a^{\rho} T\rho d\rho \right], \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{E\alpha}{\rho^2} \left[\frac{\rho^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T\rho d\rho + \int_a^{\rho} T\rho d\rho - T\rho^2 \right], \\ \tau_{\rho\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

对于圆筒，作为平面应变问题，须将式(f)中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ， α 换为 $(1+\mu)\alpha$ ，这样得出

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{E\alpha}{(1-\mu)\rho^2} \left[\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T\rho d\rho - \int_a^{\rho} T\rho d\rho \right], \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{E\alpha}{(1-\mu)\rho^2} \left[\frac{\rho^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T\rho d\rho + \int_a^{\rho} T\rho d\rho - T\rho^2 \right], \\ \tau_{\rho\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

此外并由公式(6-32)得出

$$\sigma_z = \frac{E\alpha}{1-\mu} \left[\frac{2\mu}{b^2 - a^2} \int_a^b T\rho d\rho - T \right] \quad (h)$$

式(h)所示的应力，是维持平面应变的应力，是在无限长圆筒中或在两端受完全约束的有限长圆筒中才可能发生的。如果圆筒是有限长的而且两端不受

约束, 则在两端将有边界条件 $\sigma_r = 0$ 。但由式(h)可见, 这是不可能满足的。为了可以近似地满足这个边界条件, 我们对式(h)所示的 σ_r 叠加以常量 D , 而使这个 σ_r 在圆筒两端的合力成为零, 即

$$\int_a^b \left\{ \frac{E\alpha}{1-\mu} \left[\frac{2\mu}{b^2-a^2} \int_a^b T\rho d\rho - T \right] + D \right\} 2\pi\rho d\rho = 0。$$

注意 $\int_a^b T\rho d\rho$ 是常量, 进行积分后, 求解常量 D , 得

$$D = \frac{2E\alpha}{b^2-a^2} \int_a^b T\rho d\rho。$$

在式(h)中叠加以这个常量以后, 得

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{1-\mu} \left[\frac{2}{b^2-a^2} \int_a^b T\rho d\rho - T \right]。 \quad (i)$$

在圆筒的两端, 这个应力还是不等于零(除非 T 是常量), 但是, 它的合力等于零。因此, 按照圣维南原理, 在离开两端较远之处, 式(g)及式(i)所示的应力可以认为是精确的。

作为特例, 设圆筒从某一均匀温度加热, 内面 ($\rho = a$) 增温 T_a , 外面 ($\rho = b$) 增温 T_b 。由方程(6-4)可见, 如果没有内热源 ($W = 0$, 亦即 $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$), 则当热流稳定以后 ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$), 变温 T 应当满足微分方程 $\nabla^2 T = 0$, 即

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) T = 0, \text{ 或}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT}{d\rho} \right) = 0。$$

两边乘以 $\rho d\rho$, 对 ρ 积分, 再乘以 $\frac{d\rho}{\rho}$, 再对 ρ 积分, 得

$$T = A \ln \rho + B。$$

由边界条件 $(T)_{\rho=a} = T_a$ 及 $(T)_{\rho=b} = T_b$ 求出任意常数 A 及 B 以后, 再代入上式, 简化以后, 得

$$T = T_a \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}} + T_b \frac{\ln \frac{\rho}{a}}{\ln \frac{a}{b}}。 \quad (j)$$

对于两端不受约束的有限长圆筒, 将式(j)代入式(g)和式(i), 进行积分后加以整理, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{2(1-\mu)} \left[\begin{array}{l} \ln \frac{b}{\rho} - \frac{b^2}{\rho^2} - 1 \\ \ln \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} - 1 \end{array} \right], \\ \sigma_\varphi &= -\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{2(1-\mu)} \left[\begin{array}{l} \ln \frac{b}{\rho} - 1 + \frac{b^2}{\rho^2} + 1 \\ \ln \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - 1 \end{array} \right], \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

$$\sigma_z = -\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{2(1-\mu)} \left[\begin{array}{l} 2\ln \frac{b}{\rho} - 1 \\ \ln \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - 1 \end{array} \right], \quad (l)$$

当 $T_a > T_b$ 时, 应力分布大致如图 6-5 所示。在圆筒的外表面,

$$(\sigma_\varphi)_{\rho=a} = (\sigma_z)_{\rho=a} = -\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{2(1-\mu)} \left[\begin{array}{l} 2\frac{b^2}{a^2} - 1 \\ \frac{b^2}{a^2} - 1 - \ln \frac{b}{a} \end{array} \right],$$

$$(\sigma_\varphi)_{\rho=b} = (\sigma_z)_{\rho=b} = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{2(1-\mu)} \left[\begin{array}{l} 1 \\ \ln \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} - 1 \end{array} \right].$$

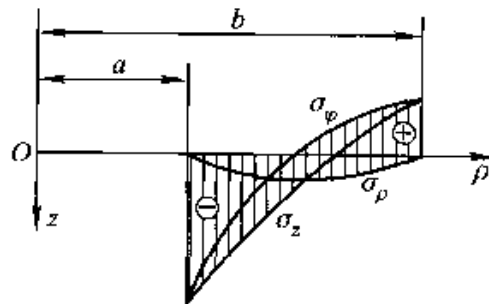


图 6-5

对于无限长的圆筒或两端受完全约束的有限长圆筒, 应力分量 σ_r 和 σ_φ 的数值与上相同。但是, σ_z 须由式 (h) 得来, 而更简单些是直接由 (6-32) 式得来。将式 (k) 代入 (6-32) 式, 得

$$\sigma_z = -\frac{\mu E\alpha(T_a - T_b)}{2(1-\mu)} \left[\begin{array}{l} 2\ln \frac{b}{\rho} - 1 \\ \ln \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - 1 \end{array} \right] - E\alpha T_b$$

在圆筒的内外表面, 由上式得

$$(\sigma_r)_{\rho=a} = -\frac{\mu E \alpha (T_a - T_b)}{2(1-\mu)} \left[\frac{2 \frac{b^2}{a^2}}{\frac{b^2}{a^2} - 1} - \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \right] - E \alpha T_a,$$

$$(\sigma_r)_{\rho=b} = \frac{\mu E \alpha (T_a - T_b)}{2(1-\mu)} \left[-\frac{1}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{2}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right] - E \alpha T_b.$$

在加热以后而热流未稳定时，圆筒在任一瞬时的变温可用如下的经验公式近似地表示：

$$T = T_a \frac{\left(\frac{b}{\rho}\right)^n - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1} + T_b \frac{1 - \left(\frac{a}{\rho}\right)^n}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n},$$

其中的 n 为一正整数。对于加热后不久的瞬时，取较大的 n ，例如 6 到 8。对于以后的瞬时，取较小的 n 。对于温度接近稳定的瞬时，取 $n=1$ ，这时，上式给出的 T 值将非常接近式(j)给出的。

§ 6-8 楔形坝体中的温度应力

坝体的温度场，由于受到混凝土硬化发热的影响以及水温和气温变化的影响，分布复杂而且随时改变，要用通常的方法进行计算，是比较困难的。根据计算出来的变温来计算温度应力，将更加困难。因此，坝体温度应力的实际问题，只可能用数值法进行计算。但是，对于简单形状的坝体和简单的变温分布，用函数求解还是可能的。

马斯洛夫曾经针对两种特别简化了的变温分布，就平面应力状态分析了无限长楔形坝体的温度应力。本节中将介绍他所得的成果。

楔形坝体的中心角取为 2β ，坝体的中心轴取为 x 轴，图 6-6。首先，假定变温在中心轴上为 $T=T_0$ ，在两边为 $T=0$ ，按 $\cos\varphi$ 的一次式变化：

$$T = T_0 \frac{\cos\varphi - \cos\beta}{1 - \cos\beta}. \quad (a)$$

按照方程(6-28)，位移势函数 ψ 所应满足的方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi = (1+\mu) \alpha T_0 \frac{\cos\varphi - \cos\beta}{1 - \cos\beta}, \quad (b)$$

取位移势函数为

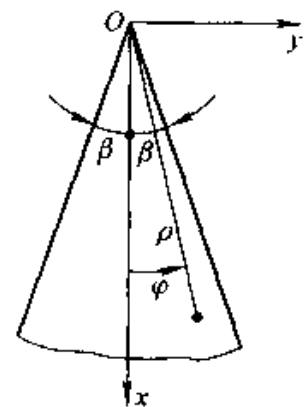


图 6-6

$$\psi = \rho^2 (C_1 \cos \varphi + C_2) \quad (c)$$

代入式(b), 得

$$3C_1 \cos \varphi + 4C_2 = (1 + \mu) \alpha T_0 \frac{\cos \varphi - \cos \beta}{1 - \cos \beta}$$

将两边的 $\cos \varphi$ 项及常数项进行对比, 得到

$$C_1 = \frac{(1 + \mu) \alpha T_0}{3(1 - \cos \beta)},$$

$$C_2 = -\frac{(1 + \mu) \alpha T_0 \cos \beta}{4(1 - \cos \beta)}$$

代回式(c), 得

$$\psi = \frac{(1 + \mu) \alpha T_0}{1 - \cos \beta} \rho^2 \left(\frac{1}{3} \cos \varphi - \frac{1}{4} \cos \beta \right)$$

于是可由(6-29)式得出相应于位移特解的应力分量:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_\rho &= -\frac{E\alpha T_0}{1 - \cos \beta} \left(\frac{1}{3} \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos \beta \right), \\ \sigma'_\varphi &= -\frac{E\alpha T_0}{1 - \cos \beta} \left(\frac{2}{3} \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos \beta \right), \\ \tau'_{\rho\varphi} = \tau'_{\varphi\rho} &= -\frac{E\alpha T_0}{1 - \cos \beta} \left(\frac{1}{3} \sin \varphi \right), \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

在边界上, 应力分量为如下的常量:

$$(\sigma'_\varphi)_{\varphi = \pm\beta} = -\frac{E\alpha T_0}{1 - \cos \beta} \left(\frac{1}{6} \cos \beta \right),$$

$$(\tau'_{\varphi\rho})_{\varphi = \pm\beta} = \mp \frac{E\alpha T_0}{1 - \cos \beta} \left(\frac{1}{3} \sin \beta \right)$$

由此可见, 为了满足边界条件, 相应于位移补充解的应力分量应当与 ρ 无关, 而只是 φ 的函数。于是可以利用 §4-9 中式(g)所示的应力分量。根据问题的对称性, 只须取 σ_ρ 及 σ_φ 的偶 φ 项和 $\tau_{\rho\varphi}$ 的奇 φ 项:

$$\sigma''_\rho = -2A \cos 2\varphi + 2D,$$

$$\sigma''_\varphi = 2A \cos 2\varphi + 2D,$$

$$\tau''_{\rho\varphi} = \tau''_{\varphi\rho} = 2A \sin 2\varphi$$

与式(d)相叠加, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{E\alpha T_0}{1-\cos\beta} \left(\frac{1}{3}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos\beta \right) - 2A\cos 2\varphi + 2D, \\ \sigma_\varphi &= -\frac{E\alpha T_0}{1-\cos\beta} \left(\frac{2}{3}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos\beta \right) + 2A\cos 2\varphi + 2D, \\ \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} &= -\frac{E\alpha T_0}{1-\cos\beta} \left(\frac{1}{3}\sin\varphi \right) + 2A\sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

应用边界条件

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi=\pm\beta} = 0, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\varphi=\pm\beta} = 0,$$

求出常数 $2A$ 及 $2D$, 再代回式(e), 即得温度应力

$$\sigma_\rho = \frac{E\alpha T_0 (\sin^2\varphi - \cos\beta\cos\varphi + \cos^2\beta)}{3\cos\beta(1-\cos\beta)},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E\alpha T_0 (\cos\varphi - \cos\beta)^2}{3\cos\beta(1-\cos\beta)},$$

$$\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = \frac{E\alpha T_0 \sin\varphi (\cos\varphi - \cos\beta)}{3\cos\beta(1-\cos\beta)}.$$

变温及温度应力的分布大致如图 6-7 所示。最大的拉应力是

$$(\sigma_\rho)_{\varphi=\pm\beta} = \frac{E\alpha T_0 (1 + \cos\beta)}{3\cos\beta},$$

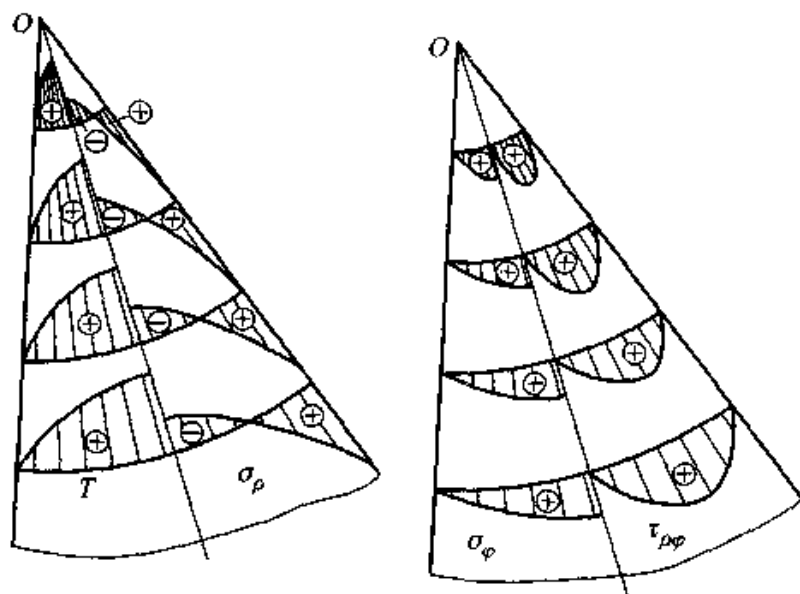


图 6-7

其次, 假定变温与 ρ 成正比, 并按 $\cos\varphi$ 的一次式变化:

$$T = \frac{T_0\rho(\cos\varphi - \cos\beta)}{h(1-\cos\beta)},$$

其中的 h 为某一指定长度, 例如坝高的一部分 (T_0 为 $\rho=h$ 及 $\varphi=0$ 处的变温)。按照方程(6-28), 位移势函数 ψ 应当满足下列条件:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \psi = \frac{(1+\mu)\alpha T_0 \rho (\cos \varphi - \cos \beta)}{h(1-\cos \beta)}.$$

取

$$\psi = \rho^3 (C_1 \cos \varphi + C_2),$$

代入上式, 求出 C_1 及 C_2 , 再应用公式(6-29), 得出相应于位移特解的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_\rho &= -\frac{E\alpha T_0 \rho}{h(1-\cos \beta)} \left(\frac{1}{4} \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos \beta \right), \\ \sigma'_\varphi &= -\frac{E\alpha T_0 \rho}{h(1-\cos \beta)} \left(\frac{3}{4} \cos \varphi - \frac{2}{3} \cos \beta \right), \\ \tau'_{\rho\varphi} &= \tau'_{\varphi\rho} = -\frac{E\alpha T_0 \rho}{h(1-\cos \beta)} \left(\frac{1}{4} \sin \varphi \right). \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

在边界上, 应力分量与 ρ 成正比:

$$\begin{aligned} (\sigma'_\varphi)_{\varphi=\pm\beta} &= -\frac{E\alpha T_0 \rho}{h(1-\cos \beta)} \left(\frac{1}{12} \cos \beta \right), \\ (\tau'_{\varphi\rho})_{\varphi=\pm\beta} &= \mp \frac{E\alpha T_0 \rho}{h(1-\cos \beta)} \left(\frac{1}{4} \sin \beta \right). \end{aligned}$$

由此可见, 为了满足边界条件, 对应于位移补充解的应力分量也应当与 ρ 成正比, 而对应的应力函数 Φ 应当是 ρ 的三次式:

$$\Phi = \rho^3 f(\varphi).$$

代入相容方程(4-6), 可以解出 $f(\varphi)$, 从而得出 Φ , 并由公式(4-5)求得应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma''_\rho &= -2\rho(3A\cos 3\varphi + 3B\sin 3\varphi - C\cos \varphi - D\sin \varphi), \\ \sigma''_\varphi &= 6\rho(A\cos 3\varphi + B\sin 3\varphi + C\cos \varphi + D\sin \varphi), \\ \tau''_{\rho\varphi} &= \tau''_{\varphi\rho} = 2\rho(3A\sin 3\varphi - 3B\cos 3\varphi + C\sin \varphi - D\cos \varphi). \end{aligned}$$

由于对称, 只须取 σ''_ρ 及 σ''_φ 中的偶 φ 项和 $\tau''_{\rho\varphi}$ 中的奇 φ 项, 也就是取 $B = D = 0$, 将剩下的各项与式(f)相叠加, 得

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{E\alpha T_0 \rho}{h(1-\cos \beta)} \left(\frac{1}{4} \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos \beta \right) - 2\rho(3A\cos 3\varphi - C\cos \varphi), \\ \sigma_\varphi &= -\frac{E\alpha T_0 \rho}{h(1-\cos \beta)} \left(\frac{3}{4} \cos \varphi - \frac{2}{3} \cos \beta \right) + 6\rho(A\cos 3\varphi + C\cos \varphi), \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = -\frac{E\alpha T_0 \rho}{h(1-\cos \beta)} \left(\frac{1}{4} \sin \varphi \right) + 2\rho(3A\sin 3\varphi + C\sin \varphi). \end{aligned}$$

应用边界条件

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi=\pm\beta} = 0, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\varphi=\pm\beta} = 0,$$

求出常数 A 和 C ，再代回上式，即得温度应力：

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T_0 \rho (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos \varphi - \cos^3 \varphi)}{3h \cos^2 \beta (1 - \cos \beta)},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E\alpha T_0 \rho (\cos \beta - \cos \varphi)^2 (2 \cos \beta + \cos \varphi)}{3h \cos^2 \beta (1 - \cos \beta)},$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = \frac{E\alpha T_0 \rho (\sin^2 \beta - \sin^2 \varphi)}{3h \cos^2 \beta (1 - \cos \beta)}.$$

变温及温度应力的分布大致如图 6-8 所示。最大拉应力发生在边界上：

$$(\sigma_r)_{\varphi=\beta} = \frac{E\alpha T_0 \rho (1 + 2 \cos \beta)}{3h \cos \beta},$$

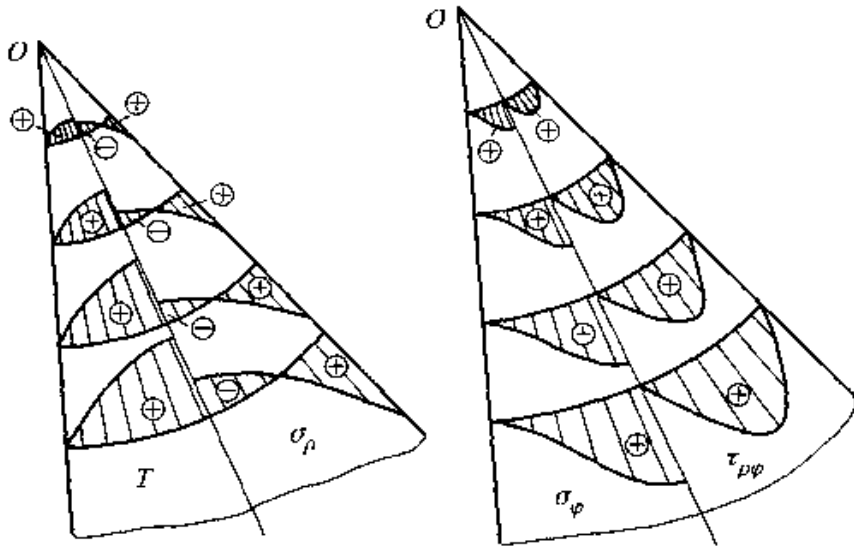


图 6-8

以上是针对平面应力问题进行分析的，因此，得出的解答只适用于具有伸缩缝的坝段。如果坝体并没有伸缩缝，而我们仍然把温度应力的问题近似地作为平面问题，则须按照平面应变问题来处理。这样，在以上的表达式中，须将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ，将 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ ，并将 α 换为 $(1+\mu)\alpha$ 。

习 题

6-1 设图 6-4 所示的矩形薄板中发生变温

$$T = T_0 \cos \frac{\pi y}{2b},$$

试求温度应力(假定 a 远大于 b)。

答案： $\sigma_x = E\alpha T_0 \left(\frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2b} \right)$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 。

6-2 设图 6-4 所示的矩形薄板中发生变温

$$T = -T_0 \frac{y^3}{b^3},$$

试求温度应力(假定 a 远大于 b)。

提示: 用应力函数 $\Phi = Cy^3$ 给出的应力分量作为相应于位移补充解的应力分量。

$$\text{答案: } \sigma_x = E\alpha T_0 \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{3}{5} \right) \frac{y}{b}, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

6-3 设图 6-4 所示的矩形薄板中发生变温

$$T = T_0 + T_1 \frac{x}{a} + T_2 \frac{y}{b},$$

其中的 T_0 、 T_1 、 T_2 均为常数, 试求温度应力。

$$\text{答案: } \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

6-4 设坝体内有半径为 a 的圆形孔道, 而孔道附近的变温可以近似地表示成为

$$T = -T_a \left(\frac{a}{\rho} \right),$$

其中 T_a 为孔边的变温, 而 ρ 为距孔道中心线的距离, 试求温度应力。

$$\text{答案: } \sigma_\rho = \frac{E\alpha T_a}{1-\mu} \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) \left(\frac{a}{\rho} \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{E\alpha T_a a^2}{1-\mu \rho^2}, \quad \sigma_r = \frac{E\alpha T_a a}{1-\mu \rho}.$$

6-5 同习题 6-4, 但 $T = -T_a \frac{a^3}{\rho^3}$ 。

$$\text{答案: } \sigma_\rho = \frac{E\alpha T_a}{1-\mu} \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) \frac{a^2}{\rho^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{E\alpha T_a}{1-\mu} \left(2 \frac{a}{\rho} - 1 \right) \frac{a^2}{\rho^2}, \quad \sigma_r = \frac{E\alpha T_a a^3}{1-\mu \rho^3}.$$

6-6 设图 6-6 所示的楔形坝体中发生变温

$$T = T_0 \frac{\cos 2\varphi - \cos 2\beta}{1 - \cos 2\beta},$$

试求温度应力, 并求出最大拉应力。

提示: 取 $\psi = \rho^2 (C_1 + C_2 \varphi \sin 2\varphi)$ 。

$$\text{答案: } (\sigma_\rho)_{\varphi=\beta} = \frac{E\alpha T_0 (2\beta - \sin 2\beta \cos 2\beta)}{2 \sin 2\beta (1 - \cos 2\beta)}.$$

第七章 平面问题的差分解

§ 7-1 差分公式的推导

自从弹性力学基本方程建立以来，这些方程在各种问题的边界条件下如何求解，曾经是很多数学工作者和力学工作者研究的内容。但是，对于工程上许多重要的问题，并没有能够得出函数式解答。因此，弹性力学问题的各种数值解法便具有重要的实际意义。差分法是沿用较久的一种数值解法。

所谓差分法，是把基本方程和边界条件（一般均为微分方程）近似地改用差分方程（代数方程）来表示，把求解微分方程的问题改换成为求解代数方程的问题。因此，在讲述差分法之前，先来导出弹性力学上常用的一些差分公式，以使用它们来建立差分方程。

我们在弹性体上用相隔等间距 h 而平行于坐标轴的两组平行线织成网格，图 7-1，网线的交点称为结点。设 $f=f(x, y)$ 为弹性体内的某一个连续函数，它可能是某一个应力分量或者位移分量，也可能是应力函数或者温度，等等。这个函数，在平行于 x 轴的一根网线上，例如在 3-0-1 上，它只随 x 坐标的改变而变化。在邻近结点 0 处，函数 f 可以展为泰勒级数如下：

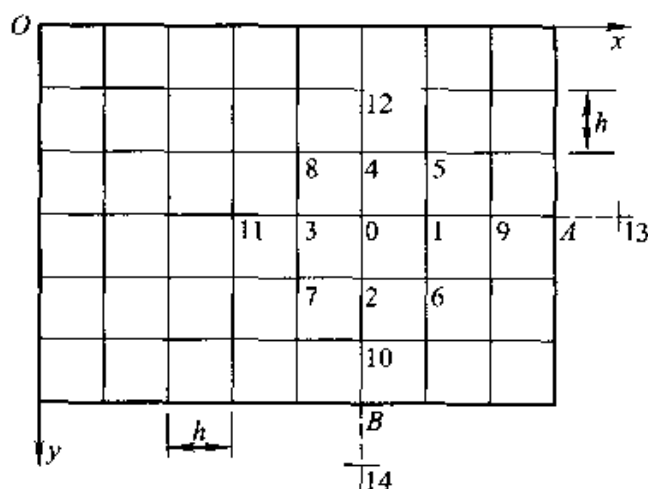


图 7-1

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 (x - x_0)^2 +$$

$$\frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_0 (x-x_0)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_0 (x-x_0)^4 + \dots \quad (a)$$

在下面，我们将只考虑离开结点 0 充分近的那些结点，如图 7-1 中所示，因而所用到的 x 值都和 x_0 相差不大，也就是说， $x-x_0$ 是充分小的。于是可以不计 $x-x_0$ 的三次幂及更高次幂的各项，而将式 (a) 简写为

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 (x-x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 (x-x_0)^2 \quad (b)$$

在结点 3 及结点 1， x 分别等于 x_0-h 及 x_0+h ，即， $x-x_0$ 分别等于 $-h$ 及 h 。代入式 (b)，得到

$$f_3 = f_0 - h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 \quad (c)$$

$$f_1 = f_0 + h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 \quad (d)$$

联立求解 $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0$ 及 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0$ ，即得对 x 的一阶和二阶导数的差分公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 = \frac{f_1 - f_3}{2h} \quad (7-1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{h^2} \quad (7-2)$$

同样，如果在网线 4-0-2 上取

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 (y-y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_0 (y-y_0)^2 \quad (e)$$

则得到对 y 的一阶和二阶导数的差分公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 = \frac{f_2 - f_4}{2h} \quad (7-3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{h^2} \quad (7-4)$$

公式 (7-1) 至 (7-4) 是基本差分公式，可以从而导出其他导数的差分公式。例如，利用 (7-1) 及 (7-3)，可以导出混合二阶导数的差分公式如下：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_0 &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right]_0 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_3}{2h} \\ &= \frac{\frac{f_6 - f_5}{2h} - \frac{f_7 - f_8}{2h}}{2h} = \frac{1}{4h^2} [(f_6 + f_8) - (f_5 + f_7)] \quad (7-5) \end{aligned}$$

又例如，用同样的方法，可以从公式(7-2)及(7-4)导出四阶导数的差分公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4} [6f_0 - 4(f_1 + f_3) + (f_2 + f_{11})], \\ \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^4} [4f_0 - 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + \\ &\quad (f_5 + f_6 + f_7 + f_8)], \\ \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4} [6f_0 - 4(f_2 + f_4) + (f_{10} + f_{12})]. \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

建议读者自行推导这些公式，以资练习。

差分公式(7-1)及(7-3)是以相隔 $2h$ 的两结点处的函数值来表示中间结点处的一阶导数值，可称为中点导数公式。有时也需要用到另一种形式的差分公式，它以相邻三结点处的函数值来表示一个端点处的一阶导数值，可称为端点导数公式，导出如下。

首先把导数 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ 用 f_0 、 f_1 、 f_2 来表示。为此，在式(b)中命 $x = x_0 + 2h$ ，即 $x - x_0 = 2h$ ，得出

$$f_2 = f_0 + 2h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + 2h^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \quad (f)$$

再从式(d)及式(f)中消去 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$ ，即得端点导数公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}. \quad (7-7)$$

同样也可以把导数 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ 用 f_0 、 f_1 、 f_{11} 来表示。为此，在式(b)中命 $x = x_0 - 2h$ ，即 $x - x_0 = -2h$ ，得出

$$f_{11} = f_0 - 2h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + 2h^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \quad (g)$$

再从式(c)及式(g)中消去 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$ ，又可得端点导数公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{3f_0 - 4f_1 + f_{11}}{2h}. \quad (7-8)$$

与上相似，也可以导出端点导数公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_{10}}{2h}, \quad (7-9)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{3f_0 - 4f_4 + f_{12}}{2h} \quad (7-10)$$

应当指出：中点导数公式与端点导数公式相比，精度较高，因为前者反映了结点两边的函数变化，而后者却只反映了结点一边的函数变化。据此，我们总是尽可能应用前者，而只有在无法应用前者时才不得不应用后者。

以上在导出差分公式时，是从式(b)或式(e)出发的，而在式(b)及式(e)中已经分别略去了 $x - x_0$ 或 $y - y_0$ 的三次幂及更高次幂的各项，使该二式中的 f 简化为 x 或 y 的二次函数。这就是说，在连续两段网线间距之内， f 已被当做按抛物线变化。因此，以上导出的差分公式常被称为抛物线差分公式。

用不同的方式，可以导出不同的差分公式。例如，我们可以在式(b)中把 $(x - x_0)^2$ 的项也略去不计，从而由式(c)及式(d)分别得出基本差分公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{f_0 - f_1}{h} \quad (h)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{f_1 - f_0}{h} \quad (i)$$

在这里，由于式(b)中的 f 被简化为 x 的线性函数，也就是说，在一段网格间距之内， f 已被当做按直线变化，因此，上列两个基本差分公式常被称为直线差分公式，式(h)称为向后线性差分公式，而式(i)称为向前线性差分公式。以这两个公式为基础，可以导出高阶导数的向后或向前的差分公式。但这种差分公式精度较差，因而很少采用。

又例如，我们还可以在式(a)中保留 $(x - x_0)^3$ 及 $(x - x_0)^4$ 的项，将该式应用于结点 1、3、9、11，得出 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ 、 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$ 、 $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0$ 、 $\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0$ 的四个方程，联立求解，从而得出四个基本差分公式。这种差分公式虽然比较精确，但也很少采用，因为每一公式涉及的结点太多，用起来很不方便。

§ 7-2 稳定温度场的差分解

本节中以无热源的、平面的、稳定的温度场为例，说明差分法的应用。

在无热源的平面稳定温度场中， $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$ ， $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ ， $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ，所以热传导微分方程(6-4)简化为调和方程 $\nabla^2 T = 0$ ，即

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (a)$$

为了用差分法求解，我们在温度场的域内织成网格，如图 7-1 所示。在任意一个结点，例如在结点 0，由差分公式(7-2)及(7-4)有

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{T_1 + T_3 - 2T_0}{h^2}, \quad (b)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{T_2 + T_4 - 2T_0}{h^2}. \quad (c)$$

代入由式(a)得来的 $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_0 = 0$ ，即得差分方程

$$4T_0 - T_1 - T_2 - T_3 - T_4 = 0. \quad (7-11)$$

如果一个温度场的全部边界都具有第一类边界条件，则所有边界结点处的 T 值都是已知的。这样，只须在每一个内结点处建立一个(7-11)型的差分方程，就可以由这些方程求得所有内结点处的未知 T 值。

对于具有第二类边界条件的边界结点 0，图 7-2a，由于该结点处的温度 T_0 是未知的，需要计算，因而也需要在该结点建立一个(7-11)型的差分方程。但这一方程中将含有边界外的虚结点 1 处的温度 T_1 。为了消去这个未知的 T_1 ，可利用边界条件(6-9)。假定该边界是垂直于 x 轴的，而且该边界的向外法线是沿 x 轴的正向，如图所示，则上述边界条件成为

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = (q_x)_0,$$

其中 $(q_x)_0$ 是结点 0 处的沿 x 方向的已知热流密度。对 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0$ 应用差分公式(7-1)，则上式成为

$$-\lambda \left(\frac{T_1 - T_3}{2h}\right) = (q_x)_0.$$

解出 T_1 ，代入(7-11)式，即得修正的第二类边界条件的边界点 0 的差分方程

$$4T_0 - T_2 - 2T_3 - T_4 = -\frac{2h}{\lambda}(q_x)_0. \quad (7-12)$$

如果 4-0-2 是绝热边界或对称轴，则有 $(q_x)_0 = 0$ ，而上式简化为

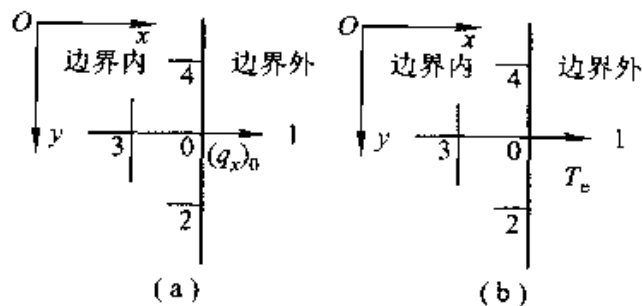


图 7-2

$$4T_0 - T_2 - 2T_3 - T_4 = 0。 \quad (7-13)$$

对于具有第三类边界条件的边界结点 0, 图 7-2b, 也须立出相应于未知值 T_0 的差分方程。为了消去该方程中的虚结点温度 T_1 , 可利用边界条件(6-12)而得

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = -\frac{\beta}{\lambda}(T_0 - T_c),$$

其中 T_c 为边界以外的介质的已知温度。应用差分公式(7-1), 可得

$$\frac{T_1 - T_3}{2h} = -\frac{\beta}{\lambda}(T_0 - T_c)。$$

解出 T_1 , 代入(7-11)式, 即得修正的第三类边界条件的边界点 0 的差分方程

$$\left(4 + \frac{2h\beta}{\lambda}\right)T_0 - T_2 - 2T_3 - T_4 = -\frac{2h\beta}{\lambda}T_c。 \quad (7-14)$$

当边界垂直于 y 轴时, 也极易导出与上式相似的修正差分方程。

至于具有第四类边界条件的边界结点, 在完全接触的情况下, 由于两个接触体的温度场是连续的, 如(6-14)式所示, 因此, 只要两个接触体具有相同的热性常数, 这个边界结点就和内结点完全一样。如果接触不完全, 或者两个接触体具有不同的热性常数, 则问题比较复杂, 这里不进行讨论。

作为简例, 设有矩形薄板, 图 7-3, 长 8 m, 宽 6 m, 右边界为绝热边界, 其余三边界上的已知结点温度标在各结点上(单位为 $^{\circ}\text{C}$), 试求板内的结点温度 T_a 至 T_i 。

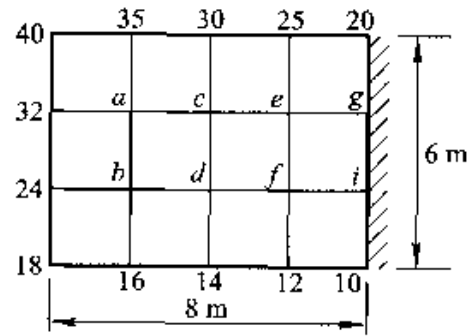


图 7-3

用 4×3 的网格, $h = 2$ m。按照(7-11)式立出结点 a 至 f 处的差分方程如下:

$$4T_a - T_b - T_c - 35 - 32 = 0,$$

$$4T_b - T_a - T_d - 16 - 24 = 0,$$

$$4T_c - T_a - T_d - T_e - 30 = 0,$$

$$4T_d - T_b - T_c - T_f - 14 = 0,$$

$$4T_e - T_c - T_f - T_g - 25 = 0,$$

$$4T_f - T_d - T_e - T_i - 12 = 0。$$

按照(7-13)式立出结点 g 及 i 处的差分方程如下:

$$4T_g - T_e - 2T_f - 20 = 0,$$

$$4T_i - T_g - 2T_f - 10 = 0。$$

联立求解上列 8 个方程, 得到(单位为 $^{\circ}\text{C}$):

$$\begin{aligned} T_a &= 28.51, & T_b &= 22.03, & T_c &= 24.99, & T_d &= 19.61, \\ T_e &= 21.84, & T_f &= 17.41, & T_g &= 19.97, & T_h &= 16.20. \end{aligned}$$

当温度场具有曲线边界或斜边界时，在靠近边界处将出现不规则的内结点，如图 7-4a 中的结点 0。我们首先假定边界 AB 是第一类边界。将温度 T 在邻近结点 0 处沿 x 方向展为泰勒级数，略去 $x - x_0$ 的三次幂及更高次幂的项，得到

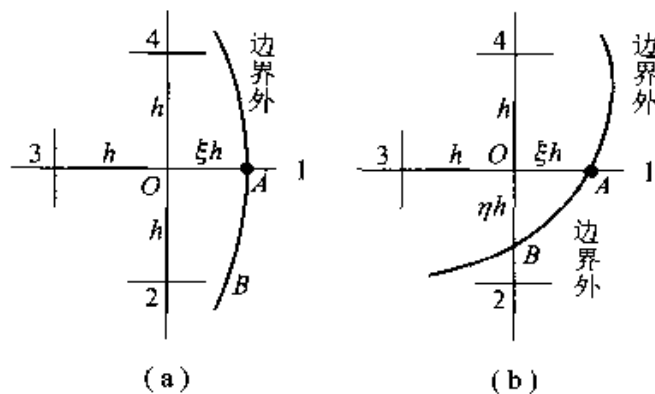


图 7-4

$$T = T_0 + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2.$$

命 x 依次等于 $x_0 - h$ 及 $x_0 + \xi h$ ，即 $x - x_0$ 依次等于 $-h$ 及 ξh ($0 < \xi < 1$)，得出

$$\begin{aligned} T_2 &= T_0 - h \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0, \\ T_4 &= T_0 + \xi h \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2} \xi^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0. \end{aligned}$$

从两式中消去 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0$ ，可以得到

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{2}{h} \left[\frac{1}{\xi(1+\xi)} T_2 + \frac{1}{1+\xi} T_4 - \frac{1}{\xi} T_0 \right], \quad (0 < \xi < 1)$$

至于 $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_0$ ，则仍然如式 (c) 所示。这样将得出代替 (7-11) 的差分方程

$$2\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) T_0 - T_2 - \frac{2}{1+\xi} T_4 - T_4 = \frac{2}{\xi(1+\xi)} T_2, \quad (0 < \xi < 1) \quad (7-15)$$

对于图 7-4b 中的不规则结点 0，同样可以导出代替 (7-11) 的差分方程

$$\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta}\right) T_0 - \frac{1}{1+\xi} T_2 - \frac{1}{1+\eta} T_4 = \frac{1}{\xi(1+\xi)} T_2 + \frac{1}{\eta(1+\eta)} T_4, \quad (7-16)$$

$$(0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1)$$

其次，假定图 7-4a 中的边界 AB 是第二类边界。这时，我们将温度 T 在

邻近结点 A 处沿 x 方向展为泰勒级数, 略去 $x - x_A$ 的三次幂及更高次幂的项, 得到

$$T = T_A + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A (x - x_A) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_A (x - x_A)^2.$$

命 $x - x_A$ 依次等于 $-\xi h$ 及 $-(1 + \xi)h$, 其中 $0 < \xi < 1$, 得到

$$T_0 = T_A - \xi h \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A + \frac{\xi^2 h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_A,$$

$$T_3 = T_A - (1 + \xi)h \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A + \frac{1}{2} (1 + \xi)^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_A.$$

从两式中消去 $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_A$, 可得

$$T_A = \frac{1}{1 + 2\xi} \left[(1 + \xi)^2 T_0 - \xi^2 T_3 + \xi(1 + \xi)h \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A \right], \quad (d)$$

再利用边界条件 $-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A = (q_x)_A$ 以消去 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A$, 即得

$$T_A = \frac{1}{1 + 2\xi} \left[(1 + \xi)^2 T_0 - \xi^2 T_3 - \xi(1 + \xi) \frac{h}{\lambda} (q_x)_A \right].$$

代入(7-15)式, 简化以后, 即得代替(7-11)的差分方程

$$\frac{4(1 + \xi)}{1 + 2\xi} T_0 - T_2 - \frac{2}{1 + 2\xi} T_3 - T_4 = -\frac{2}{1 + 2\xi} \frac{h}{\lambda} (q_x)_A. \quad (0 < \xi < 1) \quad (7-17)$$

对于图 7-4b 中的不规则结点 O , 也可以同样导出代替(7-11)的差分方程

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1 + 2\xi} + \frac{1}{1 + 2\eta} \right) T_0 - \frac{1}{1 + 2\xi} T_3 - \frac{1}{1 + 2\eta} T_4 \\ & = -\frac{h}{\lambda} \left[\frac{1}{1 + 2\xi} (q_x)_A + \frac{1}{1 + 2\eta} (q_x)_B \right] \end{aligned} \quad (7-18)$$

$(0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1)$

如果图 7-4a 中的边界 AB 是第三类边界, 则可利用边界条件(6-12)而得

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A = -\frac{\beta}{\lambda} (T_A - T_c).$$

代入式(d), 可得方程

$$T_A = \frac{1}{1 + 2\xi} \left[(1 + \xi)^2 T_0 - \xi^2 T_3 - \frac{\beta h}{\lambda} \xi(1 + \xi) (T_A - T_c) \right]. \quad (e)$$

$(0 < \xi < 1)$

解出 T_A , 再代入(7-15)式, 即得代替(7-11)的差分方程。如果图 7-4b 中的边界 AB 是第三类边界, 则除了方程(e)以外还可以得出相似的方程

$$T_B = \frac{1}{1+2\eta} \left[(1+\eta)^2 T_0 - \eta^2 T_4 - \frac{\beta h}{\lambda} \eta (1+\eta) (T_B - T_c) \right], \quad (f)$$

$$(0 < \eta < 1)$$

将方程(e)及(f)一并代入(7-16)式,亦可得出代替(7-11)的差分方程。

§ 7-3 不稳定温度场的差分解

本节中将简单介绍平面不稳定温度场的差分解法,主要目的在于说明,如何计算混凝土体中由于混凝土凝结发热而出现的不稳定温度场,供温度应力的计算及温度控制之用。

计算时,仍然和以前一样地在温度场上织成网格,图7-1。将平面不稳定温度场的微分方程(6-4)用于在任一瞬时的任一内结点0,得到

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_0 - a(\nabla^2 T)_0 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_0 \quad (a)$$

命结点0在 t 时的温度为 T_0 ,在 $t+\Delta t$ 时的温度为 T'_0 。对时间的导数 $\frac{\partial T}{\partial t}$,应用向前线性差分公式,得到

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_0 = \frac{T'_0 - T_0}{\Delta t} \quad (b)$$

对于 $\nabla^2 T$,仍然采用抛物线差分公式,得到

$$\begin{aligned} (\nabla^2 T)_0 &= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{T_1 + T_3 - 2T_0}{h^2} + \frac{T_2 + T_4 - 2T_0}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2} (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0) \end{aligned} \quad (c)$$

对于 $\frac{\partial \theta}{\partial t}$,也采用线性差分公式,即

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_0 = \frac{(\Delta \theta)_0}{\Delta t} \quad (d)$$

将式(b)、式(c)、式(d)代入式(a),即得内结点0的差分方程

$$T'_0 = \left(1 - \frac{4a\Delta t}{h^2} \right) T_0 + \frac{a\Delta t}{h^2} (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + (\Delta \theta)_0 \quad (7-19)$$

利用这一方程,可以根据结点0、1、2、3、4在 t 时的温度,以及结点0在时段 Δt 内的 $\Delta \theta$,求得结点0在 $t+\Delta t$ 时的温度。

对于具有第一类边界条件的边界结点0,由于结点温度 T'_0 是已知的,当然无须应用什么方程来求出它的温度。

对于具有第二类边界条件的边界结点 0, 图 7-2a, 由于它的温度 T'_0 是未知的, 因而需要用到(7-19)型的差分方程。但这一方程的右边将含有边界外的虚结点 1 处的温度 T_1 。为了消去这个未知温度, 可以和前一节中同样地利用边界条件

$$-\lambda \left(\frac{T_1 - T_3}{2h} \right) = (q_x)_0.$$

解出 T_1 , 代入(7-19), 即得修正的第二类边界条件的边界点 0 的差分方程

$$T'_0 = \left(1 - \frac{4a\Delta t}{h^2} \right) T_0 + \frac{a\Delta t}{h^2} \left[T_2 + 2T_3 + T_4 - \frac{2h}{\lambda} (q_x)_0 \right] + (\Delta\theta)_0. \quad (7-20)$$

对于具有第三类边界条件的边界结点 0, 图 7-2b, 也需要用到(7-19)型的差分方程。为了消去虚结点 1 处的温度 T_1 , 可以和前一节中同样地利用边界条件

$$\frac{T_1 - T_3}{2h} = -\frac{\beta}{\lambda} (T_0 - T_c).$$

解出 T_1 , 代入(7-19), 即得修正的第二类边界条件的边界点 0 的差分方程

$$T'_0 = \left(1 - \frac{4a\Delta t}{h^2} - \frac{2a\beta\Delta t}{h\lambda} \right) T_0 + \frac{a\Delta t}{h^2} (T_2 + 2T_3 + T_4) + \frac{2a\beta\Delta t}{h\lambda} T_c + (\Delta\theta)_0. \quad (7-21)$$

关于具有第四类边界条件的边界结点, 已在前一节中进行说明。总之, 不论边界条件如何, 都可以由 Δt 前的结点温度求得 Δt 后的结点温度。这种差分方程称为显式差分格式。具体计算时, 可将温度场的经历时间分为若干个相等或不相等的时段 Δt , 从初瞬时开始, 依次利用差分方程算出各个时段終了时的结点温度, 从而确定各结点处的变温过程。

按照差分理论, 为了保证结点温度收敛于正确解答, 必须取充分小的 Δt 值, 以使差分方程右边 T_0 的系数不致成为负值。据此, 对于内结点及具有第二类边界条件的边界结点, 可由差分方程(7-19)或(7-20)得收敛条件

$$1 - \frac{4a\Delta t}{h^2} \geq 0,$$

从而得

$$\Delta t \leq h^2/4a, \quad (7-22)$$

对于具有第三类边界条件的边界结点, 则可由差分方程(7-21)得收敛条件

$$1 - \frac{4a\Delta t}{h^2} - \frac{2a\beta\Delta t}{h\lambda} \geq 0,$$

从而得

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{4a}{h^2} + \frac{2a\beta}{\lambda h}} = \frac{h^2}{4a \left(1 + \frac{\beta h}{2\lambda}\right)} \quad (7-23)$$

观察(7-22)及(7-23)两式, 可见 Δt 总是决定于 β 值最大的、具有第三类边界条件的边界结点。

如果对于 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 采用向后差分公式, 则每一个差分方程中将包含不止一个结点而是多个结点在 Δt 后的温度, 因而整个温度场内各结点处的差分方程成为联立方程; 对于每一个时段 Δt , 都要求解一次联立方程。这种差分方程称为隐式差分格式。这样, 虽然由于没有收敛条件的限制, Δt 可以取得大一些, 但计算工作量仍然可能很大。

作为算例, 设有一混凝土墩, 其水平横截面为 $1.6 \text{ m} \times 1.6 \text{ m}$ 的正方形。混凝土的浇注温度(初始温度)为 2°C , 浇注以后, 表面的温度也大致保持为 2°C (第一类边界条件)。混凝土的导温系数取为 $a = 0.00334 \text{ m}^2/\text{h}$ 。试用差分法计算混凝土凝结发热期间的不稳定温度场。

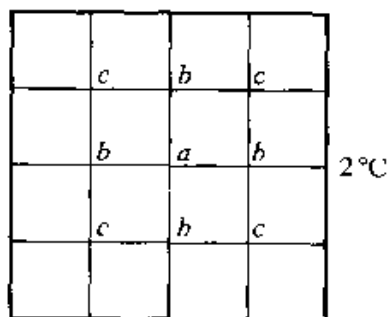


图 7-5

假定混凝土墩的高度远大于 1.6 m , 因而该温度场的问题可以近似地作为平面问题。在横截面上织成 $h = 0.4 \text{ m}$ 的 4×4 网格, 图 7-5。在图上, 凡是根据对称条件看出温度应当相同的结点, 均用相同的字母标明。按照公式(7-22), 计算的时段应取为

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{4a} = \frac{0.4^2}{4 \times 0.00334} = 12.0 \text{ h}。$$

现在取 $\Delta t = 6.0 \text{ h}$, 从而有

$$\frac{4a\Delta t}{h^2} = 0.5, \quad \frac{a\Delta t}{h^2} = 0.125。$$

按照(7-19)式立出差分方程:

$$T'_a = (1 - 0.5)T_a + 0.125(4T_b) + (\Delta\theta)_a,$$

$$T'_b = (1 - 0.5)T_b + 0.125(T_a + 2T_c + 2) + (\Delta\theta)_b,$$

$$T'_c = (1 - 0.5)T_c + 0.125(2T_b + 2 \times 2) + (\Delta\theta)_c。$$

由于全部混凝土均属于同一龄期, 故有 $(\Delta\theta)_a = (\Delta\theta)_b = (\Delta\theta)_c = \Delta\theta$ 。于是上列三式简化为

$$\left. \begin{aligned} T'_a &= 0.5T_a + 0.5T_b + \Delta\theta, \\ T'_b &= 0.5T_b + 0.125T_a + 0.25T_c + 0.25 + \Delta\theta, \\ T'_c &= 0.5T_c + 0.25T_b + 0.5 + \Delta\theta. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

假定由混凝土绝热温升试验得来的数据如下表中的前三行所示：

t (h)	0	6.0	12.0	18.0	24.0	30.0	36.0	42.0	48.0
θ (°C)	0	5.5	8.0	9.7	10.8	11.6	12.4	13.1	13.8
$\Delta\theta$ (°C)		5.5	2.5	1.7	1.1	0.8	0.8	0.7	0.7
结点 a	2.00	7.50	10.00	11.36	11.79	11.69	11.47	11.11	10.75
结点 b	2.00	7.50	9.31	10.01	9.99	9.65	9.35	8.99	8.69
结点 c	2.00	7.50	8.63	8.84	8.52	8.06	7.74	7.41	7.15

按照式(e)进行分时段计算, 结果如下:

第一时段($t=0$ 至 $t=6.0$), $\Delta\theta=5.5$ °C,

$$T_a = T_b = T_c = 2.00 \text{ (即初始温度),}$$

$$T'_a = T'_b = T'_c = 2.00 + 5.5 = 7.50 \text{ °C.}$$

第二时段($t=6.0$ 至 $t=12.0$), $\Delta\theta=2.5$ °C,

$$T_a = T_b = T_c = 7.50 \text{ °C,}$$

$$T'_a = 10.00 \text{ °C,} \quad T'_b = 9.31 \text{ °C,} \quad T'_c = 8.63 \text{ °C.}$$

对其余各时段进行同样的计算, 结果如上表中的后三行所示。图7-6约略示出三结点处温度变化的过程。

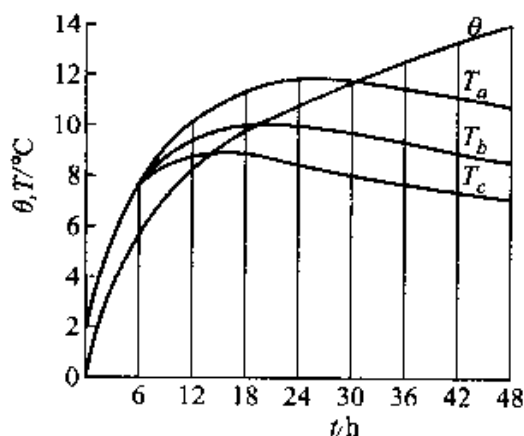


图 7-6

§ 7-4 应力函数的差分解

在 § 2-12 中已经说明, 在不计体力的情况下, 平面问题中的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 可以用应力函数 Φ 的二阶导数表示如下:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (a)$$

如果在弹性体上织成如图 7-1 所示的网格,应用差分公式(7-4)、(7-2)、(7-5),就可以把任一结点 0 处的应力分量表示成为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{1}{h^2} [(\Phi_2 + \Phi_4) - 2\Phi_0], \\ (\sigma_y)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{1}{h^2} [(\Phi_1 + \Phi_3) - 2\Phi_0], \\ (\tau_{xy})_0 &= \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 = \frac{1}{4h^2} \cdot [(\Phi_5 + \Phi_7) - (\Phi_6 + \Phi_8)]. \end{aligned} \right\} \quad (7-24)$$

可见,只要已知各结点处的 Φ 值,就可以求得各结点处的应力分量。如果有常量体力的作用,可先将它变换为面力的作用,如 § 2-11 中所述。

为了求得弹性体边界以内各结点处的 Φ 值,可以利用应力函数的重调和方程,但须首先把它变换为差分方程。为此,要把差分公式(7-6)代入 $(\nabla^4 \Phi)_0 = 0$, 即

$$\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \right)_0 + 2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right)_0 = 0.$$

这样就得出

$$20\Phi_0 - 8(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4) + 2(\Phi_5 + \Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_8) + (\Phi_9 + \Phi_{10} + \Phi_{11} + \Phi_{12}) = 0. \quad (7-25)$$

对于弹性体边界以内的每一结点,都可以建立这样一个差分方程。但是,对于边界内一行的(距边界为 h 的)结点,建立的差分方程中还将包含边界上各结点处的 Φ 值,并包含边界外一行的虚结点处的 Φ 值。

为了求得边界上各结点处的 Φ 值,须要应用应力边界条件(2-18),即

$$l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s = \bar{f}_x, \quad m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s = \bar{f}_y.$$

利用式(a),可将它变换成为

$$\left. \begin{aligned} l \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_s - m \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_s &= \bar{f}_x, \\ m \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_s - l \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_s &= \bar{f}_y. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

但由图 7-7 可见

$$l = \cos(N, x) = \cos \alpha = \frac{dy}{ds},$$

$$m = \cos(N, y) = \sin \alpha = -\frac{dx}{ds},$$

因此, 式(b)可以改写成为

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_s + \frac{dx}{ds} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_s &= \bar{f}_y, \\ -\frac{dx}{ds} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_s - \frac{dy}{ds} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_s &= \bar{f}_x, \end{aligned}$$

或

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s = \bar{f}_x, \quad -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_s = \bar{f}_y, \quad (c)$$

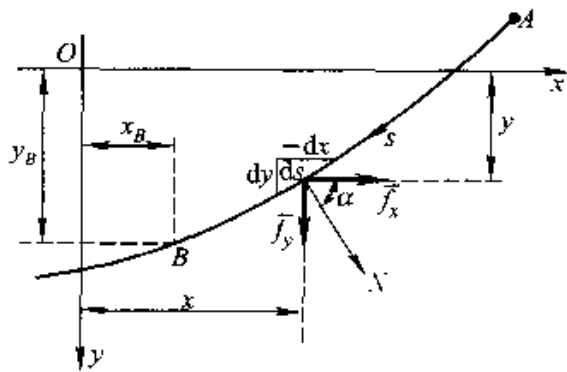


图 7-7

将式(c)对 s 积分, 从 A 点到 B 点, 得

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_B = \int_A^B \bar{f}_x ds, \quad -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B = \int_A^B \bar{f}_y ds,$$

或

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_B &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A + \int_A^B \bar{f}_x ds, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A - \int_A^B \bar{f}_y ds. \end{aligned} \quad (d)$$

另一方面, 因为 $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$, 故由分部积分得

$$(\Phi)_1^B = \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A - \int_A^B x \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) ds + \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A - \int_A^B y \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) ds,$$

或将式(c)代入而得

$$(\Phi)_1^B = \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A + \int_A^B x \bar{f}_x ds + \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A - \int_A^B y \bar{f}_y ds,$$

也就是

$$\Phi_B - \Phi_A = x_B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B - x_A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A + \int_A^B x \bar{f}_x ds +$$

$$y_B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_B - y_A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A - \int_A^B y \bar{f}_x ds.$$

再将式(d)代入, 得

$$\begin{aligned} \Phi_B - \Phi_A &= x_B \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A - \int_A^B \bar{f}_y ds \right] - x_A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A + \int_A^B x \bar{f}_x ds + \\ & y_B \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A + \int_A^B \bar{f}_x ds \right] - y_A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A - \int_A^B y \bar{f}_x ds, \end{aligned}$$

从而得出

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \Phi_A + (x_B - x_A) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A + (y_B - y_A) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A + \\ & \int_A^B (y_B - y) \bar{f}_x ds + \int_A^B (x - x_B) \bar{f}_y ds. \end{aligned} \quad (e)$$

由式(e)及式(d)可见, 设已知 Φ_A 、 $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A$ 、 $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A$, 即可根据面力分量 \bar{f}_x 及 \bar{f}_y 求得 Φ_B 、 $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B$ 、 $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_B$ 。但在 § 3-1 中已经说明, 把应力函数 Φ 加上一个线性函数, 并不影响应力, 因此, 我们可以假想把函数 Φ 加上 $a + bx + cy$, 然后调整 a 、 b 、 c 三个数值, 使得 $\Phi_A = 0$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A = 0$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A = 0$ 。于是式(d)及式(e)即简化为

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_B = \int_A^B \bar{f}_x ds, \quad (7-26)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B = - \int_A^B \bar{f}_y ds, \quad (7-27)$$

$$\Phi_B = \int_A^B (y_B - y) \bar{f}_x ds + \int_A^B (x - x_B) \bar{f}_y ds. \quad (7-28)$$

以上是针对单连体导出的结果。对于多连体, 情况就不像这样简单。当我们在某一个连续边界 s 上任意选定基点 A 并取 $\Phi_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A = 0$ 以后, 应力函数 Φ 就不再具有任意性, 它在弹性体的任何一点都有了- -定的数值。因此, 对于另一个连续边界 s_1 上任选的基点 A_1 , 就不能再取 $\Phi_{A_1} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{A_1} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{A_1} = 0$ 。只有应用位移单值条件, 才能确定 Φ_{A_1} 、 $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{A_1}$ 、 $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{A_1}$, 从而求出 s_1 上其他各点的 Φ 值、 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 值、 $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ 值。而且, 由于 Φ_{A_1} 、 $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{A_1}$ 、 $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{A_1}$ 一般都不等于零, 于是只能直接应用公式(d)和(e), 而不能应用简化了的公式(7-26)至(7-28)。这就使得应力函数的差分解在多连体问题中应用起来很不

方便。

观察图 7-7, 可见式(7-26)右边的积分式表示 A 与 B 之间的、 x 方向的面力之和, 式(7-27)右边的积分式表示 A 与 B 之间的、 y 方向的面力之和, 式(7-28)右边的积分式表示 A 与 B 之间的面力对于 B 点的矩(在如图 7-7 所示的 x 轴向右而 y 轴向下的坐标系中, 这个矩以顺时针转向为正)。

至于边界外一行的(距边界为 h 的)虚结点处的 Φ 值, 则可用函数 Φ 在边界上的导数值和边界内一行的各结点处的 Φ 值来表示。例如, 对于图 7-1 中的虚结点 13 及 14, 因为有

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_A = \frac{\Phi_{13} - \Phi_9}{2h}, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_B = \frac{\Phi_{14} - \Phi_{10}}{2h}.$$

所以有

$$\Phi_{13} = \Phi_9 + 2h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_A, \quad \Phi_{14} = \Phi_{10} + 2h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_B. \quad (7-29)$$

在实际计算时, 可采取步骤如下: (1) 在边界上任意选定一个结点作为基点 A , 取 $\Phi_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_A = 0$, 然后由面力的矩及面力之和算出边界上所有各结点处的 Φ 值, 以及应用公式(7-29)时所必需的一些 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 值及 $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ 值, 即垂直于边界方向的导数值。(2) 应用公式(7-29), 将边界外一行各虚结点处的 Φ 值用边界内的相应结点处的 Φ 值来表示。(3) 对边界内的各结点建立差分方程(7-25), 联立求解这些结点处的 Φ 值。(4) 按照公式(7-29), 算出边界外一行的各虚结点处的 Φ 值。(5) 按照公式(7-24)计算应力分量。

如果一部分边界是曲线的, 或是不与坐标轴正交, 则边界附近将出现不规则的内结点, 如图 7-8 中的结点 0。对于这样的结点, 差分方程(7-25)必须加以修正。至于更靠近边界的结点 1, 则根本不把它当做内结点看待, 也就是, 不把这个结点处的 Φ 值(即 Φ_1) 作为一个独立的未知值, 而把它用 Φ_0 来表示, 进行如下。

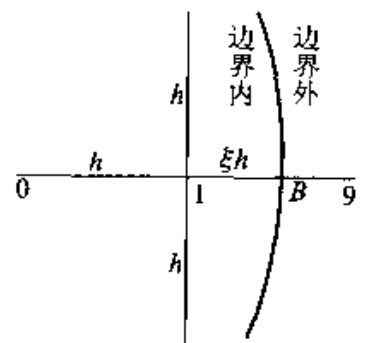


图 7-8

在 B 点附近, 把应力函数 Φ 沿 x 方向展为泰勒级数, 不计 $x - x_B$ 的三次幂及更高次幂, 得到

$$\Phi = \Phi_B + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B (x - x_B) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_B (x - x_B)^2.$$

命 x 依次等于 $x_B - \xi h + h$ 、 $x_B - \xi h$ 、 $x_B - (h + \xi h)$, 也就是命 $x - x_B$ 依次等于 $(1 - \xi)h$ 、 $-\xi h$ 、 $-(1 + \xi)h$, 得出

$$\Phi_0 = \Phi_B + (1 - \xi)h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B + \frac{1}{2} (1 - \xi)^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_B, \quad (f)$$

$$\Phi_1 = \Phi_B - \xi h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B + \frac{1}{2} \xi^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_B, \quad (g)$$

$$\Phi_0 = \Phi_B - (1 + \xi)h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B + \frac{1}{2} (1 + \xi)^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_B, \quad (h)$$

现在,首先从式(f)及式(h)中消去 $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_B$, 然后从式(g)及式(h)中消去

$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B$, 得到

$$\Phi_0 = \frac{4\xi}{(1 + \xi)^2} \Phi_B + \frac{2(1 - \xi)}{1 + \xi} h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B + \frac{(1 - \xi)^2}{(1 + \xi)^2} \Phi_0, \quad (i)$$

$$\Phi_1 = \frac{1 + 2\xi}{(1 + \xi)^2} \Phi_B - \frac{\xi}{1 + \xi} h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B + \frac{\xi^2}{(1 + \xi)^2} \Phi_0, \quad (j)$$

应用差分方程(7-25)时, 其中的 Φ_0 及 Φ_1 应当如式(i)及式(j)所示。当 $\xi = 0$ 时, 结点 B 与结点 1 重合, 式(j)成为 $\Phi_1 = \Phi_B$, 不起作用, 而式(i)成为 $\Phi_0 = \Phi_B + 2h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B$, 与(7-29)中第一式的意义相同。

§ 7-5 应力函数差分解的实例

设有正方形的混凝土深梁, 图 7-9, 上边受有均布向下的铅直荷载 q , 由下角点处的反力维持平衡, 试用应力函数的差分解求出应力分量。

在这里, 假定反力集中作用在一点, 当然不能符合实际情况。但是, 这里的主要问题在于求出梁底中点 A 附近的拉应力, 而反力的分布方式对于这个拉应力的影响是不会很大的。因此, 为了计算简便, 就假定反力是集中力。

取坐标轴如图所示, 取网格间距 h 等于六分之一边长。由于对称, 只计算梁的左一半。现在按前一节中所说的步骤进行计算如下。

(1) 取梁底的中点 A 作为基点, 取

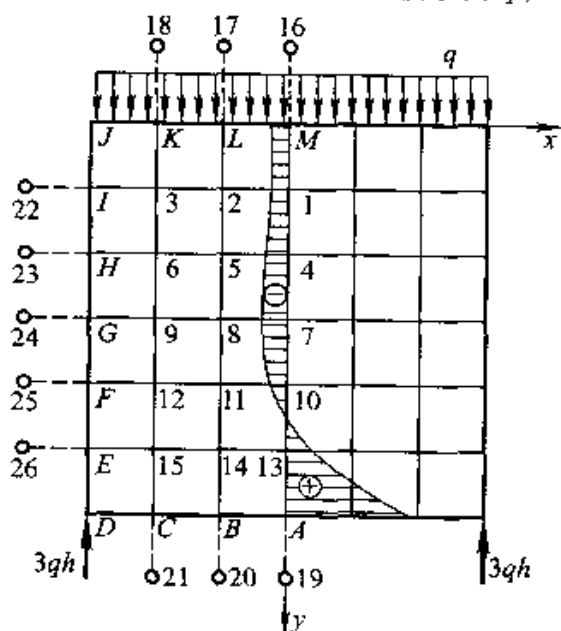


图 7-9

$\Phi_{,1} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{,1} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{,1} = 0$, 计算边界上所有各结点处的 Φ 值以及必需的 $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ 值和 $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ 值, 列表如下(不必需的导数值没有计算, 在表中用短横线表示)。

结点	A	B, C	D	E, F, G, H, I	J	K	L	M
$\frac{\partial\Phi}{\partial x}$	0	—	—	3qh	—	—	—	—
$\frac{\partial\Phi}{\partial y}$	0	0	—	—	—	0	0	0
Φ	0	0	0	0	0	2.5qh ²	4.0qh ²	4.5qh ²

(2) 将边界外一行各个虚结点处的 Φ 值(Φ_{16} 至 Φ_{26})用边界内一行各结点处的 Φ 值表示。在上下两边, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$, 所以有

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{16} &= \Phi_1, & \Phi_{17} &= \Phi_2, & \Phi_{18} &= \Phi_3, \\ \Phi_{19} &= \Phi_{13}, & \Phi_{20} &= \Phi_{14}, & \Phi_{21} &= \Phi_{15} \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

在左边, $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 3qh$, 所以有

$$\Phi_3 = \Phi_{22} + 2h \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)_1 = \Phi_{22} + 2h(3qh) = \Phi_{22} + 6qh^2,$$

即

$$\Phi_{22} = \Phi_3 - 6qh^2. \quad (\text{b})$$

同样有

$$\Phi_{23,24,25,26} = \Phi_{6,9,12,15} - 6qh^2. \quad (\text{c})$$

(3) 对边界内的各结点建立差分方程。例如, 对结点 1, 注意对称性, 由公式(7-25)得

$$20\Phi_1 - 8(2\Phi_2 + \Phi_4 + \Phi_M) + 2(2\Phi_5 + 2\Phi_L) + (2\Phi_3 + \Phi_7 + \Phi_{16}) = 0.$$

将上表中 Φ_M 及 Φ_L 的已知值代入, 并注意式(a)中的 $\Phi_{16} = \Phi_1$, 得

$$21\Phi_1 - 16\Phi_2 + 2\Phi_3 - 8\Phi_4 + 4\Phi_5 + \Phi_7 - 20qh^2 = 0. \quad (\text{d})$$

又例如, 对结点 15, 得

$$20\Phi_{15} - 8(\Phi_{12} + \Phi_{14} + \Phi_C + \Phi_E) + 2(\Phi_{11} + \Phi_B + \Phi_D + \Phi_I) + (\Phi_9 + \Phi_{13} + \Phi_{21} + \Phi_{26}) = 0.$$

将上表中的 Φ_C 、 Φ_E 、 Φ_B 、 Φ_D 、 Φ_I 代入, 并注意式(a)中的 $\Phi_{21} = \Phi_{15}$ 及式(c)中的 $\Phi_{26} = \Phi_{15} - 6qh^2$, 得

$$\Phi_9 + 2\Phi_{11} - 8\Phi_{12} + \Phi_{13} - 8\Phi_{14} + 22\Phi_{15} - 6qh^2 = 0. \quad (\text{e})$$

像(d)和(e)这样的方程共有15个,其中包含15个未知值, Φ_1 至 Φ_{15} 。联立求解,得(以 qh^2 单位):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 4.36, & \Phi_2 &= 3.89, & \Phi_3 &= 2.47, \\ \Phi_4 &= 3.98, & \Phi_5 &= 3.59, & \Phi_6 &= 2.35, \\ \Phi_7 &= 3.29, & \Phi_8 &= 3.03, & \Phi_9 &= 2.10, \\ \Phi_{10} &= 2.23, & \Phi_{11} &= 2.13, & \Phi_{12} &= 1.63, \\ \Phi_{13} &= 0.92, & \Phi_{14} &= 0.94, & \Phi_{15} &= 0.88.\end{aligned}$$

(4) 计算边界外一行各结点处的 Φ 值。由(a)、(b)、(c)式得(以 qh^2 为单位):

$$\begin{aligned}\Phi_{16} &= 4.36, & \Phi_{17} &= 3.89, & \Phi_{18} &= 2.47, \\ \Phi_{19} &= 0.92, & \Phi_{20} &= 0.94, & \Phi_{21} &= 0.88, \\ \Phi_{22} &= -3.53, & \Phi_{23} &= -3.65, & \Phi_{24} &= -3.90, \\ \Phi_{25} &= -4.37, & \Phi_{26} &= -5.12.\end{aligned}$$

(5) 计算应力。例如,对于结点 M ,由公式(7-24)可得

$$\begin{aligned}(\sigma_x)_M &= \frac{1}{h^2} [(\Phi_1 + \Phi_{16}) - 2\Phi_M] \\ &= (4.36 + 4.36 - 2 \times 4.50)q \\ &= -0.28q.\end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}(\sigma_x)_{1,4,7,10,13,16} &= -0.24q, -0.31q, -0.37q, \\ &\quad -0.25q, 0.39q, 1.84q.\end{aligned}$$

沿着梁的中线 MA , σ_x 的变化如图7-9中的曲线所示。

如果按照材料力学中的公式计算弯应力 σ_x ,则得

$$(\sigma_x)_M = -0.75q, \quad (\sigma_x)_1 = 0.75q.$$

可见,对于像本例题中这样的深梁,用材料力学公式算出的应力,是远远不能反映实际情况的。

§ 7-6 温度应力问题的应力函数差分解

对于温度应力的平面问题,如果按应力求解,就要把那些用应力及变温表示形变的物理方程代入形变相容方程。在平面应力的情况下,这些物理方程是(6-16),即

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E} + \alpha T,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E} + \alpha T, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy},\end{aligned}$$

其中 T 是变温 (不是某一温度场中的温度)。代入形变相容方程 (2-22), 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E} + \alpha T\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\sigma_y - \mu\sigma_x}{E} + \alpha T\right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\right],\end{aligned}\quad (a)$$

另一方面, 在平衡微分方程 (2-2) 中, 命体力分量等于零, 得

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0.\quad (b)$$

式 (a) 及式 (b) 就是按应力求解时的基本微分方程。

利用平衡微分方程 (b), 可以简化相容方程 (a)。为此, 将 (b) 中的第一式及第二式分别对 x 及 y 求导, 然后相加, 得

$$2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}.$$

代入式 (a), 化简以后, 可见相容方程成为

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) + E\alpha\nabla^2 T = 0.\quad (c)$$

现在, 可以把式 (b) 和式 (c) 作为按应力求解时的基本微分方程。

在温度应力问题中, 没有体力作用, 因此, 也可以引用应力函数而使问题得到进一步的简化。命

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y},\quad (d)$$

则平衡微分方程 (b) 总能满足。代入式 (c), 就得出用应力函数表示的相容方程

$$\nabla^4\Phi + E\alpha\nabla^2 T = 0.\quad (e)$$

对于平面应变问题, 须将其中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu}$, α 换为 $(1+\mu)\alpha$ 。

在温度应力问题中, 面力分量 $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$ 。因此, 如果在边界上选定了某一基点 A , 取 $\Phi_A = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_A = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_A = 0$, 则在任意其他一点 B 都有 $\Phi_B = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_B = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_B = 0$ 。这就是说, 在边界的所有各点, 都有

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0.\quad (f)$$

于是, 求解温度应力的平面问题, 就简化为在式 (f) 所示的边界条件下求解微

分方程(e), 然后按式(d)求出应力分量。

用差分法求解温度应力时, 须将微分方程(e)化为差分方程。参阅图 7-1, 利用差分公式(7-2)及(7-4), 可见有

$$(\nabla^2 T)_0 = \frac{1}{h^2}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0); \quad (g)$$

利用差分公式(7-6), 可见有

$$(\nabla^4 \Phi)_0 = \frac{1}{h^4} [20\Phi_0 - 8(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4) + 2(\Phi_5 + \Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_8) + (\Phi_9 + \Phi_{10} + \Phi_{11} + \Phi_{12})]; \quad (h)$$

对于任一内结点 0, 由式(e)有

$$(\nabla^4 \Phi)_0 + E\alpha(\nabla^2 T)_0 = 0. \quad (i)$$

将式(g)及式(h)代入式(i), 即得所需的差分方程:

$$20\Phi_0 - 8(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4) + 2(\Phi_5 + \Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_8) + (\Phi_9 + \Phi_{10} + \Phi_{11} + \Phi_{12}) + E\alpha h^2(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0) = 0, \quad (7-30)$$

边界条件(f)也须化为差分形式。参阅图 7-1 及公式(7-29), 可见

$$\Phi_{13} = \Phi_9 + 2h\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_4, \quad \Phi_{14} = \Phi_{10} + 2h\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_B. \quad (j)$$

按照边界条件(f), 我们有 $\Phi_A = \Phi_B = 0$ 和

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_B = 0.$$

代入式(j), 即得边界条件的差分形式:

$$\Phi_A = \Phi_B = 0, \quad \Phi_{13} = \Phi_9, \quad \Phi_{14} = \Phi_{10}. \quad (7-31)$$

这就是说: 边界上各结点处的 Φ 值为零, 而边界外一行虚结点处的 Φ 值, 就等于边界内一行相对结点处的 Φ 值。

这样, 用差分法求解温度应力问题, 就是在(7-31)所示的边界条件下求解(7-30)型的差分方程。这些方程中只包含内结点处的 Φ 值作为未知值, 因而可以用来求解这些未知值, 从而用(7-24)式求得各结点处的应力分量。可见, 变温作用时的温度应力问题, 与荷载作用时的应力问题相比, 是比较简单的。

此外, 还可以指出, 由于无热源的平面稳定温度场满足调和方程, 因而两个这样的温度场之差也满足调和方程, 也就是说, 变温 T 将满足 $\nabla^2 T = 0$ 。于是, 在任一内结点 0 处将有 $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0 = 0$, 而(7-30)型的差分方程组将成为齐次线性方程组。应用边界条件(7-31)以后, 它们仍然是齐次线性方程组(没有自由项), 因而应力函数 Φ 只有零解, 应力分量也只有零解。于是得出如下的结论: 前后两个无热源的平面稳定温度场之差, 不会在没有边

界约束的单连体中引起任何温度应力(不论前一个稳定温度场经过怎样的不稳定过程而过渡到后一个稳定温度场)。

§ 7-7 位移的差分解

对于只具有应力边界条件的单连体受有常量体力时的平面问题,可以通过应力函数的差分解比较简便地求得应力的数值,如前面几节中所述。但是,对于多连体,则求解是比较繁的,因为这时要用到位移单值条件。当弹性体具有应力边界条件或混合边界条件时,特别是在体力并非常量情况下,则更难以利用应力函数的差分解。在另一方面,即使已经通过应力函数差分解求得应力的数值,要进一步求出位移,也是很繁的。

在以下几节中可见,如果利用位移的差分解,则不论弹性体是单连体还是多连体,也不论它具有何种边界,以及它所受的体力是否为常量,总可以比较简便地求得位移的数值,从而求得应力的数值。

按位移求解平面问题时,基本未知函数是位移分量 u 和 v 。因此,在利用位移差分解时,对于位移边界问题,只须把基本微分方程(2-20)变换为差分方程,并利用边界条件(2-17),就可以很简单地解决问题。对于应力边界问题和混合边界问题,当然也可以借助于应力边界条件(2-21)的差分形式来解决问题。但是,这时要在边界之外布置虚结点,而将虚结点处的位移分量表以边界结点及内结点处的位移分量。这就使得差分方程复杂化。因此,作者补充导出了不同于 § 7-1 中的一些差分公式,再根据“结点领域”的平衡条件,利用这些差分公式来导出各种情况下的差分方程。用这种差分方程来求解任何平面问题,都无须布置任何虚结点,因为差分方程中的未知值只是内结点及边界结点处的位移分量。

在导出上述差分方程时,需要用到函数 f (代表位移分量 u 或 v) 在非结点处的导数值。首先来说明如何求得 f 在网线上一点处的导数值。为此,设网线段 $0-1$ 上有一点 a , 图 7-10, 它距结点 0 的距离为 ξh 。我们规定:(一)函数 f 沿网线方向的导数,它在该网线上各点(不包括结点)处的数值取为常量,据此有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a = \frac{f_1 - f_0}{h} \quad (7-32)$$

(二)函数 f 在垂直于网线方向的导数,它在该网线上各点(不包括结点)处的数值取为按线性变化,据此有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_e = (1-\xi)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + \xi\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1, \quad (7-33)$$

其中, f 在结点处的导数值仍按差分公式(7-3)取为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{f_2 - f_1}{2h}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = \frac{f_6 - f_5}{2h},$$

对于网线段 0-2 上距结点 0 为 ηh 的一点 b , 图 7-10, 按照与上相同的规定和处理, 也可以得出

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_b = \frac{f_2 - f_0}{h}, \quad (7-34)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_b = (1-\eta)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_2, \quad (7-35)$$

其中

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{f_1 - f_3}{2h}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_2 = \frac{f_6 - f_7}{2h}.$$

这样就把 f 在网线上各点(非结点)处的导数值表以 f 在结点处的数值。此外, 我们再规定: (三)对于不在网线上的任一点 c , 图 7-10, 则仿照(7-33)及(7-35)取为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c &= (1-\xi)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_b + \xi\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_d, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_c &= (1-\eta)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_b + \eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_c. \end{aligned} \right\} \quad (7-36)$$

这样就把 f 在 c 点的导数值表以 f 在网线上四点处的导数值, 并可以从而表以 f 在结点处的数值:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c &= (1-\xi)\left(\frac{f_2 - f_0}{h}\right) + \xi\left(\frac{f_6 - f_1}{h}\right), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_c &= (1-\eta)\left(\frac{f_1 - f_0}{h}\right) + \eta\left(\frac{f_6 - f_2}{h}\right). \end{aligned} \right\} \quad (7-37)$$

某个结点的“领域”, 是指环绕该结点的那两段、三段或四段网线的垂直平分线所围成的区域。例如, 在图 7-11 中, ab 和 bc 是环绕着角隅结点 1 的两段网线 1-2 和 1-3 的垂直平分线, 因而该角隅结点的领域就是 $h/2 \times h/2$ 的正方形 $1abc$ 。又例如, ab 、 bd 、 de 是环绕着边界结点 2 的三段网线 2-1、2-4、2-5 的垂直平分线, 因而边界结点 2 的领域就是 $h \times h/2$ 的矩形 $abde$ 。再例如, bd 、 df 、 fg 、 gb 是环绕着内结点 4 的四段网线的垂直平分线, 因而内结点 4 的领域就是 $h \times h$ 的正方形 $bdfg$ 。

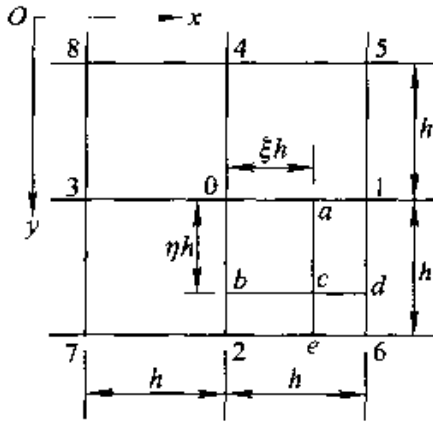


图 7-10

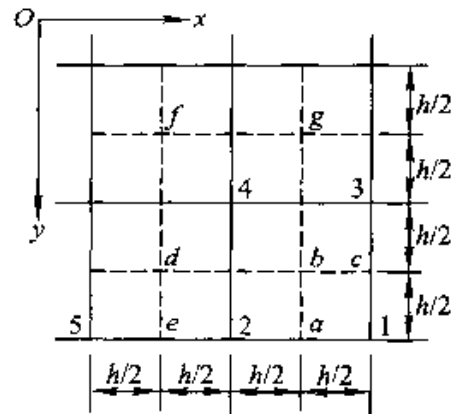


图 7-11

现在来利用上面的差分公式导出内结点处的差分方程。在图 7-12 中，内结点 0 的领域是虚线所示的 $h \times h$ 的正方形。在该领域上，作用于 x 方向的外力总和用 $(F_x)_0$ 代表，以沿 x 轴的正方向时为正；作用于 x 方向的应力有 $(\sigma_x)_a$ 、 $(\sigma_x)_b$ 、 $(\tau_{xy})_c$ 及 $(\tau_{xy})_d$ 。由该领域在 x 方向的平衡条件得

$$h(\sigma_x)_a - h(\sigma_x)_b + h(\tau_{xy})_c - h(\tau_{xy})_d + (F_x)_0 = 0$$

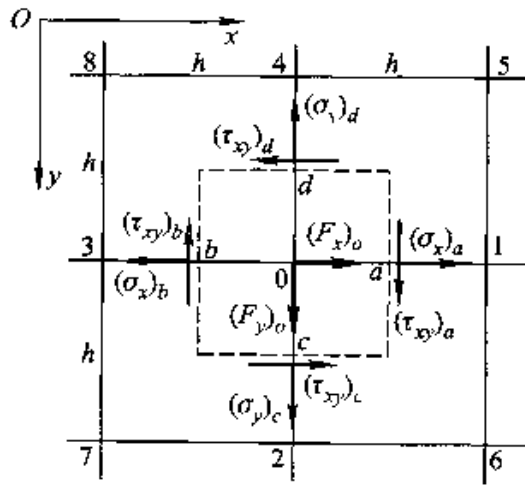


图 7-12

以平面应力问题为例，通过物理方程及几何方程，将应力分量表以位移分量的导数，上式成为

$$h \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_a \right] - h \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_b \right] +$$

$$h \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_c + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_c \right] - h \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_d + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_d \right] + (F_x)_0 = 0。$$

(7-38)

应用差分公式(7-32)至(7-37)，可以写出

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_a &= \frac{u_1 - u_0}{h}, & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_b &= \frac{u_0 - u_3}{h}, \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_c &= \frac{u_2 - u_0}{h}, & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_d &= \frac{u_0 - u_4}{h}, \\
 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_a &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{v_2 - v_4}{2h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_6 - v_5}{2h}\right), \\
 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{v_2 - v_4}{2h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_7 - v_8}{2h}\right), \\
 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_c &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{v_1 - v_3}{2h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_6 - v_7}{2h}\right), \\
 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_d &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{v_1 - v_3}{2h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_5 - v_8}{2h}\right)
 \end{aligned} \right\} (7-39)$$

代入(7-38)式, 简化以后, 即得与未知位移分量 u_0 相应的差分方程

$$\frac{E}{8(1-\mu^2)} [8(3-\mu)u_0 - 8(u_1 + u_3) - 4(1-\mu)(u_2 + u_4) + (1+\mu)(v_5 - v_6 + v_7 - v_8)] = (F_x)_{00} \quad (7-40)$$

与上相似, 可由该结点领域在 y 方向的平衡条件得出与未知位移分量 v_0 相应的差分方程

$$\frac{E}{8(1-\mu^2)} [8(3-\mu)v_0 - 8(v_2 + v_4) - 4(1-\mu)(v_1 + v_3) + (1+\mu)(u_5 - u_6 + u_7 - u_8)] = (F_y)_{00} \quad (7-41)$$

为了计算时的方便, 将上列两个差分方程分别用图 7-13 及图 7-14 中的差分图式来表示。

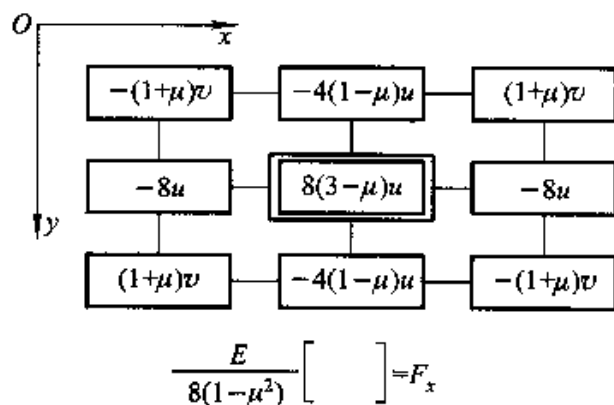


图 7-13

读者试证：如果应用差分公式(7-2)、(7-4)、(7-5)，把微分方程(2-20)变换为差分方程，注意到 $(f_x)_0 = (F_x)_0/h^2$ 及 $(f_y)_0 = (F_y)_0/h^2$ ，其中 $(f_x)_0$ 和 $(f_y)_0$ 表示体力分量 f_x 和 f_y 在0点的数值，将同样得到差分方程(7-40)及(7-41)。

现在来导出边界结点处的差分方程。设弹性体具有垂直于 x 轴的某一边界 AB ，图7-15，其向外法线系沿 x 轴的正向(结点2、0、4在边界上而结点7、3、8

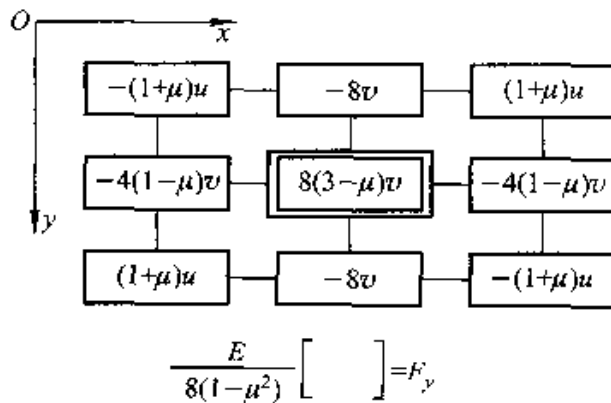


图 7-14

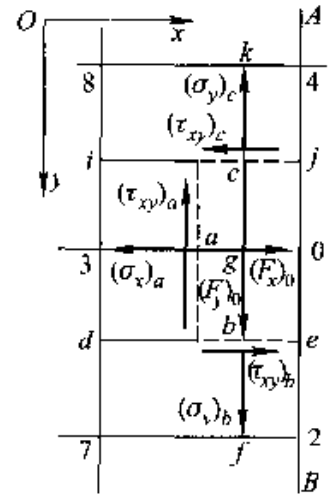


图 7-15

在边界之内)。边界结点0的领域为 $h/2 \times h$ 的矩形，如图中虚线所示。用 $(F_x)_0$ 表示该领域所受 x 方向的外力总和(包括体力和面力，以沿 x 的正向时为正)。平行于 x 轴的应力分量有 $(\sigma_x)_a$ 、 $(\tau_{xy})_b$ 、 $(\tau_{xy})_c$ 。如果结点0在 x 方向的位移分量 u_0 是一个未知值，则相应于 u_0 的差分方程可由该领域在 x 方向的平衡条件得来。该平衡条件为

$$-h(\sigma_x)_a + \frac{h}{2}(\tau_{xy})_b - \frac{h}{2}(\tau_{xy})_c + (F_x)_0 = 0$$

通过物理方程及几何方程，将应力分量用位移分量表示，上式成为

$$\begin{aligned} & -h \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_a \right] + \\ & \frac{h}{2} \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_b \right] - \\ & \frac{h}{2} \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_c + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_c \right] + (F_x)_0 = 0 \end{aligned} \quad (7-42)$$

应用差分公式(7-32)至(7-37)，可以写出

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_a &= \frac{u_0 - u_3}{h}, \\
 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_a &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_c = \frac{1}{2}\left(\frac{v_2 - v_4}{2h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_7 - v_6}{2h}\right), \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_b &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_d + \frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_e = \frac{1}{4}\left(\frac{u_7 - u_3}{h}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{u_2 - u_0}{h}\right), \\
 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_b &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_f + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_g = \frac{1}{2}\left(\frac{v_2 - v_7}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_0 - v_3}{h}\right), \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_c &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i + \frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j = \frac{1}{4}\left(\frac{u_3 - u_8}{h}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{u_0 - u_4}{h}\right), \\
 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_c &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_l = \frac{1}{2}\left(\frac{v_4 - v_8}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_0 - v_3}{h}\right).
 \end{aligned} \right\} (7-43)$$

代入(7-42)式, 简化以后, 即得相应于 u_0 的差分方程:

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{16(1-\mu^2)} [2(11-3\mu)u_0 - 3(1-\mu)(u_2 + u_4) - \\
 2(7+\mu)u_3 - (1-\mu)(u_7 + u_8) - 2(1-3\mu)(v_2 - v_4) + \\
 2(1+\mu)(v_7 - v_8)] = (F_x)_0.
 \end{aligned}$$

其差分图式如图 7-16 所示。

同样, 如果该结点 0 在 y 方向的位移分量 v_0 是未知值, 则相应于 v_0 的差分方程可由该结点领域在 y 方向的平衡条件得来, 而这一平衡条件为

$$\frac{h}{2}(\sigma_x)_b - \frac{h}{2}(\sigma_x)_c - h(\tau_{xy})_a + (F_y)_0 = 0. \quad (7-44)$$

通过与上相似的运算, 可得如图 7-17 所示的图式。

如果边界 AB 的向外法线是沿 x 轴的负向, 则作用于边界结点 0 的领域的应力分量及外力分量如图 7-18 所示。注意, 这里的外力分量 $(F_x)_0$ 及 $(F_y)_0$ 仍然以沿坐标轴的正向时为正。进行与上相似的运算, 可以得出相应于未知值 u_0 及 v_0 的差分方程, 它们的差分图式分别如图 7-19 及图 7-20 所示。

现在, 假定弹性体具有垂直于 y 轴的一个边界。如果边界的向外法线是沿 y 轴的正向, 而该边界上某一结点 0 的位移分量 u_0 或 v_0 是未知值, 则得出相应于 u_0 或 v_0 的差分图式如图 7-21 或图 7-22 所示。如果该边界的向外

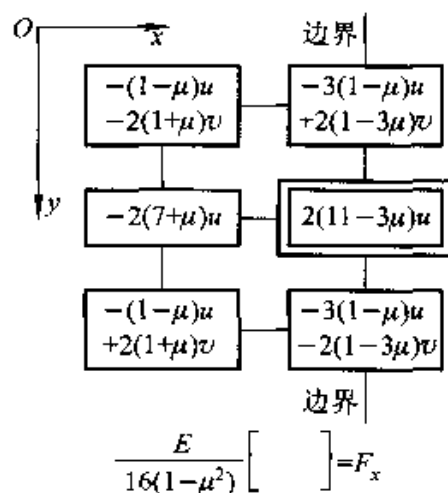


图 7-16

法线是沿 y 轴的负向, 则得出相应于未知值 u_0 或 v_0 的差分图式如图 7-23 或 7-24 所示。

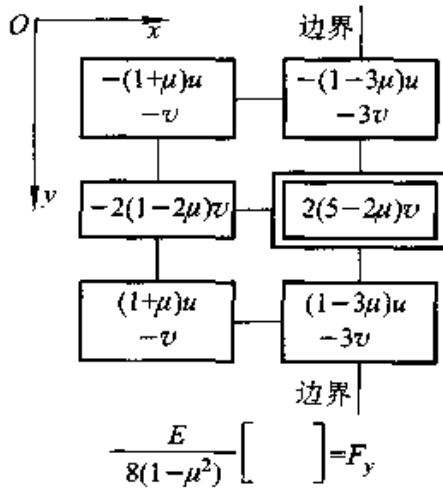


图 7-17

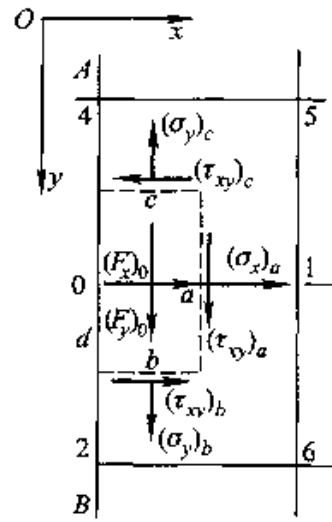


图 7-18

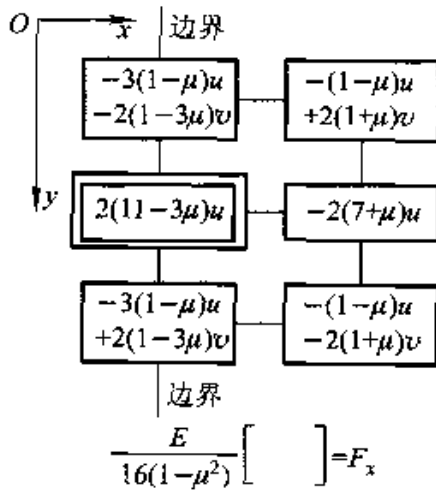


图 7-19

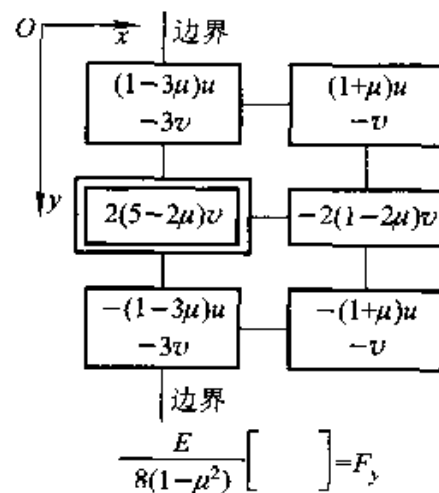


图 7-20

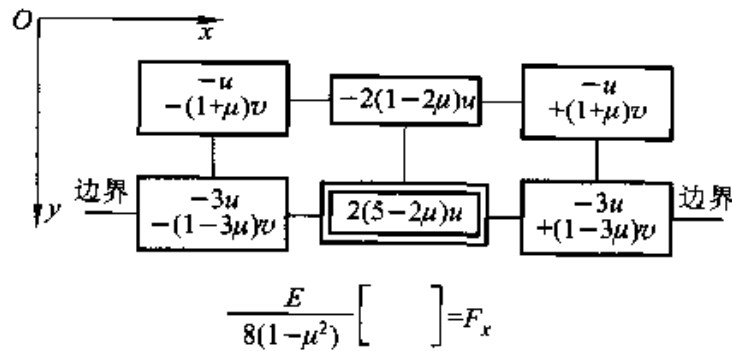


图 7-21

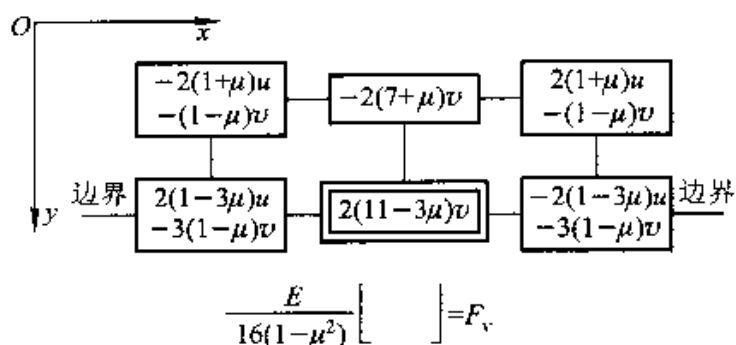


图 7-22

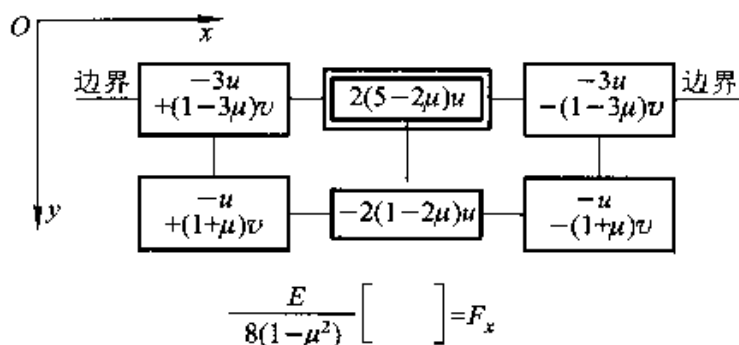


图 7-23

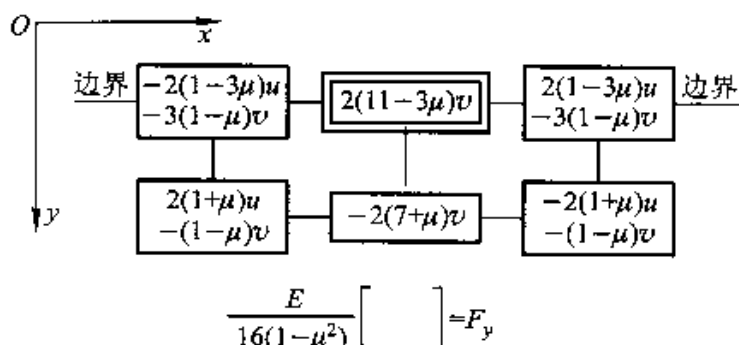


图 7-24

在两个边界的交点(即所谓角点), 结点 0 的领域将是 $h/2 \times h/2$ 的正方形。先假定该二边界的向外法线都沿着坐标轴的正向, 图 7-25。在虚线所示的结点领域上, 作用于 x 方向的外力总和仍用 $(F_x)_0$ 表示(仍以沿 x 轴的正向时为正), 平行于 x 轴的应力分量只有 $(\sigma_x)_a$ 和 $(\tau_{xy})_b$ 。如果 u_0 是未知值, 则相应于 u_0 的差分方程可由该领域在 x 方向的平衡条件得来, 而该平衡条件可以表示为

$$-\frac{h}{2}(\sigma_x)_a - \frac{h}{2}(\tau_{xy})_b + (F_x)_0 = 0,$$

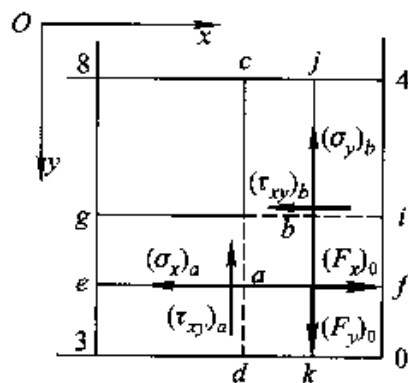


图 7-25

或利用物理方程及几何方程改换成为

$$-\frac{h}{2} \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_a \right] -$$

$$\frac{h}{2} \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_b \right] + (F_x)_0 = 0,$$

由差分公式(7-32)至(7-37)可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_c + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_d = \frac{1}{4} \left(\frac{u_4 - u_8}{h} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{u_0 - u_3}{h} \right),$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_e + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_f = \frac{1}{2} \left(\frac{v_3 - v_8}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{v_0 - v_4}{h} \right),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_g + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i = \frac{1}{4} \left(\frac{u_3 - u_8}{h} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{u_0 - u_4}{h} \right),$$

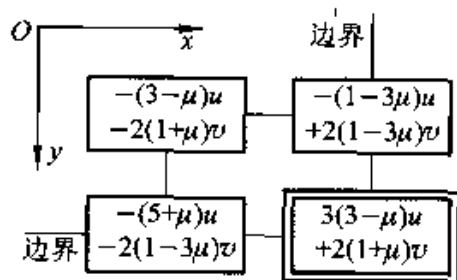
$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_b = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_k = \frac{1}{2} \left(\frac{v_4 - v_8}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{v_0 - v_3}{h} \right),$$

代入上式, 简化以后, 即得相应于未知值 u_0 的差分方程

$$\frac{E}{16(1-\mu^2)} [3(3-\mu)u_0 - (5+\mu)u_3 - (1-3\mu)u_4 -$$

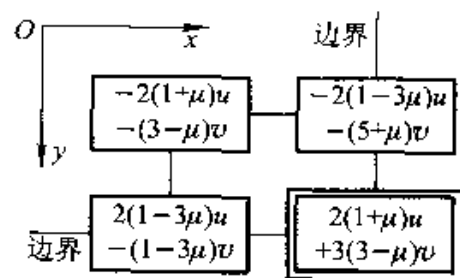
$$(3-\mu)u_8 + 2(1+\mu)(v_0 - v_8) + 2(1-3\mu)(v_4 - v_3)] = (F_x)_0,$$

其图式如图 7-26 所示。同样可得相应于未知值 v_0 的差分方程, 其图式如图 7-27 所示。



$$\frac{E}{16(1-\mu^2)} [\quad] = F_x$$

图 7-26



$$\frac{E}{16(1-\mu^2)} [\quad] = F_y$$

图 7-27

与上相似, 如果在角隅结点 O 处, 一个边界或两个边界的向外法线是沿坐标轴的负向, 亦可得出相应于未知值 u_0 及 v_0 的差分图式, 如图 7-28 至图 7-33 所示。

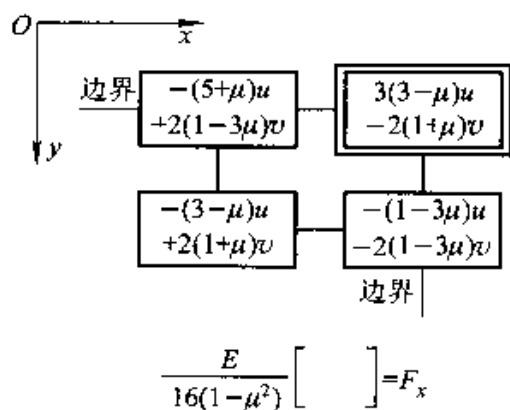


图 7-28

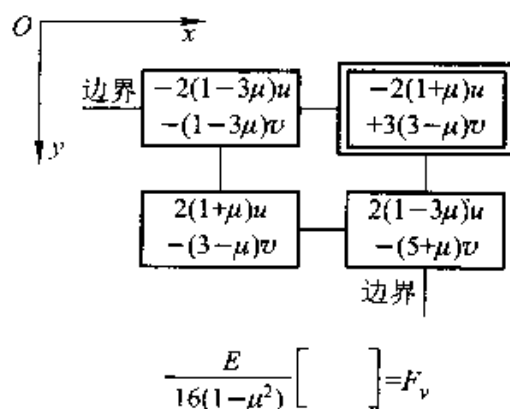


图 7-29

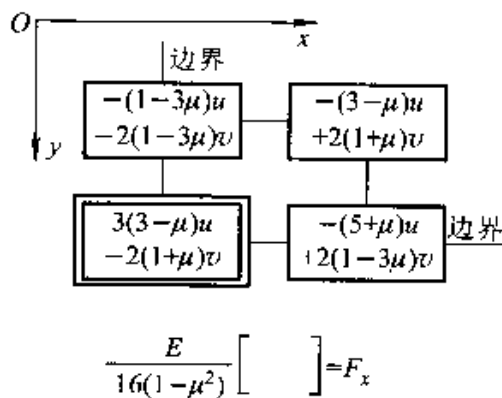


图 7-30

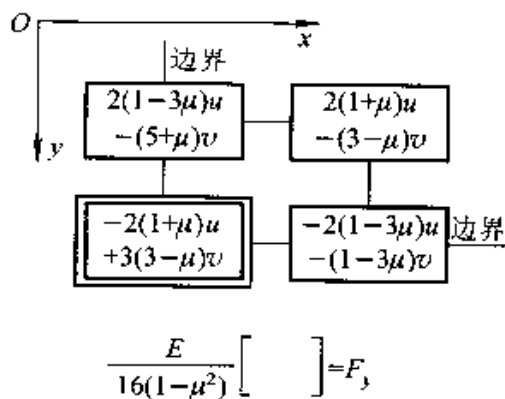


图 7-31

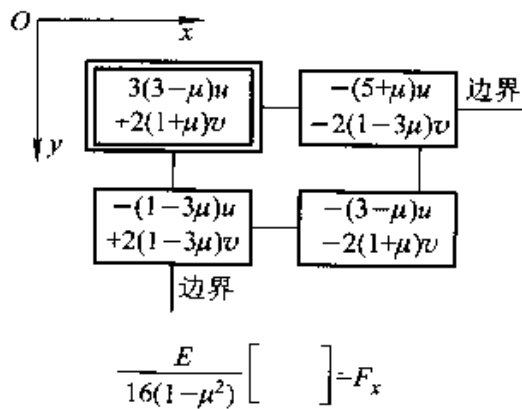


图 7-32

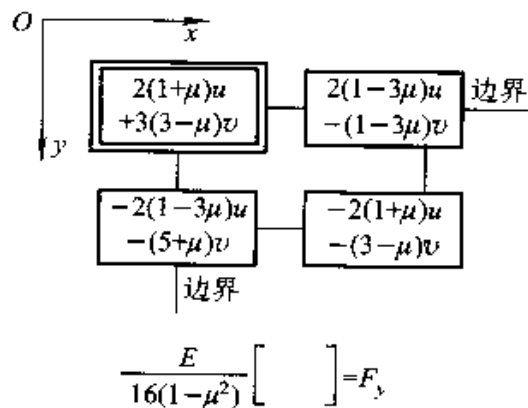


图 7-33

§ 7-8 位移差分解的实例

例(一), 设有四边固定的矩形薄板, 图 7-34, 其长度与宽度之比为 2:1, 密度为 ρ , 为简单起见取 $\mu = 0$ 。试用 4×2 的网格计算自重引起的位移和应力。

由于对称, 只有三个独立的未知值, 即 u_c 、 v_a 、 v_b ($u_b = 0, v_i = v_a, u_i = -u_c$)。注意 a 、 b 、 c 结点的领域面积均为 h^2 , 利用图 7-13 及图 7-14, 可立出相应于 u_a 、 v_a 、 v_b 的差分方程如下:

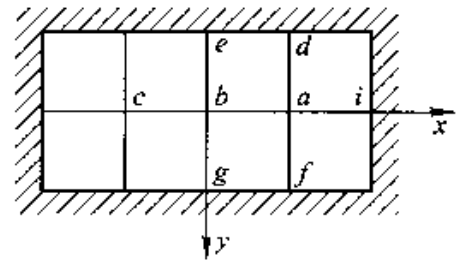


图 7-34

$$\frac{E}{8} [8(3)u_c] = (F_x)_c = 0,$$

$$\frac{E}{8} [8(3)v_a - 4v_b] = (F_y)_a = \rho gh^2,$$

$$\frac{E}{8} [8(3)v_b - 2(4)v_a] = (F_y)_b = \rho gh^2.$$

简化以后求解, 得出

$$u_c = 0, \quad v_a = 0.4118 \frac{\rho gh^2}{E}, \quad v_b = 0.4706 \frac{\rho gh^2}{E}.$$

注意 $\mu = 0$, 利用物理、几何方程及中点导数公式(7-3), 得

$$(\sigma_x)_a = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_a + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a \right] = E \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_a = E \left(\frac{v_i - v_c}{2h} \right) = 0,$$

$$(\sigma_x)_b = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_b + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b \right] = E \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_b = E \left(\frac{v_g - v_d}{2h} \right) = 0.$$

对于边界上的结点, 则须利用端点导数公式(7-9)或(7-10), 这样得到

$$(\sigma_y)_d = E \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_d = E \left(\frac{-3v_d + 4v_a - v_i}{2h} \right) = \frac{2Ev_a}{h} = 0.824\rho gh,$$

$$(\sigma_y)_f = E \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_f = E \left(\frac{3v_f - 4v_a + v_d}{2h} \right) = -\frac{2Ev_a}{h} = -0.824\rho gh,$$

$$(\sigma_x)_e = \frac{2Ev_b}{h} = 0.941\rho gh,$$

$$(\sigma_x)_g = -\frac{2Ev_b}{h} = -0.941\rho gh.$$

通过同样的计算，可见在所有各结点处都得到

$$\sigma_x = 0。$$

由于网格较疏，这些应力分量数值都是粗略近似的。

例(二)，设例(一)中的薄板改为在下边受连杆支承(光滑支承)，图 7-35，试求自重引起的位移及应力。

现在，独立的未知值除了有 u_a 、 v_a 、 v_b 以外还有 u_f 。利用图 7-13、图 7-14 及图 7-21，立出相应于上述四个未知值的差分方程如下：

$$\frac{E}{8} [8(3)u_a - 4u_f] = (F_x)_a = 0,$$

$$\frac{E}{8} [8(3)v_a - 4v_b] = (F_x)_a = \rho gh^2,$$

$$\frac{E}{8} [8(3)v_b - 2(4)v_a - 2(-u_f)] = (F_y)_b = \rho gh^2,$$

$$\frac{E}{8} [2(5)u_f - 2u_a - v_b] = (F_x)_f = 0。$$

简化以后求解，得出

$$u_a = 0.0080 \frac{\rho gh^2}{E}, \quad v_a = 0.4111 \frac{\rho gh^2}{E},$$

$$v_b = 0.4663 \frac{\rho gh^2}{E}, \quad u_f = 0.0482 \frac{\rho gh^2}{E}。$$

关于 σ_y 的计算，同于例(一)。这里只计算几点处的 σ_x 及 τ_{xy} ：

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_e &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_e \right] \\ &= E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e = E \left[\frac{u_f - (-u_f)}{2h} \right] = 0.048 \rho gh, \end{aligned}$$

$$(\sigma_x)_f = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_f = E \left(\frac{u_f - u_g}{2h} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_j &= E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j = E \left(\frac{3u_j - 4u_f + u_g}{2h} \right) \\ &= -2 \frac{Eu_f}{h} = -0.096 \rho gh, \end{aligned}$$

$$(\tau_{xy})_i = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i \right]$$

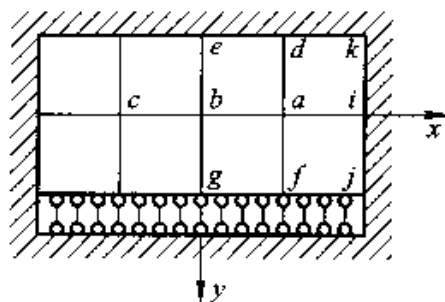


图 7-35

$$\begin{aligned}
 &= \frac{E}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_j \right] \\
 &= \frac{E}{2} \left(\frac{u_j - u_k}{2h} + \frac{3v_i - 4v_a + v_b}{2h} \right) \\
 &= \frac{E}{2} \left(\frac{-4v_a + v_i}{2h} \right) = -0.295\rho gh, \\
 (\tau_{xy})_j &= \frac{E}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i \right] \\
 &= \frac{E}{2} \left(\frac{3u_j - 4u_i + u_k}{2h} + \frac{3v_j - 4v_i + v_e}{2h} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

例(三), 设有矩形深梁, 左右两边固定, 上边受均布荷载 q , 图 7-36。试求位移及应力。取 $\mu = 0.2$ 。

由于对称, 独立的未知值只有 6 个, 即 $u_a, v_a, u_b, v_b, u_c, v_c$ ($v_d = v_a, v_e = v_b, v_f = v_c, u_d = -u_a, u_e = -u_b, u_f = -u_c$)。按照图 7-21 及图 7-22, 相应于 u_a 及 v_a 的差分方程为

$$\begin{aligned}
 &\frac{E}{8(0.96)} [2(4.6)u_a - 2(0.6)u_b - 3(-u_a) - \\
 &\quad 0.4v_a - (-u_b) - 1.2v_b] = (F_x)_a = 0, \\
 &\frac{E}{16(0.96)} [2(10.4)v_a - 2(7.2)v_b + 2(0.4)(-u_a) - \\
 &\quad 3(0.8)v_a - 2(1.2)(-u_b) - 0.8v_b] = (F_y)_a = 0.
 \end{aligned}$$

按照图 7-13 及图 7-14, 相应于 u_b 及 v_b 的差分方程为

$$\begin{aligned}
 &\frac{E}{8(0.96)} [8(2.8)u_b - 4(0.8)u_a - 4(0.8)u_c + 1.2v_a - \\
 &\quad 8(-u_b) - 1.2v_b] = (F_x)_b = 0, \\
 &\frac{E}{8(0.96)} [8(2.8)v_b - 8v_a - 8v_c + 1.2(-u_a) - \\
 &\quad 4(0.8)v_b - 1.2(-u_c)] = (F_y)_b = 0.
 \end{aligned}$$

按照图 7-23 及图 7-24, 相应于 u_c 及 v_c 的差分方程为

$$\begin{aligned}
 &\frac{E}{8(0.96)} [2(4.6)u_c - 2(0.6)u_b - (-u_b) + 1.2v_b - \\
 &\quad 3(-u_c) + 0.4v_c] = (F_x)_c = 0, \\
 &\frac{E}{16(0.96)} [2(10.4)v_c - 2(7.2)v_b + 2(1.2)(-u_b) - 0.8v_b - \\
 &\quad 2(0.4)(-u_c) - 3(0.8)v_c] = (F_y)_c = qh.
 \end{aligned}$$

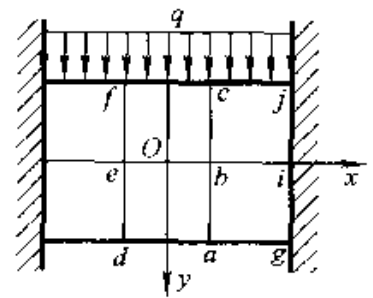


图 7-36

将上列 6 个方程简化以后，联立求解，得出位移分量

$$\begin{aligned} u_a &= 0.1513qh/E, & v_a &= 0.9951qh/E, \\ u_b &= 0.0305qh/E, & v_b &= 1.2015qh/E, \\ u_c &= -0.1780qh/E, & v_c &= 1.8390qh/E. \end{aligned}$$

几个重要的应力分量计算如下：

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_f &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_f + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_f \right] = \frac{E}{0.96} \left(\frac{3u_f - 4u_i + u_j}{2h} + 0 \right) \\ &= \frac{E}{0.96} \left(-\frac{5u_c}{2h} \right) = 0.464q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_e &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_e \right] = \frac{E}{0.96} \left(\frac{3u_e - 4u_a + u_d}{2h} + 0 \right) \\ &= \frac{E}{0.96} \left(-\frac{5u_c}{2h} \right) = -0.394q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_i &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i \right] = \frac{E}{2(1.2)} \left(\frac{u_e - u_i}{2h} + \frac{3v_i - 4v_b + v_c}{2h} \right) \\ &= \frac{E}{2(1.2)} \left(\frac{-4v_b + v_c}{2h} \right) = -0.751q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_j &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_j \right] = \frac{E}{2(1.2)} \left(\frac{3v_j - 4v_c + v_f}{2h} + 0 \right) \\ &= \frac{E}{2(1.2)} \left(\frac{-4v_c + v_c}{2h} \right) = -0.625q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_b &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_b + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b \right] = \frac{E}{0.96} \left(\frac{v_a - v_c}{2h} + 0.2 \frac{u_i - u_c}{2h} \right) \\ &= \frac{E}{0.96} \left(\frac{v_a - v_c + 0.2u_b}{2h} \right) = -0.436q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_c &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_c + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_c \right] = \frac{E}{0.96} \left(\frac{-3v_c + 4v_b - v_a}{2h} + 0.2 \frac{u_j - u_j}{2h} \right) \\ &= \frac{E}{0.96} \left(\frac{-3v_c + 4v_b - v_a + 0.2u_c}{2h} \right) = -0.907q. \end{aligned}$$

由应力边界条件可见应当有 $(\sigma_y)_c = -q$ 。现在，由于网格太疏，得到的是 $(\sigma_y)_c = -0.907q$ ，误差达 $0.093q$ 。其他应力数值的误差大致也属于这个量阶。为了得到较精确的应力数值，必须把网格加密。

最后还应当指出：对于只具有应力边界条件的单连体平面问题，虽然也可

以与上相同地用位移差分解求得应力分量，但是，改用应力函数差分解时，同样的网格可以给出较精确的应力数值，而且计算工作量较少。因此，如果不须求出位移而只须求出应力，则毫无疑问地应当用应力函数差分解，而完全不必用位移差分解。

§ 7-9 多连体问题的位移差分解

为了求解多连体的问题，先来导出内尖角处的结点位移差分方程。图 7-37 示一内尖角，其两边的向外法线分别沿 x 轴及 y 轴的正向。按照 § 7-7 中关于结点领域的定义，结点 O 的领域应如图中虚线所示，其面积为 $\frac{3}{4}h^2$ 。该领域所受的沿 x 及 y 方向的外力总和（包括体力及面力）仍然用 $(F_x)_0$ 及 $(F_y)_0$ 表示。由 x 方向的平衡条件有

$$\frac{h}{2}(\sigma_x)_o - h(\sigma_x)_b + \frac{h}{2}(\tau_{xy})_c - h(\tau_{xy})_d + (F_x)_0 = 0,$$

将应力分量表以位移分量的导数，则上式成为

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_o + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_o \right] - \\ & h \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_b \right] + \\ & \frac{h}{2} \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_c + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_c \right] - \\ & h \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_d + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_d \right] + (F_x)_0 = 0. \end{aligned} \quad (a)$$

按照差分公式 (7-32) 至 (7-37)，可以写出

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_o &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_f = \frac{1}{4} \left(\frac{u_5 - u_4}{h} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{u_1 - u_0}{h} \right), \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_o &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_g + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_h = \frac{1}{2} \left(\frac{v_6 - v_4}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{v_1 - v_5}{h} \right), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b &= \frac{u_0 - u_1}{h}, \end{aligned}$$

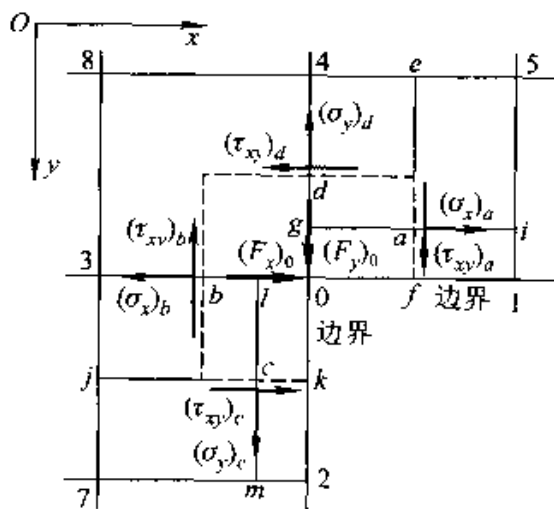


图 7-37

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_n = \frac{1}{2}\left(\frac{v_7 - v_8}{2h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_2 - v_4}{2h}\right),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_c = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j + \frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_k = \frac{1}{4}\left(\frac{u_7 - u_3}{h}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{u_2 - u_0}{h}\right),$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_e = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_l + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0 - v_3}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_2 - v_7}{h}\right),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_d = \frac{u_0 - u_4}{h},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_d + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_n = \frac{1}{2}\left(\frac{v_5 - v_8}{2h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_1 - v_3}{2h}\right).$$

代入式(a), 简化以后, 即得相应于未知值 u_0 的差分方程

$$\begin{aligned} \frac{E}{16(1-\mu^2)} [& 11(3-\mu)u_0 - 6u_1 - 3(1-\mu)u_2 - (15+\mu)u_3 - \\ & 2(3-4\mu)u_4 - 2u_5 - (1-\mu)u_7 - \\ & 2(1+\mu)v_0 + 2(1-3\mu)v_1 - 2(1-3\mu)v_2 + \\ & 2(1+\mu)v_5 + 2(1+\mu)v_7 - 2(1+\mu)v_8] = (F_x)_0. \end{aligned}$$

它的差分图式如图 7-38 所示。

通过同样的运算, 可得相应于未知值 v_0 的差分方程, 其差分图式如图 7-39 所示。

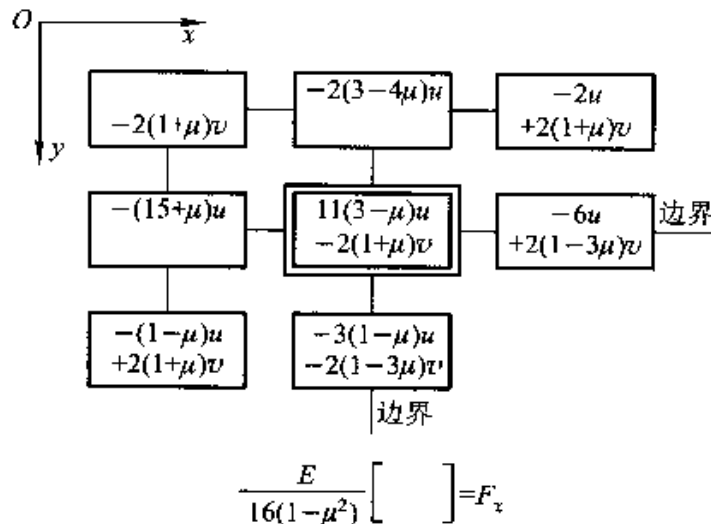


图 7-38

在内尖角结点处, 如果一个或两个边界的向外法线是沿坐标轴的负向, 也可以通过与上相似的运算得出该结点处的差分方程以及相应的差分图式。

有了内尖角处的结点位移差分方程, 就可以对多连体进行计算。例如, 设有 $4h \times 4h$ 的正方形薄板, 图 7-40, 中间有 $2h \times 2h$ 的正方形孔口, 在上下两边受均布

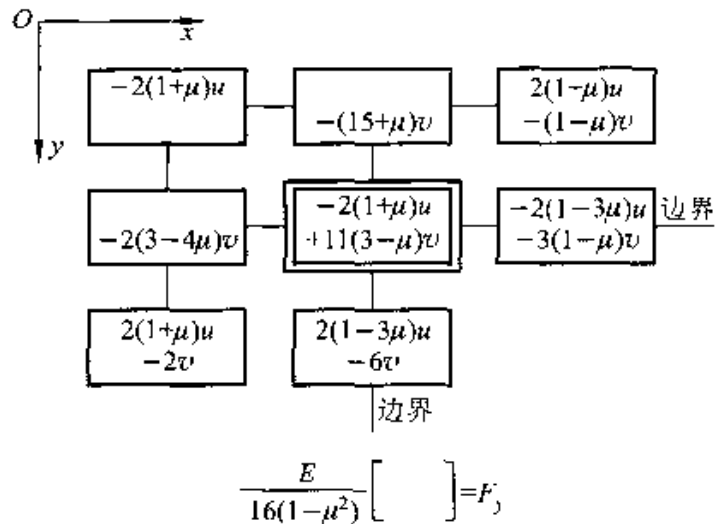


图 7-39

压力 q 。由于对称，只须计算四分之一部分。独立的未知位移分量有 12 个，即 u_a 、 v_a 、 u_b 、 v_b 、 u_c 、 v_c 、 u_d 、 v_d 、 u_e 、 v_e 、 u_f 、 v_f 、 v_i ($v_i = v_j = u_g = u_i = 0$)。

取 $\mu = 0$ ，按照图 7-38 及图 7-39 立出相应于 u_e 及 v_e 的差分方程如下：

$$\begin{aligned} \frac{E}{16} [-2v_a - 15u_b - u_c - 2(3)u_d + 11(3)u_e - \\ 2v_e - 3u_f + 2v_g + 2v_i] &= (F_v)_e = 0, \\ \frac{E}{16} [-2u_a - 2(3)v_b + 2u_c - 15v_d - 2u_e + \\ 11(3)v_e + 2u_f - v_g - 3v_i] &= (F_u)_e = 0. \end{aligned}$$

其余 10 个差分方程可仍按 §7-7 中的差分图式列出。

联立求解上述 12 个方程，得出(以 qh/E 为单位)：

$$\begin{aligned} u_a &= 0.820, & v_a &= 2.265, & u_b &= -0.742, \\ v_b &= 1.180, & u_c &= -1.545, & u_d &= 0.707, \\ v_d &= 3.980, & u_e &= -0.706, & v_e &= 2.819, \\ u_f &= -1.541, & v_g &= 5.392, & v_i &= 4.819. \end{aligned}$$

应力分量可以和以前一样地求得。但是，由于网格太疏，算出的应力数值将只是粗略近似的，而内尖角结点(例如 e)处的应力数值将具有特别大的误差(它在理论上是无限大)。

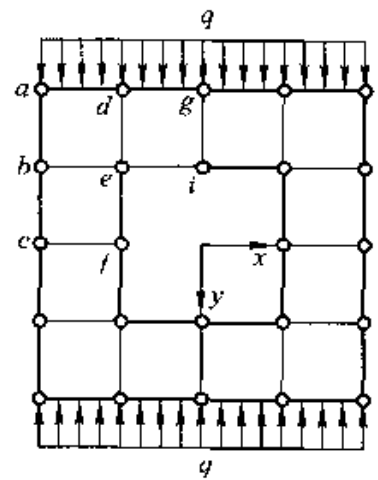


图 7-40

§ 7-10 温度应力问题的位移差分解

利用位移的差分解，也可以较简便地求得温度应力。在温度应力问题中，

因为不考虑实际荷载的作用，所以对任何结点领域说来，都有 $F_x = F_y = 0$ 。但是，用位移分量表示应力分量时，必须考虑变温 T 的作用。在平面应力的情况下，这就必须采用(6-17)式，即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

在平面应变的情况下，须将上式中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ， μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ ， α 换为 $(1+\mu)\alpha$ 。

这样，对于图 7-12 中所示的内结点 O 的正方形领域，平衡方程(7-38)就应当换为

$$\begin{aligned} & h \left\{ \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_a \right] - \frac{E\alpha}{1-\mu} T_a \right\} - \\ & h \left\{ \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_b \right] - \frac{E\alpha}{1-\mu} T_b \right\} + \\ & h \left\{ \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_c + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_c \right] \right\} - \\ & h \left\{ \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_d + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_d \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

将(7-39)式代入以后，将得出代替(7-40)的方程

$$\begin{aligned} & \frac{E}{8(1-\mu^2)} [8(3-\mu)u_0 - 8(u_1 + u_3) - 4(1-\mu)(u_2 + u_4) + \\ & (1+\mu)(v_5 - v_6 + v_7 - v_8)] = \frac{hE\alpha}{1-\mu} (T_b - T_a). \end{aligned}$$

与(7-40)式对比，可见 $\frac{hE\alpha}{1-\mu} (T_b - T_a)$ 代替了 $(F_x)_0$ 。因此可以说，变温的等效结点荷载是

$$(F_x)_0 = \frac{hE\alpha}{1-\mu} (T_b - T_a). \quad (b)$$

为了把 T_b 和 T_a 用结点处的变温来表示，我们假定变温 T 在相邻两结点之间是按线性变化。由图 7-12 可见，这样就有

$$T_b = \frac{T_3 + T_7}{2}, \quad T_a = \frac{T_0 + T_1}{2}.$$

代入式(b), 即得 x 方向的等效结点荷载, 用结点处的变温表示为

$$(F_x)_0 = \frac{hE\alpha}{2(1-\mu)}(T_3 - T_1),$$

同样可以得到 y 方向的等效结点荷载为

$$(F_y)_0 = \frac{hE\alpha}{2(1-\mu)}(T_4 - T_2),$$

上列两个等效结点荷载的差分图式如图 7-41 及图 7-42 所示, 可以分别与图 7-13 及图 7-14 联合使用, 以建立内结点处的差分方程。

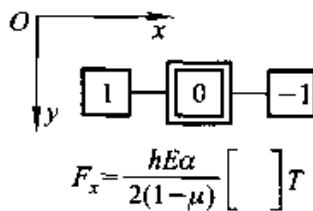


图 7-41

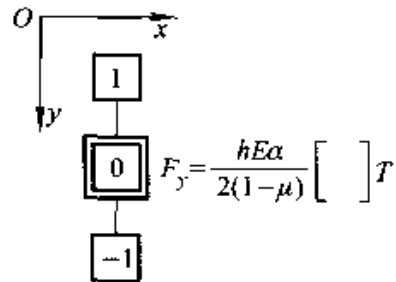


图 7-42

与上相似, 对于图 7-15 中所示的边界结点领域, 平衡方程(7-42)应当改换为

$$\begin{aligned} & -h \left\{ \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_a \right] + \frac{E\alpha}{1-\mu} T_a \right\} + \\ & \frac{h}{2} \left\{ \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_b \right] \right\} - \\ & \frac{h}{2} \left\{ \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_c + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_c \right] \right\} = 0, \end{aligned}$$

将(7-43)代入以后, 可见变温在 x 方向的等效结点荷载为

$$(F_x)_0 = \frac{hE\alpha}{1-\mu} T_a,$$

假定变温 T 在结点 0 与结点 3 之间按线性变化, 取 $T_a = \frac{1}{2}(T_0 + T_3)$, 即得

$$(F_x)_0 = \frac{hE\alpha}{2(1-\mu)} (T_0 + T_3), \quad (c)$$

同样可见变温在 y 方向的等效结点荷载为

$$(F_y)_0 = \frac{hE\alpha}{2(1-\mu)} (T_1 - T_b),$$

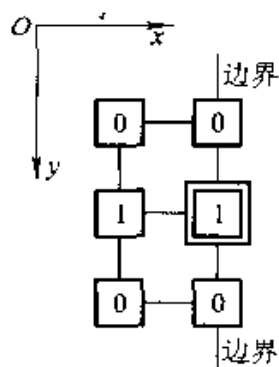
假定变温 T 在相邻两结点之间按线性变化, 取

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{1}{4} T_1 + \frac{3}{4} T_3 = \frac{1}{4} \frac{T_3 + T_3}{2} + \frac{3}{4} \frac{T_0 + T_4}{2}, \\ T_b &= \frac{1}{4} T_4 + \frac{3}{4} T_2 = \frac{1}{4} \frac{T_3 + T_7}{2} + \frac{3}{4} \frac{T_0 + T_2}{2}, \end{aligned}$$

就得到变温 T 在 y 方向的等效结点荷载为

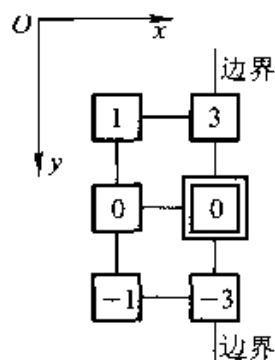
$$(F_y)_0 = \frac{hE\alpha}{16(1-\mu)} [3(T_4 - T_2) + T_8 - T_7] \quad (d)$$

与式(c)及式(d)相应的差分图式如图 7-43 及图 7-44 所示, 可以分别与图 7-16及图 7-17 联合使用, 以建立边界结点处的差分方程。



$$F_x = \frac{hE\alpha}{2(1-\mu)} [\quad] T$$

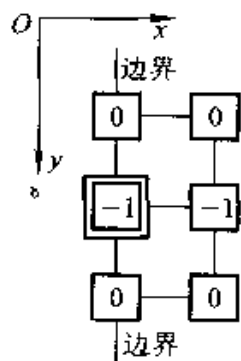
图 7-43



$$F_y = \frac{hE\alpha}{16(1-\mu)} [\quad] T$$

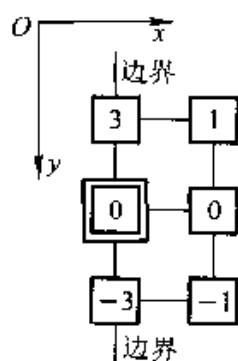
图 7-44

通过与上相似的运算, 可以得出其他各种边界结点处的等效结点荷载, 其差分图式如图 7-45 至图 7-58 所示, 可以与 § 7-7 中相应的差分图式联合使用, 以建立这些结点处的差分方程。



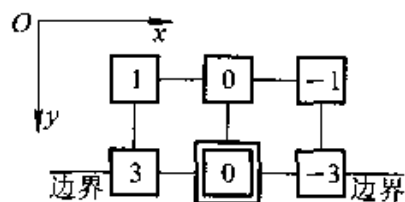
$$F_x = \frac{hE\alpha}{2(1-\mu)} [\quad] T$$

图 7-45



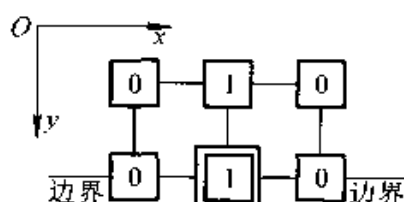
$$F_y = \frac{hE\alpha}{16(1-\mu)} [\quad] T$$

图 7-46



$$F_x = \frac{hE\alpha}{16(1-\mu)} [\quad] T$$

图 7-47



$$F_y = \frac{hE\alpha}{2(1-\mu)} [\quad] T$$

图 7-48

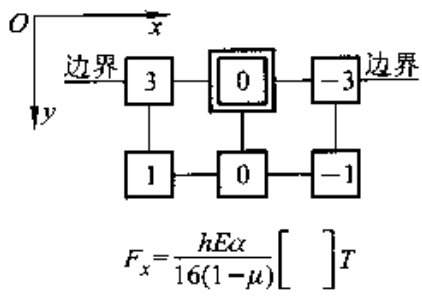


图 7-49

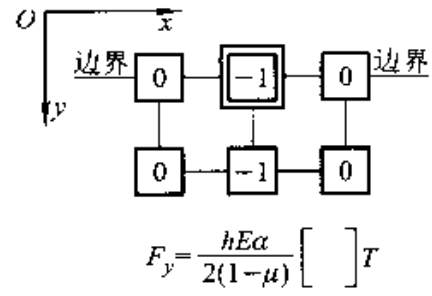


图 7-50

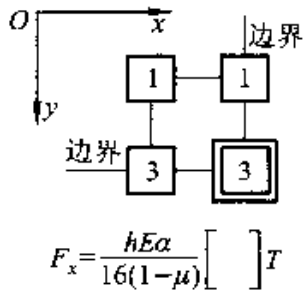


图 7-51

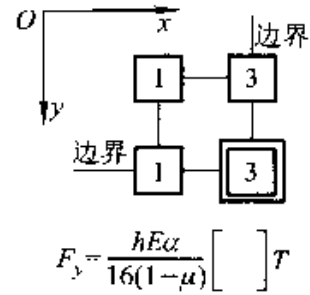


图 7-52

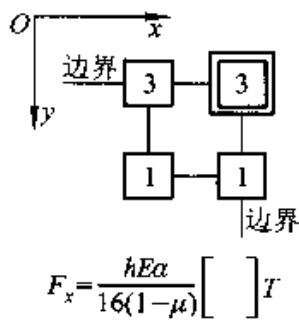


图 7-53

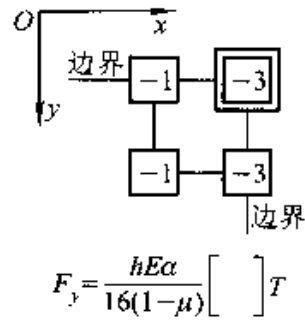


图 7-54

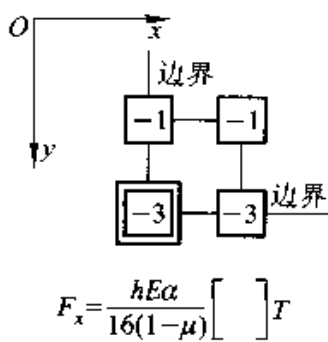


图 7-55

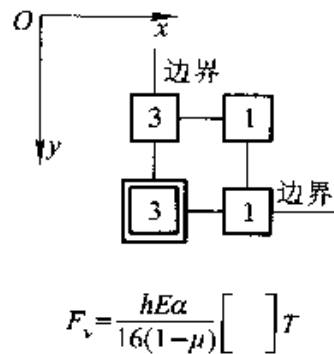


图 7-56

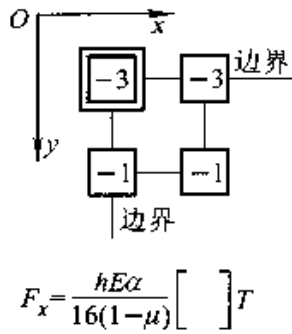


图 7-57

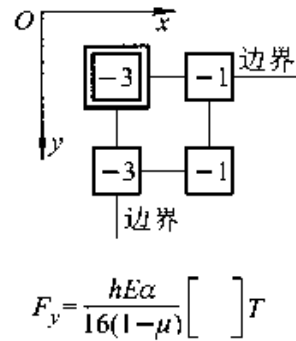


图 7-58

作为例题，设有混凝土填槽，其宽度与深度之比为 1:2。图 7-59，由于混凝土的硬化冷却，发生如下的变温： $T_a = -T_0$ ， $T_b = -0.95T_0$ ， $T_c = -0.75T_0$ ， $T_d = -0.45T_0$ ， $T_e = 0$ 。试求温度应力，取 $\mu = 0$ 。

由于对称， $u_b = u_c = u_d = u_e = 0$ ，未知值为 v_b ， v_c ， v_d ， v_e 。按照图 7-14 及图 7-42，相应于 v_c 、 v_e 、 v_d 的差分方程为

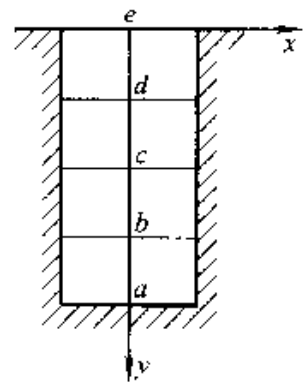


图 7-59

$$\frac{E}{8}(24v_b - 8v_c) = (F_x)_b = \frac{hE\alpha}{2}(T_c - T_a) = \frac{hE\alpha}{2}(0.25T_0),$$

$$\frac{E}{8}(24v_c - 8v_b - 8v_d) = (F_x)_c = \frac{hE\alpha}{2}(T_d - T_b) = \frac{hE\alpha}{2}(0.5T_0),$$

$$\frac{E}{8}(24v_d - 8v_c - 8v_e) = (F_x)_d = \frac{hE\alpha}{2}(T_e - T_c) = \frac{hE\alpha}{2}(0.75T_0).$$

按照图 7-24 及图 7-50，相应于 v_e 的差分方程为

$$\frac{E}{16}(22v_e - 14v_d) = (F_x)_e = \frac{hE\alpha}{2}(-T_d - T_c) = \frac{hE\alpha}{2}(0.45T_0).$$

将上列 4 个方程简化以后，联立求解，得到

$$\begin{aligned} v_b &= 0.119h\alpha T_0, & v_c &= 0.232h\alpha T_0, \\ v_d &= 0.326h\alpha T_0, & v_e &= 0.371h\alpha T_0. \end{aligned}$$

利用式(a)，注意 $\mu = 0$ ， $v_a = 0$ ，可求得应力分量

$$(\sigma_x)_a = E \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_a - E\alpha T_a = E \frac{3v_a - 4v_b + v_c}{2h} + E\alpha T_0 = 0.878E\alpha T_0,$$

$$(\sigma_x)_b = E \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_b - E\alpha T_b = E \frac{v_a - v_c}{2h} + 0.95E\alpha T_0 = 0.834E\alpha T_0,$$

$$(\sigma_x)_c = E \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_c - E\alpha T_c = E \frac{v_b - v_d}{2h} + 0.75E\alpha T_0 = 0.647E\alpha T_0,$$

$$(\sigma_x)_d = E \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_d - E\alpha T_d = E \frac{v_c - v_e}{2h} + 0.45E\alpha T_0 = 0.381E\alpha T_0,$$

$$(\sigma_y)_e = E \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_e - E\alpha T_e = E \frac{-3v_c + 4v_d - v_e}{2h} = -0.021 E\alpha T_0。$$

按照边界条件，应当有 $(\sigma_y)_e = 0$ 。现在得出 $(\sigma_y)_e = -0.021 E\alpha T_0$ ，是误差引起的。

习 题

7-1 用差分法计算图 7-60 中基础梁的最大拉应力，并与材料力学公式给出的解答进行对比。采用 2×4 的网格，如图所示。

答案： $\sigma_{\max} = (\sigma_x)_a = 1.28q$ ，材料力学公式给出 $2.25q_c$ 。

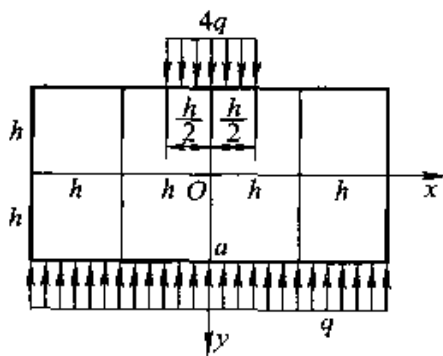


图 7-60

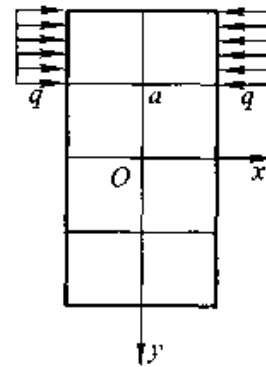


图 7-61

7-2 用 2×4 的网格计算图 7-61 中矩形板的应力。

答案： $(\sigma_x)_e = -0.490q_0$ 。

7-3 试计算图 7-62 中薄板的最大拉应力。

答案： $\sigma_{\max} = (\sigma_x)_a = 0.149q_c$ 。

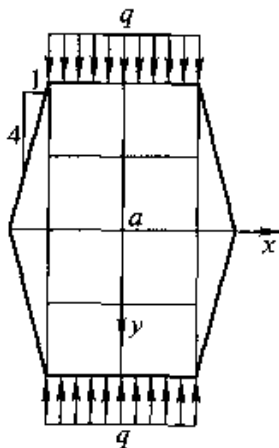


图 7-62

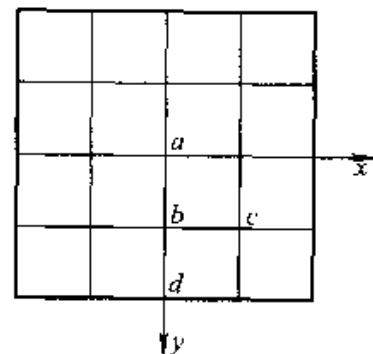


图 7-63

7-4 设图 7-63 所示的混凝土板发生如下的变温：在结点 a 处为 $T = T_0$ ，在 b 型的结点处为 $T = \frac{3}{4}T_0$ ，在 c 型的结点处为 $T = \frac{9}{16}T_0$ ，在边界上为 $T = 0$ 。试用应力函数差分解求出

温度应力。

答案: $(\sigma_x)_d = 0.532E\alpha T_0$ 。

7-5 正方形深梁, 左右两边固定, 图 7-64, 上边受均布荷载 q , 试用 4×4 的网格计算位移及应力。取 $\mu = 0$ 。

答案: $v_a = 2.332qh/E$, $v_b = 0.619qh/E$, $(\sigma_x)_a = -0.998q$,
 $(\sigma_x)_b = 0.018q$ 。

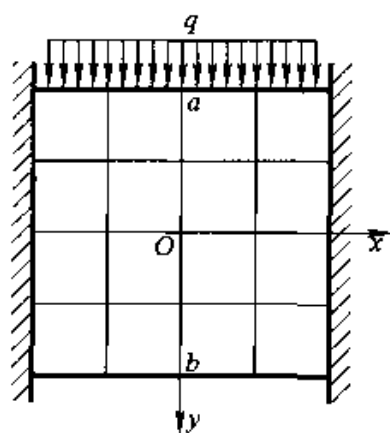


图 7-64

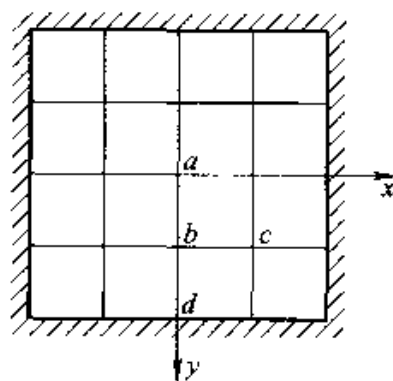


图 7-65

7-6 正方形薄板, 四边固定, 图 7-65, 发生如下的变温: 在结点 a 处为 $T = -T_0$, 在 b 型的结点处为 $T = -\frac{3}{4}T_0$, 在 c 型的结点处为 $T = -\frac{9}{16}T_0$, 在边界上为 $T = 0$, 试用位移差分解求温度应力。取 $\mu = 0$ 。

答案: $(\sigma_x)_d = 0.797E\alpha T_0$, $(\sigma_y)_d = 0.405E\alpha T_0$ 。

参考教材

- [1] 徐芝纶著. 弹性力学中的差分方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989: 第一章及第四章的 §4.1 至 §4.4.

第八章 空间问题的基本理论

§ 8-1 平衡微分方程

分析空间问题时，仍然要从三方面来考虑：静力学方面，几何学方面和物理学方面。现在来考虑空间问题的静力学方面，而首先导出空间问题的平衡微分方程。

在物体内的任意一点 P ，割取一个微小的平行六面体，它的六面垂直于坐标轴，而棱边的长度为 $PA = dx$ ， $PB = dy$ ， $PC = dz$ ，图 8-1。一般而论，应力分量是位置坐标的函数。因此，作用在这六面体两对面上的应力分量不完全相同，而具有微小的差量。例如，作用在后面的平均正应力是 σ_x ，由于坐标 x 的改变，作用在前面的平均正应力应当是 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ ，余类推。

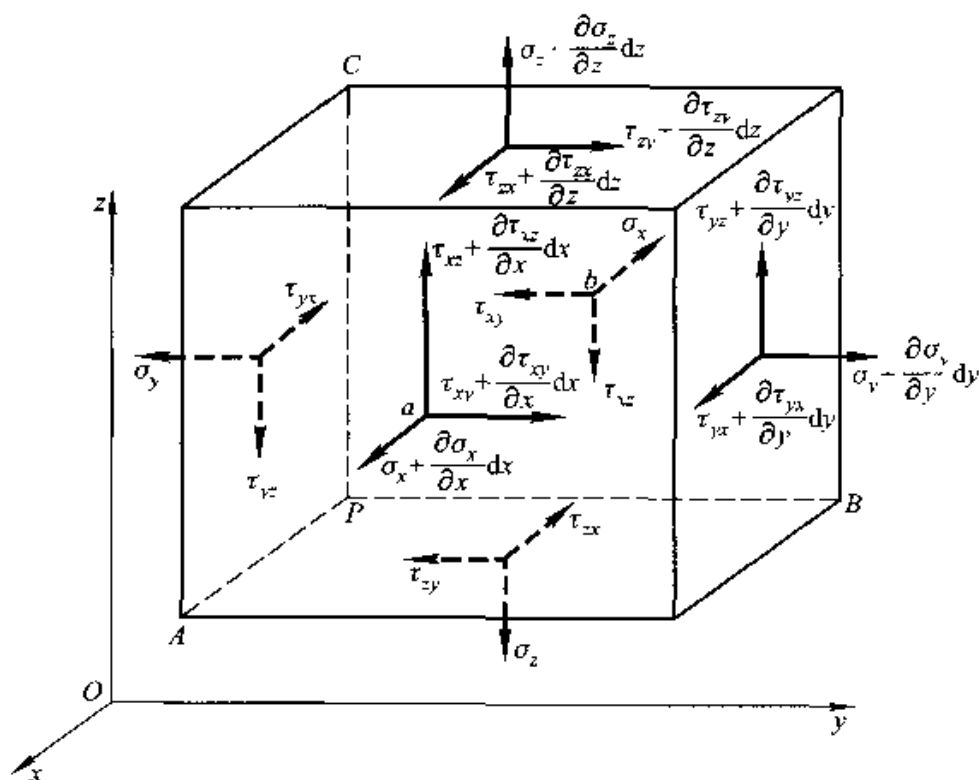


图 8-1

首先, 以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴, 立出力矩的平衡方程 $\sum M_{ab} = 0$:

$$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{xz} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{xy} dx dy \frac{dz}{2} = 0,$$

除以 $dx dy dz$, 合并相同的项, 得

$$\tau_{xz} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} dy - \tau_{xy} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = 0,$$

略去微量以后, 得

$$\tau_{xz} = \tau_{xy}$$

同样可以得出

$$\tau_{zx} = \tau_{yz}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yx}$$

这些是以前已有的结果, 只是又一次证明了切应力的互等关系。

其次, 以 x 轴为投影轴, 立出投影的平衡方程 $\sum F_x = 0$, 得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} dy \right) dz dx - \tau_{xz} dz dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xy} dx dy + f_x dx dy dz = 0,$$

由其余两个平衡方程, $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_z = 0$, 可以得出与此相似的两个方程。将这三个方程约简以后, 除以 $dx dy dz$, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-1)$$

这就是空间问题的平衡微分方程。

§ 8-2 物体内任一点的应力状态

现在, 假定物体在任一点 P 的六个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 为已知, 试求经过 P 点的任一斜面上的应力。为此, 在 P 点附近取一个平面 ABC , 平行于这一斜面, 并与经过 P 点而平行于坐标面的三个平面形成一个微小的四面体 $PABC$, 图 8-2。当平面 ABC 趋近于 P 点时, 平面 ABC 上的应力就成为该斜面上的应力。

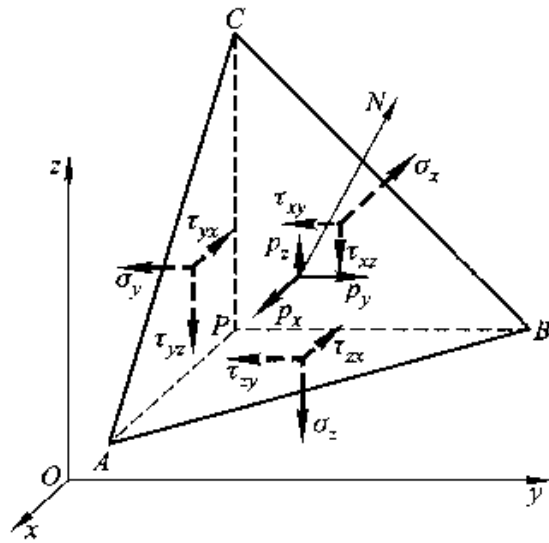


图 8-2

命平面 ABC 的外法线为 N ，其方向余弦为

$$\cos(N, x) = l, \quad \cos(N, y) = m, \quad \cos(N, z) = n.$$

设三角形 ABC 的面积为 ΔS ，则三角形 BPC 、 CPA 、 APB 的面积分别为 $l\Delta S$ 、 $m\Delta S$ 、 $n\Delta S$ 。四面体 $PABC$ 的体积用 ΔV 代表。三角形 ABC 上的全应力 p 在坐标轴方向的分量用 p_x 、 p_y 、 p_z 代表。根据四面体的平衡条件 $\sum F_i = 0$ ，得

$$p_x \Delta S - \sigma_x l \Delta S - \tau_{yx} m \Delta S - \tau_{zx} n \Delta S + f_x \Delta V = 0.$$

除以 ΔS ，并移项，得

$$p_x + f_x \frac{\Delta V}{\Delta S} = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}.$$

当斜面 ABC 趋近于 P 点时，由于 ΔV 是比 ΔS 更高一阶的微量，所以 $\frac{\Delta V}{\Delta S}$ 趋于零。于是得出下面 (8-2) 中的第一式。其余二式可分别由平衡条件 $\sum F_y = 0$ 及 $\sum F_z = 0$ 同样地得出。

$$\left. \begin{aligned} p_x &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}, \\ p_y &= m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy}, \\ p_z &= n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

设三角形 ABC 上的正应力为 σ_N ，则由投影可得

$$\sigma_N = lp_x + mp_y + np_z.$$

将 (8-2) 式代入，并分别用 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} 代替 τ_{zy} 、 τ_{xz} 、 τ_{yx} ，即得

$$\sigma_N = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy}. \quad (8-3)$$

设三角形 ABC 上的全应力为 p 而切应力为 τ_N ，则由于

$$p^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

而有

$$\tau_{\lambda}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_{\lambda}^2 \quad (8-4)$$

由公式(8-3)及(8-4)可见,在物体的任意一点,如果已知六个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} ,就可以求得任一斜面上的正应力和切应力。这就是说,六个应力分量完全决定了一点的应力状态。

在特殊情况下,如果 ABC 是物体的边界面,则 p_x 、 p_y 、 p_z 成为面力分量 \bar{f}_x 、 \bar{f}_y 、 \bar{f}_z ,于是由公式(8-2)得出

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_i + m(\tau_{xy})_i + n(\tau_{xz})_i &= \bar{f}_x \\ m(\sigma_y)_i + n(\tau_{yz})_i + l(\tau_{xy})_i &= \bar{f}_y \\ n(\sigma_z)_i + l(\tau_{xz})_i + m(\tau_{yz})_i &= \bar{f}_z \end{aligned} \right\} \quad (8-5)$$

这就是弹性体的应力边界条件,它表明应力分量的边界值与面力分量之间的关系。

§ 8-3 主应力与应力主向

设经过任一点 P 的某一斜面上的切应力等于零,则该斜面上的正应力称为在 P 点的一个主应力,该斜面称为在 P 点的一个应力主面,而该斜面的法线方向称为在 P 点的一个应力主向。

假设在 P 点有一个应力主面存在。这样,由于该面上的切应力等于零,所以该面上的全应力就等于该面上的正应力,也就等于主应力 σ 。于是该面上的全应力在坐标轴上的投影成为

$$p_x = l\sigma, \quad p_y = m\sigma, \quad p_z = n\sigma。$$

将公式(8-2)代入,即得

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xz} + n\tau_{xy} &= l\sigma, \\ m\sigma_y + n\tau_{yz} + l\tau_{xy} &= m\sigma, \\ n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} &= n\sigma。 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

此外还有关系式

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1。 \quad (b)$$

如果将式(a)与式(b)联立求解,能够得出 σ 、 l 、 m 、 n 的一组解答,就得到 P 点的一个主应力以及与之对应的应力主面和应力主向。用下述方法求解,比较简便。

将式(a)改写为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

这是 l 、 m 、 n 的三个齐次线性方程。因为由式(b)可见 l 、 m 、 n 不能全等于零，所以这三个方程的系数的行列式应当等于零，即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

用 τ_{yx} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} 分别代替 τ_{xy} 、 τ_{xz} 、 τ_{yz} ，并将行列式展开，得出 σ 的三次方程

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy}) = 0. \quad (8-6)$$

求解这个方程，如果能得出 σ 的三个实根 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ，那么，这些就是 P 点的三个主应力。

为了求得与主应力 σ_1 相应的方向余弦 l_1 、 m_1 、 n_1 ，可以利用(c)中的任意二式，例如其中的前二式，由此得

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{xz}n_1 &= 0, \\ \tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 &= 0. \end{aligned}$$

将二式均除以 l_1 ，得

$$\begin{aligned} \tau_{yx}\frac{m_1}{l_1} + \tau_{xz}\frac{n_1}{l_1} + (\sigma_x - \sigma_1) &= 0, \\ (\sigma_y - \sigma_1)\frac{m_1}{l_1} + \tau_{yz}\frac{n_1}{l_1} + \tau_{xy} &= 0, \end{aligned}$$

由此可以求得比值 m_1/l_1 及 n_1/l_1 ，然后按照式(b)求出

$$l_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2}},$$

即可由已知的比值 m_1/l_1 及 n_1/l_1 求得 m_1 及 n_1 。同样可以求得与主应力 σ_2 相应的方向余弦 l_2 、 m_2 、 n_2 ，以及与主应力 σ_3 相应的方向余弦 l_3 、 m_3 、 n_3 。

我们晓得，三次方程(8-6)至少有一个实根，因而至少存在一个主应力以及与之对应的应力主向。把这个主应力称为 σ_3 ，并将 z 轴放在这个应力主向，则 $\sigma_z = \sigma_3$ 而 $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ ， $\tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$ 。于是，平行六面体上的应力如图 8-3 所示(垂直于图平面的 $\sigma_2 = \sigma_3$ 没

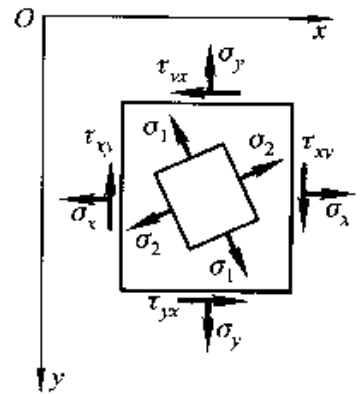


图 8-3

有画出)。根据 § 2-3 中的分析, 可以断定有两个主应力 σ_1 和 σ_2 , 作用在互相垂直而且垂直于图平面的两个应力主面上, 如图所示。这就证明: 在物体内的任意一点, 一定存在三个互相垂直的应力主面以及对应的三个主应力。

因为主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 是方程(8-6)的三个根, 所以该方程可以写成

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0.$$

展开以后, 得到

$$\sigma^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma^2 + (\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)\sigma - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0.$$

将这个方程与方程(8-6)对比, 可见有关系式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 &= \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2, \\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (8-7)$$

在一定的应力状态下, 物体任一点的主应力不会随坐标系的改变而有所改变(尽管应力分量随着坐标系改变), 所以方程(8-7)右边的三个表达式的值不随坐标系而改变, 因而该方程左边的三个表达式的值也不会随坐标系而改变。于是可见, 不论坐标系如何改变, 下列表达式的值保持不变:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ \Theta_2 &= \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2, \\ \Theta_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (8-8)$$

这三个表达式称为应力状态的不变量。应当特别指出: 由其中的第一式可见, 在物体内的一点, 任意三个互相垂直的面上的正应力之和是常量, 并且等于该点的三个主应力之和。

§ 8-4 最大与最小的应力

假定物体内某一点的三个应力主向以及与之对应的三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 已经求得, 我们来求出这一点的最大与最小的应力。为了简便, 将三个坐标轴放在三个应力主向, 于是有 $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$, $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$, $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$ 。

首先来求出最大与最小的正应力。根据公式(8-3), 任一斜面上的正应力是

$$\sigma_N = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3. \quad (a)$$

其中的 l 、 m 、 n 现在应当是斜面的外法线 N 对于应力主向的方向余弦。

用关系式 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 消去式(a)中的三个方向余弦之一, 例如 l , 得

$$\sigma_n = (1 - m^2 - n^2)\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3$$

为了求出 σ_n 的极值，命 $\frac{\partial}{\partial m}\sigma_n = 0$, $\frac{\partial}{\partial n}\sigma_n = 0$ ，由此得 $m = 0$, $n = 0$ ，并从而有 $l = \pm 1$ 。代入式(a)，得出 σ_n 的一个极值，等于 σ_1 。再用关系式 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 从式(a)中依次消去 m 和 n ，又可得出 σ_n 的另外两个极值，分别等于 σ_2 和 σ_3 ，这就是说， σ_n 的极值不外乎 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 。

由此可见，在物体内的任意一点，三个主应力中最大的一个就是该点的最大正应力，而三个主应力中最小的一个就是该点的最小正应力。由此又可见，在三个主应力相等的特殊情况下，所有各斜面上的应力都相同，也就等于主应力。

现在来求出最大与最小的切应力，根据公式(8-2)，斜面上的全应力沿坐标轴方向的分量是

$$p_x = l\sigma_1, \quad p_y = m\sigma_2, \quad p_z = n\sigma_3 \quad (b)$$

将式(a)和式(b)代入公式(8-4)，得

$$\tau_n^2 = l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3)^2 \quad (c)$$

用关系式 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 消去式(c)中的三个方向余弦之一，例如 l ，得

$$\tau_n^2 = (1 - m^2 - n^2)\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - [(1 - m^2 - n^2)\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3]^2$$

为了求出 τ_n^2 的极值，命 $\frac{\partial}{\partial m}(\tau_n^2) = 0$, $\frac{\partial}{\partial n}(\tau_n^2) = 0$ ，简化以后，得

$$\left. \begin{aligned} m \left[(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \right] &= 0, \\ n \left[(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n^2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

由方程(d)求解 m 及 n ，将得出两种解答。第一种是 $m = 0$, $n = 0$ 。第二种解答是 $m = 0$, $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，或者是 $n = 0$, $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。对于每一组解答，都可以由关系式 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 求出 l ，并由式(c)求出 τ_n^2 。

再用关系式 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 从式(c)中依次消去 m ，然后消去 n ，总共得出 τ_n^2 为极值时的六组解答，列表如下：

$l =$	± 1	0	0	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$m =$	0	± 1	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$n =$	0	0	± 1	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\tau_n^2 =$	0	0	0	$\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$

表中的前三组解答对应于应力主面，对应于 τ^2 的极小值。后三组解答对应于“经过应力主轴之一而平分其余二应力主轴的夹角”的三个平面；对应的下列切应力包含了最大与最小的切应力：

$$\pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \quad \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)。$$

于是可见，最大和最小的切应力，在数值上等于最大主应力与最小主应力之差的一半，作用在通过中间主应力并且“平分最大主应力与最小主应力的夹角”的平面上。

§ 8-5 几何方程。刚体位移。体应变

现在来考虑空间问题的几何学方面。

在空间问题中，形变分量与位移分量应当满足下列 6 个几何方程：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (8-9)$$

其中的第一式、第二式和第六式已在 § 2-4 中导出，其余三式可用同样的方法导出。

为了导出刚体位移的表达式，试命

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0。$$

代入几何方程(8-9)，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0。 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

由(a)中前三式的积分得

$$u = f_1(y, z), \quad v = f_2(z, x), \quad w = f_3(x, y), \quad (b)$$

其中 f_1 、 f_2 、 f_3 是任意函数。代入(a)中的后三式，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f_3(x, y) + \frac{\partial}{\partial z} f_2(z, x) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} f_1(y, z) + \frac{\partial}{\partial x} f_3(x, y) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(z, x) + \frac{\partial}{\partial y} f_1(y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

为了求出函数 f_1 ，要从含有这个函数的微分方程中消去 f_2 和 f_3 。为此，将 (c) 中的第二式和第三式分别对 z 和 y 求导，得出

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f_1(y, z) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_1(y, z) = 0.$$

可见函数 f_1 只应包含常数项， y 项， z 项和 yz 项。命

$$f_1(y, z) = a + by + cz + dyz,$$

其中的 a 、 b 、 c 、 d 都是任意常数。与上相似，可以求得

$$f_2(z, x) = e + fz + gx + hzx,$$

$$f_3(x, y) = i + jx + ky + lxy.$$

将已求得的函数 f_1 、 f_2 、 f_3 代入式 (c)，得

$$(k + f) + (l + h)x = 0,$$

$$(c + j) + (d + l)y = 0,$$

$$(g + b) + (h + d)z = 0.$$

不论 x 、 y 、 z 取任何值，这些条件都应当满足，因此必须

$$f = -k, \quad l = -h,$$

$$j = -c, \quad d = -l,$$

$$b = -g, \quad h = -d.$$

由右边三式可见 $l = d = h = 0$ ，联合左边三式，一并代入上面 f_1 、 f_2 、 f_3 的表达式，得到

$$f_1(y, z) = a - gy + cz,$$

$$f_2(z, x) = e - kz + gx,$$

$$f_3(x, y) = i - cx + ky.$$

将各个函数代入式 (b)，并将任意常数 a 、 e 、 i 、 k 、 c 、 g 分别改写为 u_0 、 v_0 、 w_0 、 ω_x 、 ω_y 、 ω_z ，得位移分量

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \omega_z z - \omega_y y, \\ v &= v_0 + \omega_z x - \omega_x z, \\ w &= w_0 + \omega_y y - \omega_x x. \end{aligned} \right\} \quad (8-10)$$

式 (8-10) 所示的位移，是“形变为零”时的位移，也就是所谓“与形变无关的位移”，因而必然是刚体位移。推广 § 2-3 中的论证，可见 u_0 、 v_0 、 w_0

分别为沿 x 、 y 、 z 三个方向的刚体平移； ω_1 、 ω_2 、 ω_3 分别为绕 x 、 y 、 z 三个轴的刚体转动。

现在来导出体积的改变与位移分量之间的关系。设有微小的正平行六面体，它的棱边长度是 Δx 、 Δy 、 Δz 。在变形之前，它的体积是 $\Delta x \Delta y \Delta z$ ；在变形之后，它的体积成为

$$(\Delta x + \varepsilon_x \Delta x)(\Delta y + \varepsilon_y \Delta y)(\Delta z + \varepsilon_z \Delta z)。$$

因此，它的每单位体积的体积改变，即所谓体应变，为

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{(\Delta x + \varepsilon_x \Delta x)(\Delta y + \varepsilon_y \Delta y)(\Delta z + \varepsilon_z \Delta z) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z。 \end{aligned}$$

因为我们只考虑微小的应变，所以两个或三个应变分量的乘积可以略去不计，从而得到

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z。 \quad (8-11)$$

将几何方程(8-9)中的前三式代入，得

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}。 \quad (8-12)$$

§ 8-6 物体内任一点的形变状态

现在，设已知物体内任一点 P 处的六个形变分量 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 、 γ_{xy} ，试求经过 P 点的、沿 N 方向的任一微小线段 $PN = dr$ 的正应变，图 8-4。命这一微小线段的方向余弦为 l 、 m 、 n 。于是该线段在坐标轴上的投影为

$$dx = l dr, \quad dy = m dr, \quad dz = n dr。 \quad (a)$$

设 P 点的位移分量为 u 、 v 、 w ，则 N 点的位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u_N &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ v_N &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ w_N &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz。 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

在变形之后，线段 PN 在坐标轴上的投影成为

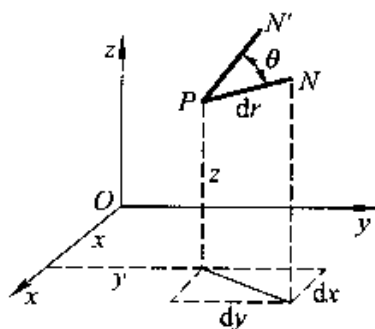


图 8-4

$$\left. \begin{aligned} dx + u_N - u &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ dy + v_N - v &= dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ dz + w_N - w &= dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

命线段 PN 的线应变为 ε_N , 则该线段在变形之后的长度为 $dr + \varepsilon_N dr$, 而这长度的平方就等于式(c)中三个投影的平方之和:

$$\begin{aligned} (dr + \varepsilon_N dr)^2 &= \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right)^2 + \\ &\quad \left(dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right)^2. \end{aligned}$$

除以 $(dr)^2$, 并应用式(a), 得

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_N)^2 &= \left[l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 + \left[l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 + \\ &\quad \left[l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

因为线应变 ε_N 和位移分量的导数都是微小的, 它们的平方或乘积都可以不计, 所以由上式可得

$$\begin{aligned} 1 + 2\varepsilon_N &= l^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2lm \frac{\partial u}{\partial y} + 2ln \frac{\partial u}{\partial z} + m^2 \left(1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2mn \frac{\partial v}{\partial z} + 2ml \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &\quad n^2 \left(1 + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2nl \frac{\partial w}{\partial x} + 2mn \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

注意到 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, 上式又可以简化为

$$\varepsilon_N = l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + mn \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + nl \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + lm \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

再应用几何方程(8-9), 即得

$$\varepsilon_N = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + mn\gamma_{yz} + nl\gamma_{zx} + lm\gamma_{xy}. \quad (8-13)$$

现在来求出经过 P 点的微小线段 PN 和 PN' 的夹角的变化, 图 8-4。设 PN 在变形之后的方向余弦为 l_1 、 m_1 、 n_1 , 则由式(c)及式(a)可见

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz}{dr(1 + \varepsilon_N)} \\ &= \left[l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right] (1 + \varepsilon_N)^{-1} \\ &= \left[l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right] (1 - \varepsilon_N + \varepsilon_N^2 - \dots). \end{aligned}$$

注意 ε_x 、 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 都是微小的, 在展开上式之后, 略去二阶以上的微小量, 即得

$$l_1 = l \left(1 - \varepsilon_x + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (d)$$

同样可得

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m \left(1 - \varepsilon_x + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} + l \frac{\partial v}{\partial x}, \\ n_1 &= n \left(1 - \varepsilon_x + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

与此相似, 设线段 PN' 在变形之前的方向余弦为 l' 、 m' 、 n' , 则其在变形之后的方向余弦为

$$\left. \begin{aligned} l'_1 &= l' \left(1 - \varepsilon_x + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m' \frac{\partial u}{\partial y} + n' \frac{\partial u}{\partial z}, \\ m'_1 &= m' \left(1 - \varepsilon_x + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n' \frac{\partial v}{\partial z} + l' \frac{\partial v}{\partial x}, \\ n'_1 &= n' \left(1 - \varepsilon_x + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + l' \frac{\partial w}{\partial x} + m' \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

其中的 ε_x 为线段 PN' 的线应变。

命线段 PN 及 PN' 在变形之后的夹角为 θ_1 , 则

$$\cos \theta_1 = l_1 l'_1 + m_1 m'_1 + n_1 n'_1.$$

将式(d)、式(e)及式(f)代入, 并注意 ε_x 及 ε_x 是微小的, 即得

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= (ll' + mm' + nn') (1 - \varepsilon_x - \varepsilon_x) + 2 \left(ll' \frac{\partial u}{\partial x} + mm' \frac{\partial v}{\partial y} + nn' \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ &\quad (mn' + m'n) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + (nl' + n'l) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + (lm' + l'm) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

应用几何方程(8-9), 并注意 $ll' + mm' + nn' = \cos \theta$, 而 θ 就是 PN 和 PN' 在变形以前的夹角, 则上式成为

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= (1 - \varepsilon_x - \varepsilon_x) \cos \theta + 2(l'l\varepsilon_x + mm'\varepsilon_x + nn'\varepsilon_x) + (mn' + m'n)\gamma_{yz} + \\ &\quad (nl' + n'l)\gamma_{zx} + (lm' + l'm)\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (8-14)$$

求出 θ_1 以后, 即可求得 PN 与 PN' 之间的夹角的改变 $\theta_1 - \theta$

由以上所述可见, 在物体内的任意一点, 如果已知六个形变分量, 就可以求得经过该点的任一线段的线应变, 也可以求得经过该点的任意二线段之间的夹角的改变。这就是说, 六个形变分量完全决定这一点的形变状态。

注意, 求任意方向的线应变 ε_x 的公式(8-13), 是和求任意斜面上的正应力 σ_x 的公式(8-3)相似的。代替正应力 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 的, 是线应变 ε_x 、 ε_y 、 ε_z ; 代替

切应力 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} 的，是一半切应变，即 $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ 。经过进一步的几何分析，还可以得出和 §8-3 及 §8-4 中相似的结论，如下所述。

在物体内的任意一点，一定存在三个互相垂直的形变主向，它们所成的三个直角在变形之后保持为直角（即切应变等于零）。沿着这三个形变主向的线应变称为主应变。三个主应变中间最大的一个，就是该点的最大线应变；三个主应变中间最小的一个，就是该点的最小线应变。三个主应变 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 ，是下列三次方程中 ε 的三个实根：

$$\varepsilon^3 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\varepsilon^2 + \left(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2}{4}\right)\varepsilon - \left(\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{yz}\gamma_{zx}\gamma_{xy}}{4}\right) = 0 \quad (8-15)$$

不论坐标系如何改变，下列表达式保持不变：

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ \theta_2 &= \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2}{4} \\ \theta_3 &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{yz}\gamma_{zx}\gamma_{xy}}{4} \end{aligned} \right\} \quad (8-16)$$

这三个表达式称为形变状态的不变量。在上一节中已经看到，第一个不变量 θ_1 就是体应变 θ 。

§8-7 物理方程。方程总结

各向同性体中的形变分量与应力分量之间的关系已在 §2-6 中给出如下：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (8-17)$$

这就是空间问题物理方程的基本形式。

由(8-17)中的后三式可见,如果把坐标轴放在应力主向,则由于 $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$ 而有 $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0$ 。这就表明,在各向同性体中,应力主向与形变主向是重合的。这时的 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 就成为主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ; 这时的 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 就成为主应变 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 , 而主应变与主应力之间有如下的关系:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

因此,如果已知三个主应力,就可以很简单地算出三个主应变,不必再应用三次方程(8-15)。

将(8-17)中的前三式相加,得

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

应用(8-11)及(8-8),上式可以简写为

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \Theta. \quad (8-18)$$

在前一节中已经说明, $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ 是体应变。现在又看到,体应变 θ 是和 Θ 成正比的。因此, $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ 也就称为体积应力,而 Θ 与 θ 之间的比例常数 $\frac{E}{1-2\mu}$ 称为体积模量。

为了以后在某些情况下用起来方便,下面来导出物理方程的另一种形式——将应力分量用形变分量表示。

由方程(8-17)中的第一式可得

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_x - \mu\Theta].$$

求解 σ_x , 得

$$\sigma_x = \frac{1}{1+\mu} (E\varepsilon_x + \mu\Theta).$$

将由公式(8-18)得来的 $\Theta = \frac{E\theta}{1-2\mu}$ 代入,得

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \varepsilon_x \right).$$

对于 σ_y 和 σ_z , 也可以导出与此相似的两个方程。此外,再由(8-17)中的后三式求解切应力分量,总共得出如下的6个方程。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \varepsilon_x \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \varepsilon_y \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \varepsilon_z \right), \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (8-19)$$

这就是空间问题物理方程的第二种形式。

引用记号 $\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ ，并注意 $\frac{E}{1+\mu} = 2G$ ，则方程(8-19)可以改写成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, & \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, & \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (8-20)$$

这是空间问题物理方程的又一种形式，其中的 λ 和 G 是拉梅首先用来表征物体弹性的两个常数，因而称为拉梅常数。

总结起来，对于空间问题，我们共有 15 个未知函数：6 个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ；6 个形变分量 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 、 γ_{xy} ；3 个位移分量 u 、 v 、 w 。这 15 个未知函数应当满足 15 个基本方程：3 个平衡微分方程(8-1)；6 个几何方程(8-9)；6 个物理方程(8-17)，或(8-19)，或(8-20)。此外，在整个弹性体中，应力分量和位移分量都应当是单值的。即为本构方程

在位移边界问题中，位移分量在边界上还应当满足位移边界条件

$$u_i = \bar{u}_i, \quad v_i = \bar{v}_i, \quad w_i = \bar{w}_i. \quad (8-21)$$

在应力边界问题中，应力分量在边界上还应当满足应力边界条件(8-5)；在混合边界问题中，某些边界条件是位移边界条件，而另一些边界条件是应力边界条件。

§ 8-8 轴对称问题的基本方程

在空间问题中，如果弹性体的几何形状，约束情况，以及所受的外来因

素，都是对称于某一轴(通过这个轴的任一平面都是对称面)，则所有的应力、形变和位移也就对称于这一轴。这种问题称为空间轴对称问题。

在描述轴对称问题中的应力、形变、位移时，用圆柱坐标 ρ 、 φ 、 z 比用直角坐标 x 、 y 、 z 方便得多。这首先是因为，如果以弹性体的对称轴为 z 轴，图 8-5，则所有的应力分量、形变分量和位移分量都将只是 ρ 和 z 的函数，不随 φ 而变。

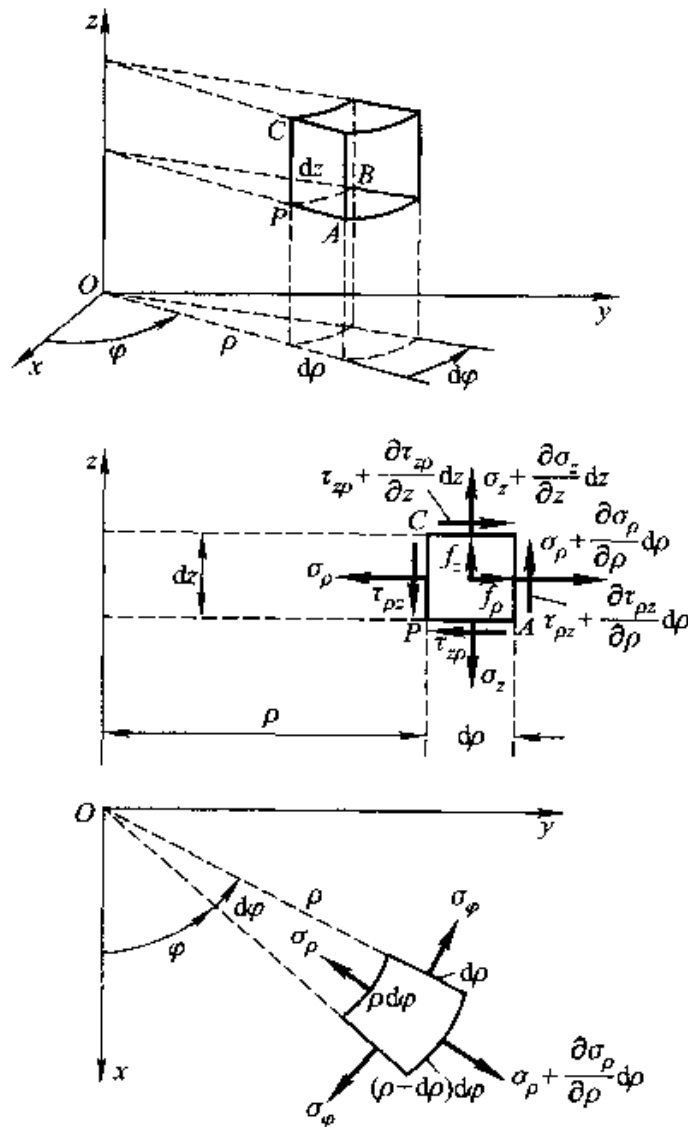


图 8-5

首先来导出轴对称问题的平衡微分方程。

取 z 轴铅直向上，用相距 $d\rho$ 的两个圆柱面，互成 $d\varphi$ 角的两个铅直面及相距 dz 的两个水平面，从弹性体割取一个微小六面体 $PABC$ ，图 8-5。沿 ρ 方向的正应力，称为径向正应力，用 σ_ρ 代表；沿 φ 方向的正应力，称为环向正应力，用 σ_φ 代表；沿 z 方向的正应力，称为轴向正应力，仍然用 σ_z 代表；作用在圆柱面上而沿 z 方向作用的切应力用 $\tau_{\rho z}$ 代表，作用在水平面上而沿 ρ 方向作

用的切应力用 τ_{φ} 代表。根据切应力的互等关系, $\tau_{\varphi} = \tau_{\rho\varphi}$ 。由于对称性, $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho}$ 及 $\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi}$ 都不存在。这样, 总共只有四个应力分量; σ_{ρ} 、 σ_{φ} 、 σ_z 、 $\tau_{\rho z} = \tau_{z\rho}$, 它们只是 ρ 和 z 的函数。

如果六面体的内圆柱面上的平均正应力是 σ_{ρ} , 则外圆柱面上的平均正应力应当是 $\sigma_{\rho} + \frac{\partial\sigma_{\rho}}{\partial\rho}d\rho$ 。由于对称, σ_{ρ} 在 φ 方向(环向)没有增量。如果六面体下面的平均正应力是 σ_z , 则上面的平均正应力应当是 $\sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz$ 。同样, 内面及外面的平均切应力分别为 $\tau_{\rho z}$ 及 $\tau_{\rho z} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}d\rho$, 下面及上面的平均切应力分别为 τ_{φ} 及 $\tau_{\varphi} + \frac{\partial\tau_{\varphi}}{\partial z}dz$ 。径向的体力用 f_{ρ} 代表; 轴向的体力, 即 z 方向的体力, 仍然用 f_z 代表。

将六面体所受的各力投影到六面体中心的径向轴上, 取 $\sin \frac{d\varphi}{2}$ 及 $\cos \frac{d\varphi}{2}$ 分别近似地等于 $\frac{d\varphi}{2}$ 及 1, 得平衡方程

$$\left(\sigma_{\rho} + \frac{\partial\sigma_{\rho}}{\partial\rho}d\rho\right)(\rho + d\rho)d\varphi dz - \sigma_{\rho}\rho d\varphi dz - 2\sigma_{\varphi}d\rho dz \frac{d\varphi}{2} + \left(\tau_{\varphi} + \frac{\partial\tau_{\varphi}}{\partial z}dz\right)\rho d\varphi d\rho - \tau_{\varphi}\rho d\varphi d\rho + f_{\rho}\rho d\varphi d\rho dz = 0。$$

简化以后, 除以 $\rho d\varphi d\rho dz$, 然后略去微量, 得

$$\frac{\partial\sigma_{\rho}}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_{\varphi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\varphi}}{\rho} + f_{\rho} = 0。$$

将六面体所受的各力投影到 z 轴上, 得平衡方程

$$\left(\tau_{\rho z} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}d\rho\right)(\rho + d\rho)d\varphi dz - \tau_{\rho z}\rho d\varphi dz + \left(\sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz\right)\rho d\varphi d\rho - \sigma_z\rho d\varphi d\rho + f_z\rho d\varphi d\rho dz = 0。$$

简化以后, 除以 $\rho d\varphi d\rho dz$, 然后略去微量, 得

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} + f_z = 0。$$

于是得空间轴对称问题的平衡微分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{\rho}}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_{\varphi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\varphi}}{\rho} + f_{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} + f_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-22)$$

现在来导出轴对称问题的几何方程。

沿 ρ 方向线应变，称为径向线应变，用 ε_ρ 代表；沿 φ 方向的线应变，称为环向线应变，以 ε_φ 代表；沿 z 方向的线应变，称为轴向线应变，仍然用 ε_z 代表； ρ 方向与 z 方向之间的切应变用 $\gamma_{z\rho}$ 代表。由于对称，切应变 $\gamma_{\rho\varphi}$ 及 $\gamma_{\varphi z}$ 都等于零。沿 ρ 方向的位移分量，称为径向位移，用 u_ρ 代表，沿 z 方向的位移分量称为轴向位移，仍然用 w 代表。由于对称，环向位移 $u_\varphi = 0$ 。

通过与 § 2-4 及 § 4-2 中同样的分析，可见，由于径向位移 u_ρ ，引起的形变分量是

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \gamma_{z\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z};$$

由于轴向位移 w ，引起的形变分量是

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{z\rho} = \frac{\partial w}{\partial \rho}.$$

将以上两组形变相叠加，即得空间轴对称问题的几何方程

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{z\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}. \quad (8-23)$$

由于圆柱坐标也是和直角坐标一样的正交坐标，所以物理方程可以直接根据胡克定律得来。在轴对称问题中，物理方程是：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{1}{E} [\sigma_\rho - \mu(\sigma_\varphi + \sigma_z)], \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} [\sigma_\varphi - \mu(\sigma_z + \sigma_\rho)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\varphi)], \\ \gamma_{z\rho} &= \frac{1}{G} \tau_{z\rho} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{z\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (8-24)$$

将(8-24)中的前三式相加，仍然得到

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \Theta, \quad (8-25)$$

式中的体应变

$$\theta = \varepsilon_\rho + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (8-26)$$

及体积应力

$$\Theta = \sigma_\rho + \sigma_\varphi + \sigma_z. \quad (8-27)$$

是不随坐标系而变的不变量。

通过与 § 8-7 中同样的处理，也同样可以得到用形变分量表示应力分量的

物理方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \varepsilon_r \right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \varepsilon_\varphi \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \varepsilon_z \right), \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{r\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (8-28)$$

§ 8-9 球对称问题的基本方程

在空间问题中，如果弹性体的几何形状、约束情况，以及所受的外来因素，都是对称于某一点（通过这一点的任一平面都是对称面），则所有的应力、形变和位移也就对称于这一点。这种问题称为点对称问题，又称为球对称问题。显然，球对称问题只可能发生于空心或实心的圆球体中。

在描述球对称问题中的应力、形变、位移时，用圆球坐标就非常简单。这是因为，如果以弹性体的对称点为坐标原点 O ，则所有的应力分量、形变分量、位移分量都将只是径向坐标 r 的函数，不随其余两个坐标（角坐标 θ 和 φ ）而变。

首先来导出球对称问题的平衡微分方程。用相距 dr 的两个圆球面和两两互成 $d\varphi$ 角的两对径向平面，从弹性体割取一个微小六面体，图 8-6。设作用于内球面的径向正应力为 σ_r ，则作用于外球面的径向正应力为 $\sigma_r + d\sigma_r$ 。由于对称，作用于径向平面的切向正应力 $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ ，均用 σ_r 代表。由于对称，该六面体上不存在切应力。径向体力用 f_r 代表。由于对称，不可能有切向体力。根据该六面体在径向的平衡条件，可以列出平衡方程

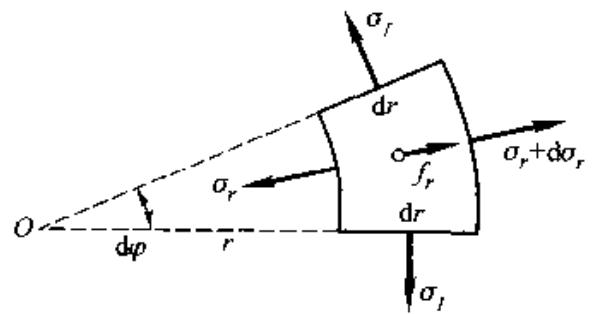


图 8-6

$$(\sigma_r + d\sigma_r) [(r + dr) d\varphi]^2 - \sigma_r (rd\varphi)^2 - 4\sigma_r dr (rd\varphi) \sin \frac{d\varphi}{2} + f_r (rd\varphi)^2 dr = 0$$

由于 $d\varphi$ 是微小的，可以用 $\frac{d\varphi}{2}$ 代替 $\sin \frac{d\varphi}{2}$ 。这样，将上式简化以后，除以 $r^2 dr d\varphi^2$ ，再略去微量，即得平衡微分方程

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\tau) + f_r = 0. \quad (8-29)$$

其次来导出球对称问题的几何方程。由于对称，只可能发生径向位移 u_r ，不可能发生切向位移。又由于对称，只可能发生径向线应变 ε_r 及切向线应变 ε_τ ，不可能发生坐标方向的切应变。于是，参照轴对称问题的几何方程 (8-23)，极易写出球对称问题的几何方程

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\tau = \frac{u_r}{r}. \quad (8-30)$$

物理方程可以直接根据胡克定律得来：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\tau - \mu\sigma_r) = \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\mu\sigma_\tau), \\ \varepsilon_\tau &= \frac{1}{E}(\sigma_\tau - \mu\sigma_r - \mu\sigma_\tau) = \frac{1}{E}[(1-\mu)\sigma_\tau - \mu\sigma_r]. \end{aligned} \right\} \quad (8-31)$$

由上式求解应力分量，得物理方程的第二种形式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_r + 2\mu\varepsilon_\tau], \\ \sigma_\tau &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}(\varepsilon_\tau + \mu\varepsilon_r). \end{aligned} \right\} \quad (8-32)$$

习 题

8-1 试证明：在与三个主应力成相同角度的面上，正应力及切应力分别为

$$\sigma_v = \frac{1}{3}\Theta, \quad \tau_v = \frac{1}{3}\sqrt{2(\Theta^2 - 3\Theta_2)}.$$

8-2 设某一物体发生如下的位移：

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z,$$

$$v = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z,$$

$$w = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z.$$

试证明：各个形变分量在物体内部为常量（即所谓均匀形变）；在变形以后，物体内的平面保持为平面，直线保持为直线，平行面保持平行，平行线保持平行，正平行六面体变成斜平行六面体，圆球面变成椭球面。

参 考 教 材

[1] 王龙甫编. 弹性理论[M]. 北京：科学出版社，1978：第二章及第三章。

[2] 钱伟长，叶开沅编. 弹性力学[M]. 北京：科学出版社，1956：第二章及第三章。

第九章 空间问题的解答

§ 9-1 按位移求解空间问题

按位移求解问题，是取位移分量为基本未知函数。对空间问题说来，这就要从 15 个基本方程中消去应力分量和形变分量，得出只包含位移分量的微分方程，推导如下。

将几何方程(8-9)代入物理方程(8-19)，得出用位移分量表示应力分量的弹性方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

其中

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

将弹性方程(9-1)代入平衡微分方程(8-1)，并采用记号 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ，得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 u \right) + f_x &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 v \right) + f_y &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + f_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

这是用位移分量表示的平衡方程，也就是按位移求解空间问题时所需用的基本微分方程。

如果将(9-1)代入(8-5)，就能把应力边界条件用位移分量来表示，但由于这样得出的方程太长，我们宁愿把应力边界条件保留为(8-5)的形式，而理解其中的应力分量系通过(9-1)式用位移分量表示。位移边界条件则仍然如(8-21)所示。

对于轴对称问题，也可以通过与上相似的推导，得出相应的微分方程。为此，首先将几何方程(8-23)代入物理方程(8-28)，得出弹性方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \rho} \right), \\ \sigma_{\tau} &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{u_{\rho}}{\rho} \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \tau_{\rho z} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u_{\rho}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9-3)$$

其中

$$\theta = \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{u_{\rho}}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

再将(9-3)式代入平衡微分方程(8-22)，并采用记号 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ，得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \nabla^2 u_{\rho} - \frac{u_{\rho}}{\rho^2} \right) + f_{\rho} &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + f_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

这就是按位移求解空间轴对称问题时所需用的基本微分方程。

对于球对称问题，也可以进行同样的推导：将几何方程(8-30)代入物理方程(8-32)，得到弹性方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[(1-\mu) \frac{du_r}{dr} + 2\mu \frac{u_r}{r} \right], \\ \sigma_{\tau} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\mu \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9-5)$$

再代入平衡微分方程(8-29)，得常微分方程

$$\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{2}{r^2} u_r \right) + f_r = 0. \quad (9-6)$$

这就是按位移求解球对称问题时所需用的基本微分方程。

§ 9-2 无限大弹性层受重力及均布压力

设有无限大的等厚度弹性层，其密度为 ρ ，在下面受完全约束，在上面受均布压力 q ，图 9-1。以上面为 xy 面， z 轴铅直向下。这样，体力分量就是 $f_x = 0$ ， $f_y = 0$ ， $f_z = \rho g$ 。

由于对称（任一铅直平面都是对称面），试假设

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = w(z). \quad (a)$$

这样就得到

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw}{dz},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{d^2 w}{dz^2}.$$

可见基本微分方程(9-2)中的前二式自然满足，而第三式成为

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) + \rho g = 0,$$

简化以后得

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{E(1-\mu)}, \quad (b)$$

积分以后得

$$\theta = \frac{dw}{dz} = - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{E(1-\mu)}(z+A), \quad (c)$$

$$w = - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{2E(1-\mu)}(z+A)^2 + B, \quad (d)$$

其中的 A 和 B 是任意常数。

现在，试根据边界条件来决定常数 A 和 B 。将以上的结果代入弹性方程(9-1)，得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= - \frac{\mu}{1-\mu} \rho g (z+A), \\ \sigma_z &= - \rho g (z+A), \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

在边界上， $l = m = 0$ 而 $n = -1$ 。因为 $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$ 而 $\bar{f}_z = q$ ，所以应力边界条件(8-5)中的前二式自然满足，而第三式要求

$$[-\sigma_z]_{z=0} = q,$$

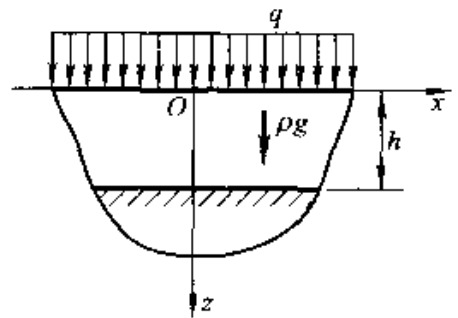


图 9-1

将式(e)中 σ_z 的表达式代入, 得 $\rho g A = q$, 即 $A = q/\rho g$ 。再代回式(e), 即得应力分量的解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= -\frac{\mu}{1-\mu}(q + \rho g z), \\ \sigma_z &= -(q + \rho g z), \\ \tau_{rz} = \tau_{zr} = \tau_{\theta z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

并由式(d)得出铅直位移

$$w = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{2E(1-\mu)}\left(z + \frac{q}{\rho g}\right)^2 + B_0 \quad (g)$$

为了决定常数 B , 必须利用位移边界条件。由于弹性层的下面受完全约束, 故有位移边界条件

$$(u)_{z=h} = 0$$

将式(g)代入, 得

$$B = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{2E(1-\mu)}\left(h + \frac{q}{\rho g}\right)^2$$

再代回式(g), 简化以后, 得

$$w = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\left[q(h-z) + \frac{\rho g}{2}(h^2 - z^2)\right] \quad (h)$$

现在, 应力分量和位移分量都已经完全确定, 并且所有一切条件都已经满足, 可见式(a)所示的假设完全正确, 而所得的应力和位移就是正确解答。

显然, 最大的位移发生在边界上: 由式(h)可得

$$w_{\max} = (w)_{z=0} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\left(qh + \frac{1}{2}\rho gh^2\right)$$

在式(f)中, σ_r 和 σ_θ 是铅直截面上的水平正应力, σ_z 是水平截面上的铅直正应力, 而它们的比值是

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_z} = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_z} = \frac{\mu}{1-\mu}$$

这个比值在土力学中称为侧压力系数。

§ 9-3 空心圆球受均布压力

设有空心圆球, 内半径为 a , 外半径为 b , 在内面及外面分别受均布压力 q_a 及 q_b , 体力可以不计。对于这个球对称问题, 由于 $f_r = 0$, 微分方程(9-6)简化为

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{2}{r^2} u_r = 0$$

这个常微分方程的解答是

$$u_r = Ar + \frac{B}{r^2}, \quad (\text{a})$$

其中 A 和 B 是任意常数。

将式(a)代入弹性方程(9-5), 得应力分量的表达式

$$\sigma_r = \frac{E}{1-2\mu}A - \frac{2E}{1+\mu} \frac{B}{r^3}, \quad (\text{b})$$

$$\sigma_\tau = \frac{E}{1-2\mu}A + \frac{E}{1+\mu} \frac{B}{r^3}. \quad (\text{c})$$

边界条件是

$$(\sigma_r)_{r=a} = -q_a, \quad (\sigma_r)_{r=b} = -q_b.$$

将式(b)代入, 得

$$\frac{E}{1-2\mu}A - \frac{2E}{(1+\mu)a^3}B = -q_a,$$

$$\frac{E}{1-2\mu}A - \frac{2E}{(1+\mu)b^3}B = -q_b.$$

求解 A 和 B , 得

$$A = \frac{a^3 q_a - b^3 q_b}{E(b^3 - a^3)}(1-2\mu), \quad B = \frac{a^3 b^3 (q_a - q_b)}{2E(b^3 - a^3)}(1+\mu). \quad (\text{d})$$

将式(d)代入式(a), 整理以后, 得径向位移的解答:

$$u_r = \frac{(1+\mu)r}{E} \left[\frac{\frac{b^3}{2r^3} + \frac{1-2\mu}{1+\mu}}{\frac{b^3}{a^3} - 1} q_a - \frac{\frac{a^3}{2r^3} + \frac{1-2\mu}{1+\mu}}{1 - \frac{a^3}{b^3}} q_b \right]. \quad (\text{e})$$

将式(d)代入式(b)及式(c), 整理以后, 得应力的解答:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left. \begin{aligned} -\frac{\frac{b^3}{r^3} - 1}{\frac{b^3}{a^3} - 1} q_a - \frac{1 - \frac{a^3}{r^3}}{1 - \frac{a^3}{b^3}} q_b, \\ \sigma_\tau &= \frac{\frac{b^3}{2r^3} + 1}{\frac{b^3}{a^3} - 1} q_a - \frac{1 + \frac{a^3}{2r^3}}{1 - \frac{a^3}{b^3}} q_b. \end{aligned} \right\} \quad (\text{f}) \end{aligned}$$

由于不存在坐标方向的切应力分量, 上式所示的径向正应力及切向正应力就是主应力。

如果空心圆球只受有内压力 q , 则径向位移的表达式(e)简化为

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{(1+\mu)r}{E} \frac{\frac{b^3}{2r^3} + \frac{1-2\mu}{1+\mu}}{\frac{b^3}{a^3} - 1} q \\
 &= \frac{(1+\mu)qr}{E} \frac{\frac{1}{2r^3} + \frac{1-2\mu}{1+\mu} \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}},
 \end{aligned}$$

应力分量的表达式(f)简化为

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= -\frac{\frac{b^3}{r^3} - 1}{\frac{b^3}{a^3} - 1} q = -\frac{\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}} q, \\
 \sigma_t &= \frac{\frac{b^3}{2r^3} + 1}{\frac{b^3}{a^3} - 1} q = \frac{\frac{1}{2r^3} + \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}} q.
 \end{aligned}$$

现在，设有弹性体，它具有半径为 a 的圆球形小孔洞，在孔洞内受有流体压力 q 的作用。为了得到孔洞附近的位移和应力，只须在上列各式中令 b 趋于无限大。这样就得到

$$u_r = \frac{(1+\mu)qa^3}{2Er^2}, \quad \sigma_r = -\frac{qa^3}{r^3}, \quad \sigma_t = \frac{qa^3}{2r^3}.$$

由此可见，径向位移 u_r 按照 r^2 的增大而消减，径向及切向正应力均按 r^3 的增大而消减，特别值得注意的是，孔边将发生 $q/2$ 的切向拉应力，它可能引起脆性材料的开裂。

§ 9-4 位移势函数的引用

在无限大弹性层受重力及均布压力的问题中，§ 9-2，位移分量只是一个坐标(即 z)的函数；在空心圆球受均布压力的问题中，§ 9-3，位移分量也是一个坐标(即 r)的函数。这样，我们才比较简单地直接由位移分量的基本微分方程求得解答。在一般的空间问题中，位移分量是两个或三个坐标的函数，就不可能这样直接求解。因此，有些数学家和力学家曾经引用这样或那样的位移函数，把位移分量用位移函数来表示，然后致力于寻求各种问题的位移函数，从而求得位移分量的解答，再从而求得应力分量的解答。本节中将介绍最简单的一种位移函数，即位移势函数。

这里附带指出：在十九世纪，位移和形变这两方面的概念不是严格区分的。因此，为了求解位移而引用的那些函数，本来应当称为位移函数（正像为了求解应力而引用的那些函数称为应力函数），却被一些数学和力学大师们称为应变函数，而后来的不少作者，为了对那些大师们表示尊重，也就沿用了应变函数这个名称。现在看来，为了严格区分位移和应变这两个概念，不宜再把位移函数称为应变函数。

为简单起见，这里将只讨论体力可以不计的情况。于是，位移分量的微分方程(9-2)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 u &= 0, \\ \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 v &= 0, \\ \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9-7)$$

现在，假设位移是有势的，即，假设位移在某方向的分量是和位移的势函数 $\psi(x, y, z)$ 在该方向的导数成正比。为了后面的运算比较方便，取比例常数为 $\frac{1}{2G}$ ，即 $\frac{1+\mu}{E}$ ，于是有

$$u = \frac{1}{2G} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{1}{2G} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \frac{1}{2G} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (9-8)$$

从而有

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2G} \nabla^2 \psi, \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi, \\ \nabla^2 u &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi, & \nabla^2 v &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi, \\ \nabla^2 w &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将式(b)代入(9-7)式，可见 ψ 所应满足的条件为

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi = 0,$$

也就是

$$\nabla^2 \psi = C, \quad (c)$$

其中的 C 是任意常数。于是，取任意一个满足式(c)的函数 ψ ，按(9-8)式求出的位移分量都能满足微分方程(9-7)，因而都可以试取为问题的解答。

显然, 如果取 $C=0$, 即命 $\nabla^2 \psi=0$, 则按(9-8)式求出的位移分量也能试取为问题的解答。这样, 虽然缩小了函数 ψ 的范围, 但针对具体问题去寻求函数 ψ 就比较容易, 因为这时的 ψ 是调和函数, 而调和函数是数学分析中研究得很详尽的函数。

不仅如此, 当 $\nabla^2 \psi=0$ 时, 由式(a)可见有 $\theta=0$ 。于是, 注意 $\frac{1}{2G} = \frac{1+\mu}{E}$, 即可由(9-8)式及弹性方程(9-1)得出非常简单的应力分量表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, & \sigma_z &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}, & \tau_{yz} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y}, & \tau_{zx} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9-9)$$

这样, 对于一个空间问题, 如果找到适当的调和函数 $\psi(x, y, z)$, 使得(9-8)式给出的位移分量和(9-9)式给出的应力分量能够满足边界条件, 就得到该问题的正确解答。

对于轴对称的问题, 当不计体力时, 位移分量的微分方程(9-4)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \nabla^2 u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9-10)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

现在, 假设位移是有势的, 把位移分量用位移势函数 $\psi(\rho, z)$ 表示成为

$$u_\rho = \frac{1}{2G} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad w = \frac{1}{2G} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (9-11)$$

从而有

$$\theta = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2G} \nabla^2 \psi, \quad (d)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 \psi, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi, \\ \nabla^2 u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2} &= \frac{1}{2G} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right] \\ &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 \psi, \\ \nabla^2 w &= \frac{1}{2G} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

将式(e)代入(9-10), 可见 ψ 所应满足的条件为

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 \psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi = 0,$$

即

$$\nabla^2 \psi = C,$$

和在直角坐标中一样，我们取 $C=0$ ，即 $\nabla^2 \psi = 0$ 。于是 ψ 成为调和函数，而且可由(9-11)式及弹性方程(9-3)得出非常简单的应力分量表达式如下：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2}, & \sigma_\omega &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, & \sigma_z &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \\ \tau_{\rho z} &= \tau_{z\rho} & &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9-12)$$

这样，对于一个轴对称问题，如果找到适当的调和函数 $\psi(\rho, z)$ ，使得(9-11)式给出的位移分量和(9-12)式给出的应力分量能够满足边界条件，就得到该问题的正确解答。

应当指出：并不是所有一切问题中的位移都是有势的，因此，位移势函数并不是在所有一切问题中都存在的，当然也就很明显，用位移势函数去求解问题，并不一定就能成功。实际上，如果位移势函数存在，则有 $\theta = \nabla^2 \psi = C$ ，表示体积应变在整个弹性体中是常量，这种情况当然是很特殊的，因而位移势函数所能解决的问题是很少的。下一节中所介绍的位移函数，则用来解决较多的问题。但是，为了减少运算，有时也可以结合应用位移势函数。

§ 9-5 乐甫位移函数及伽辽金位移函数

为了求解轴对称问题，乐甫引用一个位移函数 $\zeta(\rho, z)$ ，把位移分量表示成为

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial z}, \\ w &= \frac{1}{2G} \left[2(1-\mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (9-13)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

将表达式(9-13)代入轴对称位移的微分方程(9-10)，可见位移函数 ζ 所

应满足的条件是

$$\nabla^4 \zeta = 0,$$

这就是说, ζ 应当是重调和函数。将表达式(9-13)代入弹性方程(9-3), 注

意 $\frac{1}{2G} = \frac{1+\mu}{E}$, 即得应力分量的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \zeta, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \nabla^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \zeta, \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \zeta, \\ \tau_{z\rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1-\mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (9-14)$$

于是可见, 对于一个轴对称问题, 只须找到恰当的重调和函数 $\zeta(\rho, z)$, 使得(9-13)式给出的位移分量和(9-14)式给出的应力分量能够满足边界条件, 就得到该问题的正确解答。函数 ζ 称为乐甫位移函数, 但有时也不恰当地被称为乐甫应变函数。

为了求解一般的、非轴对称的空间问题, 伽辽金把乐甫位移函数加以推广。他引用三个位移函数 $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$, 把位移分量表示成为

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2G} \left[2(1-\mu) \nabla^2 \xi - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right], \\ v &= \frac{1}{2G} \left[2(1-\mu) \nabla^2 \eta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right], \\ w &= \frac{1}{2G} \left[2(1-\mu) \nabla^2 \zeta - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (9-15)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

将表达式(9-15)代入位移分量的微分方程(9-7), 可见上述三个位移函数所应满足的条件是

$$\nabla^4 \xi = 0, \quad \nabla^4 \eta = 0, \quad \nabla^4 \zeta = 0,$$

这就是说, 三个位移函数都应当是重调和函数。将表达式(9-15)代入弹性方

程(9-1), 注意 $\frac{1}{2G} = \frac{1+\mu}{E}$, 即得应力分量的表达式:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= 2(1-\mu) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \xi + \left(\mu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \\
 \sigma_y &= 2(1-\mu) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \eta + \left(\mu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \\
 \sigma_z &= 2(1-\mu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \zeta + \left(\mu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \\
 \tau_{yz} &= (1-\mu) \left(\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \zeta + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \eta \right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \\
 \tau_{zx} &= (1-\mu) \left(\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \xi + \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \zeta \right) - \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \\
 \tau_{xy} &= (1-\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \eta + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \xi \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \right\} (9-16)$$

于是可见，对于一般的一个空间问题，只须找到三个恰当的重调和函数 ξ 、 η 、 ζ ，使得(9-15)式给出的位移分量和(9-16)式给出的应力分量能够满足边界条件，就得到该问题的正确解答。

§ 9-6 半空间体在边界上受法向集中力

设有半空间体，体力不计，在其边界面上受有法向集中力 F ，图 9-2。这是一个轴对称问题，而对称轴就是力 F 的作用线。因此，把 z 轴放在力 F 的作用线上。坐标原点就放在力 F 的作用点。

应力边界条件要求

$$(\sigma_z)_{z=0, \rho \neq 0} = 0, \quad (a)$$

$$(\tau_{z\rho})_{z=0, \rho \neq 0} = 0. \quad (b)$$

此外，还有这样的应力边界条件：在 O 点附近的一小部分边界上，有一组面力作用，它的分布不明确，但已知它等效于集中力 F 。在半空间体的任何一个水平截面上的应力，必须和这一组面力合成平衡力系，因而也就必须和力 F 合成平衡力系。于是得出由应力边界条件转换而来的平衡条件

$$\int_0^{\infty} (2\pi\rho d\rho) \sigma_z + F = 0. \quad (c)$$

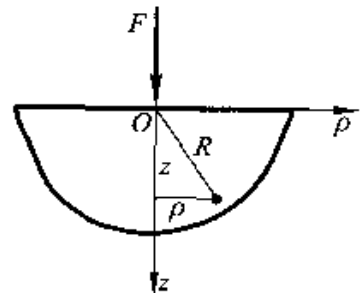


图 9-2

显然，在这一问题中，随着距离集中力的远近不同，各处的应力数值相差

很大，体应变 θ 不可能是常量。于是可见，仅仅利用位移势函数，是不可能求得正确解答的。因此，我们来利用乐甫位移函数。按照量纲分析，应力分量的表达式应为 F 乘以 ρ 、 z 、 R 等长度坐标的负二次幂，从而由(9-14)式可见， ζ 的表达式应为 F 乘以这些长度坐标的正一次幂。据此，我们假设 ζ 正比于一次幂的重调和函数 R ，取

$$\zeta = A_1 R = A_1 \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad (d)$$

其中 A_1 为任意常数。

将式(d)代入(9-13)及(9-14)，得到位移分量及应力分量的表达式如下：

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= \frac{A_1}{2G} \frac{\rho z}{R^3}, & w &= \frac{A_1}{2G} \left(\frac{3-4\mu}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right), \\ \sigma_\rho &= A_1 \left[\frac{(1-2\mu)z}{R^3} - \frac{3\rho^2 z}{R^5} \right], & \sigma_\varphi &= \frac{A_1(1-2\mu)z}{R^3}, \\ \sigma_z &= -A_1 \left[\frac{(1-2\mu)z}{R^3} + \frac{3z^3}{R^5} \right], & \tau_{\varphi\rho} &= -A_1 \left[\frac{(1-2\mu)\rho}{R^3} + \frac{3\rho z^2}{R^5} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

边界条件(a)是满足的。但是，边界条件(b)不能满足，因为(e)中的最后一式给出

$$(\tau_{\varphi\rho})_{z=0, \rho \neq 0} = -\frac{A_1(1-2\mu)}{\rho^2}, \quad (f)$$

它和 ρ^2 成反比，并不恒等于零。

为了满足边界条件，再取一个轴对称的位移势函数 $\psi(\rho, z)$ ，希望它在 $z=0$ 处给出 $\sigma_z=0$ ，而给出的 $\tau_{\varphi\rho}$ 能和式(f)所示的切应力互相抵消。通过量纲分析可以看出，这个 ψ 应当是 ρ 、 z 、 R 等长度坐标的零次幂。对于几个零次幂的调和函数进行试算以后，可见选用函数 $\ln(R+z)$ 是合适的。这样，我们取

$$\psi = A_2 \ln(R+z), \quad (g)$$

其中的 A_2 也是任意常数。代入(9-11)及(9-12)，得出相应的位移分量及应力分量如下：

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= \frac{A_2 \rho}{2GR(R+z)}, & w &= \frac{A_2}{2GR}, \\ \sigma_\rho &= A_2 \left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)} \right], & \sigma_\varphi &= \frac{A_2}{R(R+z)}, \\ \sigma_z &= -\frac{A_2 z}{R^3}, & \tau_{\varphi\rho} &= -\frac{A_2 \rho}{R^3}. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

将式(e)及式(h)相叠加, 可见叠加以后的 σ_z 仍然满足边界条件(a), 而边界条件(b)要求

$$-\frac{A_1(1-2\mu)}{\rho^2} - \frac{A_2}{\rho^2} = 0,$$

即

$$(1-2\mu)A_1 + A_2 = 0. \quad (i)$$

将叠加以后的 σ_z 代入平衡条件(c), 可见该条件要求

$$4\pi(1-\mu)A_1 + 2\pi A_2 = F_c. \quad (j)$$

由(i)及(j)二式的联立求解, 得到

$$A_1 = \frac{F}{2\pi}, \quad A_2 = -\frac{(1-2\mu)F}{2\pi}.$$

将得出的 A_1 及 A_2 分别代入式(e)及式(h), 然后进行叠加, 即得满足所有一切条件的布西内斯克解答如下:

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= \frac{(1+\mu)F}{2\pi ER} \left[\frac{\rho z}{R^2} - \frac{(1-2\mu)\rho}{R+z} \right], \\ w &= \frac{(1+\mu)F}{2\pi ER} \left[2(1-\mu) + \frac{z^2}{R^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (9-17)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{F}{2\pi R^2} \left[\frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{3\rho^2 z}{R^3} \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{(1-2\mu)F}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right), \\ \sigma_z &= -\frac{3Fz^3}{2\pi R^3}, \quad \tau_{z\rho} = \tau_{z\sigma} = -\frac{3F\rho z^2}{2\pi R^3}. \end{aligned} \right\} \quad (9-18)$$

也可以不用式(g)所示的位移势函数, 而代以如下的乐甫位移函数:

$$\zeta = A_2 [R - z \ln(R+z)].$$

把这个 ζ 代入(9-13)及(9-14), 将得出与式(h)完全相同的位移分量及应力分量, 因而也将得出(9-17)及(9-18)所示的最后解答。这样求解, 运算工作显然要多一些。

由(9-17)中的第二式可见, 水平边界上任意一点的铅直位移(即所谓沉降)是

$$(w)_{z=0} = \frac{(1-\mu^2)F}{\pi E\rho}, \quad (9-19)$$

它和距力 F 作用点的距离 ρ 成反比，后面将多次应用这个公式。

§ 9-7 半空间体在边界上受切向集中力

设有半空间体，体力不计，在其边界面上受有切向集中力 F ，图 9-3。以力 F 的作用点为坐标原点 O ，作用线为 x 轴， z 轴指向半空间体的内部。

应力边界条件要求

$$(\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{xz})_{z=0, \rho \neq 0} = 0, \quad (a)$$

和上一节中的问题相似，此外还有由应力边界条件转换而来的下列平衡条件：

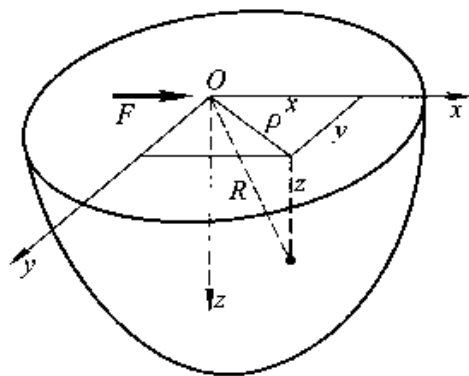


图 9-3

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xz} dx dy + F &= 0, \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y\sigma_z - z\tau_{zy}) dx dy = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy} dx dy &= 0, \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x\sigma_z - z\tau_{zx}) dx dy = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x dx dy &= 0, \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y\tau_{xz} - x\tau_{xy}) dx dy = 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

其中左边三式依次表示 $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$ ，而右边三式依次表示 $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$, $\sum M_z = 0$ 。

取如下的一次幂重调和函数为伽辽金位移函数：

$$\xi = A_1 R, \quad \eta = 0, \quad \zeta = A_2 x \ln(R+z), \quad (c)$$

此外，再取如下的零次幂调和函数为位移势函数：

$$\psi = \frac{A_3 x}{R+z}, \quad (d)$$

将式(c)代入(9-15)及(9-16)，将式(d)代入(9-8)及(9-9)，然后分别将各个位移分量和应力分量进行叠加，代入边界条件(a)及平衡条件(b)，可见这些条件要求

$$A_1 = \frac{F}{4\pi(1-\mu)}, \quad A_2 = \frac{(1-2\mu)F}{4\pi(1-\mu)}, \quad A_3 = \frac{(1-2\mu)F}{2\pi} \quad (e)$$

这样就得出满足所有一切条件的塞路蒂解答如下：

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{(1+\mu)F}{2\pi ER} \left\{ 1 + \frac{x^2}{R^2} + (1-2\mu) \left[\frac{R}{R+z} - \frac{x^2}{(R+z)^2} \right] \right\}, \\
 v &= \frac{(1+\mu)F}{2\pi ER} \left[\frac{xy}{R^2} - \frac{(1-2\mu)xy}{(R+z)^2} \right], \\
 w &= \frac{(1+\mu)F}{2\pi ER} \left[\frac{xz}{R^2} + \frac{(1-2\mu)x}{R+z} \right], \\
 \sigma_x &= \frac{Fx}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(R^2 - y^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) - \frac{3x^2}{R^2} \right], \\
 \sigma_y &= \frac{Fx}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(3R^2 - x^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) - \frac{3y^2}{R^2} \right], \\
 \sigma_z &= -\frac{3Fxz^2}{2\pi R^5}, \\
 \tau_{xz} &= -\frac{3Fxyz}{2\pi R^5}, \\
 \tau_{xy} &= -\frac{3Fx^2z}{2\pi R^5}, \\
 \tau_{yz} &= \frac{Fy}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(-R^2 + x^2 + \frac{2Rx^2}{R+z} \right) - \frac{3x^2}{R^2} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{Fx}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(R^2 - y^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) - \frac{3x^2}{R^2} \right], \\
 \sigma_y &= \frac{Fx}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(3R^2 - x^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) - \frac{3y^2}{R^2} \right], \\
 \sigma_z &= -\frac{3Fxz^2}{2\pi R^5}, \\
 \tau_{xz} &= -\frac{3Fxyz}{2\pi R^5}, \\
 \tau_{xy} &= -\frac{3Fx^2z}{2\pi R^5}, \\
 \tau_{yz} &= \frac{Fy}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(-R^2 + x^2 + \frac{2Rx^2}{R+z} \right) - \frac{3x^2}{R^2} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

也可以不引用式(d)所示的位移势函数, 而代之以如下的伽辽金位移函数:

$$\xi = A_1 [R - z \ln(R+z)].$$

这样也将得出与上相同的最后解答, 但运算工作比较多一些。

本节及前一节中解出的问题, 即半空间体在边界上受集中力的问题, 其应力分布都具有如下的特征:

(1) 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 各应力分量都趋于零; 当 $R \rightarrow 0$ 时, 各应力分量都趋于无限大。这就是说, 在离开集中力作用点非常远处, 应力非常小; 在靠近集中力作用点处, 应力非常大。

(2) 水平截面上的应力 ($\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$) 都与弹性常数无关, 因而在任何材料的弹性体中都是同样地分布。其他截面上的应力, 一般都随泊松比而变。

(3) 水平截面上的全应力, 都是指向集中力的作用点, 因为由(9-18)可见 $\sigma_x: \tau_{xy} = z:y$; 由式(g)可见, $\sigma_x: \tau_{xz}: \tau_{yz} = z:x:y$ 。

明德林曾利用伽辽金位移函数得出半空间体在其内部受集中力时的解答, 见参考材料[3]。

§ 9 - 8 半空间体在边界上受法向分布力

根据 § 9 - 6 中关于半空间体在边界上受法向集中力时的解答，可以用叠加法求得由法向分布力引起的位移和应力。

现在，试以均布法向载荷 q 作用在半径为 a 的圆面积上的情形为例，图 9 - 4，求出半空间体边界上距圆心为 r 的一点 M 的沉陷。在荷载范围内取微分面积 $dA = s d\psi ds$ ，如阴影线所示，则由公式 (9 - 19) 得 M 点的沉陷为

$$\frac{(1 - \mu^2) q dA}{\pi E s} = \frac{(1 - \mu^2) q s d\psi ds}{\pi E s} = \frac{(1 - \mu^2) q}{\pi E} d\psi ds,$$

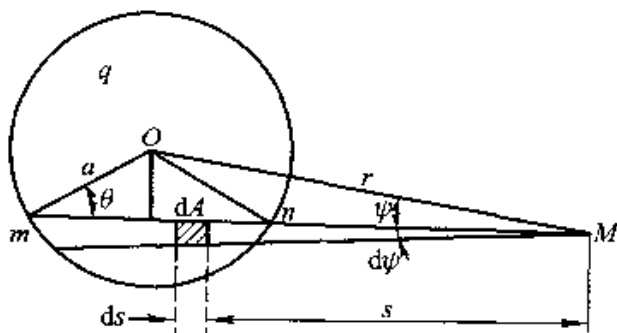


图 9 - 4

因而 M 点的总沉陷为

$$w = \frac{(1 - \mu^2) q}{\pi E} \iint ds d\psi.$$

对 s 进行积分，注意弦 mn 的长度为 $2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}$ ，并在对 ψ 进行积分时考虑对称性，得到

$$w = 2 \frac{(1 - \mu^2) q}{\pi E} \int_0^{\psi_1} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad (a)$$

其中 ψ_1 是 ψ 的最大值，即圆的切线与 OM 之间的夹角。引用变数 θ 以代替变数 ψ ，可以简化积分式 (a) 的运算。由图可见 $a \sin \theta = r \sin \psi$ ，于是得出

$$d\psi = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \cos \psi} = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}}$$

代入式 (a)，并注意当 ψ 由 0 改变到 ψ_1 时， θ 由 0 改变到 $\frac{\pi}{2}$ ，即得

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{4(1-\mu^2)q}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^2 \theta d\theta}{r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}} \\
 &= \frac{4(1-\mu^2)qr}{\pi E} \times \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta} d\theta - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}} \right]
 \end{aligned} \tag{9-20}$$

这一方程右边的积分是所谓椭圆积分，它们的数值可按照 a/r 的数值由函数表中查得。当 M 点位于荷载圆的边界上时， $r=a$ ，上式简化为

$$w = \frac{4(1-\mu^2)qa}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{4(1-\mu^2)qa}{\pi E} \tag{9-21}$$

如果 M 点是在荷载面积之内，图 9-5，仍然取微分面积 $dA = s d\psi ds$ ，如阴影线所示，则 M 点的沉陷仍为

$$w = \frac{(1-\mu^2)q}{\pi E} \iint d\psi ds$$

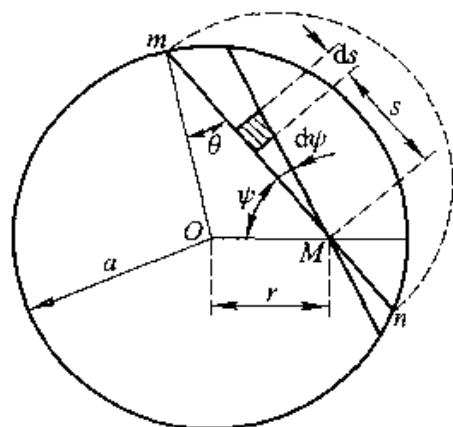


图 9-5

但弦 mn 的长度为 $2a \cos \theta$ ，而 ψ 系由 0 改变到 $\pi/2$ ，所以有

$$w = \frac{4(1-\mu^2)q}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta d\psi$$

利用关系式 $a \sin \theta = r \sin \psi$ ，则上式可变换为

$$w = \frac{4(1-\mu^2)qa}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \psi} d\psi \tag{9-22}$$

对于 r/a 的任何数值，都可由函数表查得上式中椭圆积分的数值，从而求得沉陷 w 。最大沉陷将发生在圆心。将 $r=0$ 代入上式，可得

$$w_{\max} = \frac{2(1-\mu^2)qa}{E} \tag{9-23}$$

将(9-23)式与(9-21)式对比，可见最大沉陷是荷载圆的边界沉陷的 $\pi/2$ 倍。由(9-23)式可见，对于一定的荷载集度 q ，最大沉陷是与荷载圆的半径成正比。

应力也可以用叠加法求得。例如，为了求得 z 轴上任意一点处的应力分量 σ_z ，图 9-6，可以把荷载面积分为微分圆环，用圆环上的荷载 $2\pi r dr q$ 代替(9-18)中第三式里面的 F ，对 r 进行积分。这样就得到

$$\sigma_z = -\frac{3z^3}{2\pi} \int_0^a \frac{2\pi r dr q}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = -q \left[1 - \frac{z^3}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (b)$$

为了求得该点处的应力分量 σ_ρ 及 σ_φ , 图 9-6, 将荷载面积分为微分面积, 如 1、2、3、4 等。由于微分面积 1 及 2 上的两个荷载 $qrd\varphi dr$, 按照(9-18)中的第一式及第二式, 得

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_\rho' &= 2 \frac{qrd\varphi dr}{2\pi R^2} \left[\frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{3r^2z}{R^3} \right], \\ d\sigma_\varphi' &= 2 \frac{(1-2\mu)qrd\varphi dr}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

同样, 由于微分面积 3 及 4 上的两个荷载 $qrd\varphi dr$, 得

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_\rho'' &= 2 \frac{(1-2\mu)qrd\varphi dr}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right), \\ d\sigma_\varphi'' &= 2 \frac{qrd\varphi dr}{2\pi R^2} \left[\frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{3r^2z}{R^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

将式(c)及式(d)相叠加, 即得微分面积 1、2、3、4 上的荷载引起的应力分量

$$d\sigma_\rho = d\sigma_\varphi = \frac{qrd\varphi dr}{\pi} \left[(1-2\mu) \frac{z}{R^3} - \frac{3r^2z}{R^3} \right] \quad (e)$$

为了求得全部荷载在该点处引起的应力分量, 只须将式(e)对 φ 积分, 从 0 到 $\pi/2$, 然后对 r 积分, 从 0 到 a , 即

$$\sigma_\rho = \sigma_\varphi = \frac{q}{2} \int_0^a \left[\frac{(1-2\mu)z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3r^2z}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right] r dr.$$

进行积分以后, 得到

$$\sigma_\rho = \sigma_\varphi = -\frac{q}{2} \left[(1+2\mu) + \frac{z^3}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2(1+\mu)z}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (f)$$

该点的最大切应力发生在与 z 轴成 45° 的平面上, 由式(f)及式(b)求得为

$$\frac{1}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_z) = \frac{q}{2} \left[\frac{1-2\mu}{2} + \frac{(1+\mu)z}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{z^3}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (g)$$

在

$$z = a \sqrt{\frac{2(1+\mu)}{7-2\mu}}$$

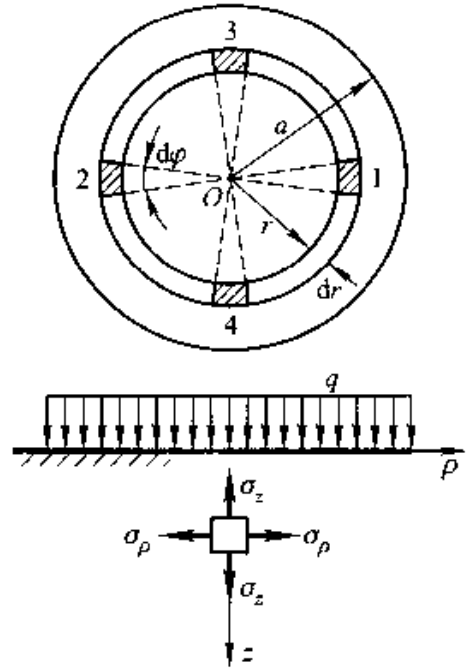


图 9-6

处, 最大切应力的数值最大, 它等于

$$\tau_{\max} = \frac{q}{2} \left[\frac{1-2\mu}{2} + \frac{2}{9}(1+\mu) \sqrt{2(1+\mu)} \right]. \quad (\text{h})$$

当 $\mu = 0.3$ 时, 在 $z = 0.637a$ 处, $\tau_{\max} = 0.333q$.

§ 9-9 两球体之间的接触压力

上一节中得出的成果, 可以用来分析两个弹性体之间的接触压力, 以及接触压力所引起的应力和形变. 这里只将分析这样的简单情况: 两个弹性体都是圆球体, 其半径分别为 R_1 及 R_2 , 图 9-7. 当没有压力作用时, 两球体仅在一一点 O 接触. 设两球体表面上距公共法线为 r 的 M_1 点及 M_2 点, 它们距公共切面的距离分别为 z_1 及 z_2 , 则由几何关系有

$$(R_1 - z_1)^2 + r^2 = R_1^2,$$

$$(R_2 - z_2)^2 + r^2 = R_2^2.$$

由此可以得出

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1 - z_1}, \quad z_2 = \frac{r^2}{2R_2 - z_2}.$$

如果 M_1 及 M_2 离接触点 O 很近, 则 z_1 远小于 $2R_1$, z_2 远小于 $2R_2$, 可以认为

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{r^2}{2R_2}, \quad (\text{a})$$

而 M_1 与 M_2 之间的距离为

$$z_1 + z_2 = r^2 \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} r^2. \quad (\text{b})$$

当两球体以某一力 F 相压时, 在接触点附近将发生局部形变而出现一个边界为圆形的接触面. 由于接触面的边界半径总是远小于 R_1 及 R_2 , 故可用上一节中关于半空间体的成果来分析此种局部形变. 命 M_1 沿 z_1 方向的位移及 M_2 沿 z_2 方向的位移分别为 w_1 及 w_2 , 并命 z_1 轴上及 z_2 轴上“距 O 较远处”的两点相互趋近的距离为 α , 则 M_1 与 M_2 之间距离的缩短为 $\alpha - (w_1 + w_2)$. 这里所谓“距 O 较远处”, 是指该处的形变已经可以略去不计. 假定在发生局部形变以后, M_1 及 M_2 成为接触面上的同一点 M , 则由几何关系有

$$\alpha - (w_1 + w_2) = z_1 + z_2. \quad (\text{c})$$

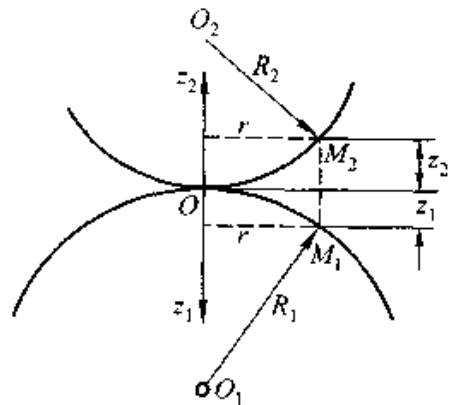


图 9-7

于是可见

$$w_1 + w_2 = \alpha - (z_1 + z_2),$$

并通过式(b)得出

$$w_1 + w_2 = \alpha - \beta r^2, \quad (d)$$

其中

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}. \quad (e)$$

如果用图 9-5 中的圆表示接触面, 而 M 点表示下面的球体在接触面上的一点(即未变形以前的 M_1), 则按照上一节中所述, 该点的位移为

$$w_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} \iint q ds d\psi, \quad (f)$$

其中 μ_1 及 E_1 为下面球体的弹性常数, 而积分应包括整个接触面。对于上面的球体, 也可以写出相似的表达式。于是得到

$$w_1 + w_2 = (k_1 + k_2) \iint q ds d\psi, \quad (g)$$

其中

$$k_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2}, \quad (9-24)$$

并由式(g)及式(d)得到

$$(k_1 + k_2) \iint q ds d\psi = \alpha - \beta r^2. \quad (h)$$

现在要找出压力 q 的分布规律, 使式(h)可以满足。

赫兹指出, 如果在接触面的边界上作半圆球面, 而用它在各点的高度代表压力 q 在各该点处的大小, 则式(h)可以满足, 证明如下。命 q_0 为半圆球面在 O 点处的高度, 亦即 q 的最大值, 则表示压力大小的比例尺的因子为 q_0/a 。沿着通过 M 点的弦 mn , 图 9-5, 压力的变化如虚线半圆所示。因此, 沿着弦 mn 的积分值为

$$\int q ds = \frac{q_0}{a} A,$$

其中 A 为该半圆的面积, 即 $\frac{\pi}{2}(a^2 - r^2 \sin^2 \psi)$ 。代入式(h), 得

$$(k_1 + k_2) 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q_0}{a} \frac{\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) d\psi = \alpha - \beta r^2,$$

积分以后得

$$(k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4a} (2a^2 - r^2) = \alpha - \beta r^2.$$

为了这一条件在 r 为任何值时都能满足，可以取两边的常数项相等， r^2 的系数也相等，即

$$(k_1 + k_2) \frac{\pi^2 a q_0}{2} = \alpha, \quad (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4a} = \beta. \quad (i)$$

这样，式(h)也就可以满足。

为了得到最大压力 q_0 ，只须命上述半圆球的体积等于总的压力 F ，即

$$\frac{q_0}{a} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 = F$$

由此得最大压力

$$q_0 = \frac{3F}{2\pi a^2}. \quad (9-25)$$

它等于平均压力 $F/\pi a^2$ 的一倍半。

将式(c)及(9-25)代入(i)中的两式，求解 a 及 α ，即得

$$\left. \begin{aligned} a &= \left[\frac{3\pi F (k_1 + k_2) R_1 R_2}{4(R_1 + R_2)} \right]^{\frac{1}{3}}, \\ \alpha &= \left[\frac{9\pi^2 F^2 (k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{16R_1 R_2} \right]^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-26)$$

由此并可求得最大接触压力为

$$q_0 = \frac{3F}{2\pi a^2} = \frac{3F}{2\pi} \left[\frac{4(R_1 + R_2)}{3\pi F (k_1 + k_2) R_1 R_2} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (9-27)$$

在 $E_1 = E_2 = E$ 及 $\mu_1 = \mu_2 = 0.3$ 时，由上列各式得出工程实践中广泛采用的公式：

$$\left. \begin{aligned} a &= 1.11 \left[\frac{FR_1 R_2}{E(R_1 + R_2)} \right]^{\frac{1}{3}}, \\ \alpha &= 1.23 \left[\frac{F^2 (R_1 + R_2)}{E^2 R_1 R_2} \right]^{\frac{1}{3}}, \\ q_0 &= 0.388 \left[\frac{FE^2 (R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2} \right]^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-28)$$

确定了接触面积及接触压力，即可利用上一节中导出的公式求得球体中的应力。最大压应力发生在接触面的中心，其值为 q_0 ；最大切应力发生在公共法线上距接触中心约为 $0.47a$ 处，其值约为 $0.31q_0$ 。最大拉应力发生在接触面的边界上，其值约为 $0.133q_0$ 。

对于球体放置在平面上的情况，图 9-8a，只须在以上的公式中命 $R_1 \rightarrow$

∞ ：对于球体放置在球座内的情况，图 9-8b，只须在以上的公式中取 R_1 为负值 ($R_1 + R_2$ 自然也成为负值)。

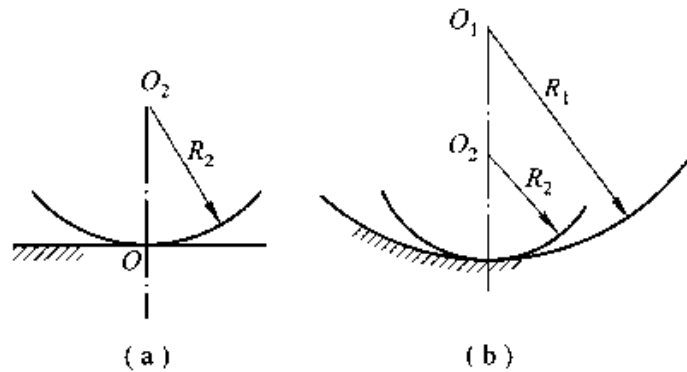


图 9-8

§ 9-10 按应力求解空间问题

按应力求解问题，是取应力分量为基本未知函数。对空间问题说来，这就从 15 个基本方程中消去位移分量和形变分量，得出只包含 6 个应力分量的方程。因为平衡微分方程中本来就不包含位移分量和形变分量，所以只须从几何方程和物理方程中消去这些分量。

首先从几何方程中消去位移分量。为此，将 (8-9) 中第二式左边对 z 的二阶导数与第三式左边对 y 的二阶导数相加，得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (a)$$

由 (8-9) 中的第四式可见，式 (a) 右边括弧内的表达式就是 γ_{yz} ，于是从方程 (a) 及其余两个相似的方程得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9-29)$$

这是表明形变协调条件的一组方程，也就是一组所谓相容方程

将 (8-9) 中的后三式分别对 x 、 y 、 z 求导，得

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},$$

并由此而得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (b)$$

由(8-9)中的第一式可见,式(b)右边括弧内的表达式就是 ϵ_x , 于是从方程(b)和其余两个相似的方程得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (9-30)$$

这是又一组相容方程。

通过与上述相似的微分步骤,可以导出无数多的相容方程,都是形变分量所应当满足的。但是,可以证明,如果6个形变分量满足了(9-29)和(9-30),就可以保证位移分量的存在,也就可以用几何方程(8-9)求得位移分量(当然,对于多连体说来,求得的位移分量可能是多值的,为了得出确定的位移分量,可能还须考虑位移单值条件)。

将物理方程(8-17)代入(9-29)及(9-30),整理以后,得出用应力分量表示的相容方程如下:

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) &= 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ (1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) &= 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ (1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) &= 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} [(1+\mu)\sigma_x - \mu\Theta], \\ (1+\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} [(1+\mu)\sigma_y - \mu\Theta], \\ (1+\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(1+\mu)\sigma_z - \mu\Theta], \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

利用平衡微分方程(8-1), 可以简化上列各式, 使每一式中只包含体积应力和一个应力分量。当然, 体力分量将在所有各式中出现。这样就得出如下的米歇尔相容方程:

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[(2-\mu) \frac{\partial f_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_z}{\partial z} \right], \\ (1+\mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[(2-\mu) \frac{\partial f_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_z}{\partial z} \right], \\ (1+\mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[(2-\mu) \frac{\partial f_z}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_y}{\partial y} \right], \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= -(1+\mu) \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial z} \right), \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= -(1+\mu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial x} \right), \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{yx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= -(1+\mu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9-31)$$

在体力为零或为常量的情况下, 相容方程(9-31)简化为如下的贝尔特拉米相容方程:

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0, \\ (1+\mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 0, \\ (1+\mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0, \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= 0, \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= 0, \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{yx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9-32)$$

按应力求解空间问题时，须要使 6 个应力分量满足平衡微分方程(8-1)，满足相容方程(9-31)或者(9-32)，并在边界上满足应力边界条件(8-5)。此外，有时还须考虑位移单值条件。

如果应力分量的表达式是坐标 x 、 y 、 z 的线性函数，则相容方程(9-32)总能满足。因此，对于一个单连体的应力边界问题，如果体力为零或为常量，则满足平衡微分方程和边界条件的线性函数形式的应力分量表达式将给出完全精确的应力。

由于位移边界条件一般都无法用应力分量及其导数来表示，因此，位移边界问题和混合边界问题一般都不能按应力求解。

§ 9-11 等截面直杆的纯弯曲

设有等截面直杆，体力可以不计，在某一纵向主平面内受有大小相等而方向相反的弯矩 M ，图 9-9。取左端截面的形心为坐标原点，弯矩所在的主平面为 xy 面，杆的形心轴为 x 轴。按照材料力学，应力分量的解答是

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0. \quad (9-33)$$

其中 I 是横截面对于 z 轴的惯矩。现在来考察，这个解答是否能满足弹性力学中的一切条件。

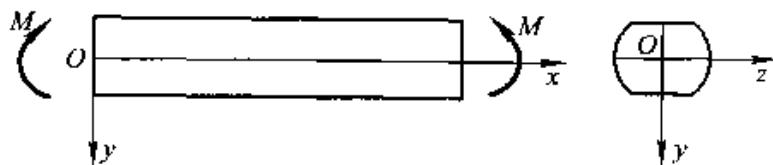


图 9-9

注意 M 和 I 是常量，而且体力 $f_x = f_y = f_z = 0$ ，可见平衡微分方程(8-1)是满足的，相容方程(9-32)也是满足的。

在杆的侧面上， $l=0$ ，面力 $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = \bar{f}_3 = 0$ ，所以边界条件(8-5)是满足的。

在杆的右端， $l=1$ ， $m=n=0$ ，边界条件(8-5)成为

$$\bar{f}_1 = \sigma_x, \quad \bar{f}_2 = \bar{f}_3 = 0.$$

因为面力 \bar{f}_1 必须合成为弯矩 M ，所以要求

$$\int \bar{f}_1 dA = \int \sigma_x dA = 0, \quad (a)$$

$$\int (\bar{f}_1 dA) z = \int \sigma_x z dA = 0, \quad (b)$$

$$\int (\bar{f}_x dA) y = \int \sigma_x y dA = M_0 \quad (c)$$

将(9-33)式代入式(a), 得

$$\frac{M}{I} \int y dA = 0_0$$

因为 z 轴是形心轴, 我们有 $\int y dA = 0$, 可见这一条件是满足的。将(9-33)式代入式(b), 得

$$\frac{M}{I} \int yz dA = 0_0$$

因为 xy 面和 xz 面是主平面, 我们有 $\int yz dA = 0$, 可见这一条件也是满足的。将(9-33)式代入式(c), 得

$$\frac{M}{I} \int y^2 dA = M_0$$

因为 $I = \int y^2 dA$, 可见这一条件也是满足的。同样, 在杆的左端, 边界条件也是满足的。

于是可见, 应力分量(9-33)能满足所有一切条件, 因而是正确的解答。但是, 必须指出, 如果杆端的面力虽然合成为弯矩 M , 而分布方式却与(9-33)式中的 σ_x 不相同, 那么, 对于靠近杆端的部分, 表达式(9-33)将有显著的误差。

现在来求出位移分量。将(9-33)式代入物理方程(8-17), 得形变分量

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{M}{EI} y, & \varepsilon_y &= -\frac{\mu M}{EI} y, & \varepsilon_z &= -\frac{\mu M}{EI} y, \\ \gamma_{yz} &= 0, & \gamma_{zx} &= 0, & \gamma_{xy} &= 0_0 \end{aligned}$$

再将这些表达式代入几何方程(8-9), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{M}{EI} y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\mu M}{EI} y, & \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\mu M}{EI} y, \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

进行与 § 8-5 中相同的运算, 即得位移分量

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M}{EI} xy + \omega_z z - \omega_x y + u_0, \\ v &= -\frac{M}{2EI} (x^2 + \mu y^2 - \mu z^2) + \omega_z x - \omega_x z + v_0, \\ w &= -\frac{\mu M}{EI} yz + \omega_x y - \omega_z x + w_0, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

其中的积分常数 u_0 、 v_0 、 w_0 及 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 决定于约束条件，即支承情况

不论约束条件如何，如果在变形之前取任一横截面 $x = a$ ，则按照(e)中的第一式，在变形之后，该截面上各点沿 x 方向的位移为

$$u = \frac{Ma}{EI}y + \omega_x z - \omega_z y + u_0,$$

由此可见， $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 都是常量。这就表示，在变形之后，该截面内沿 y 方向各线段具有相同的斜率，沿 z 方向各线段也具有相同的斜率。这也就表示，该截面保持为平面。

又由(e)中的第二式可见，不论约束条件如何，在变形以后，杆的纵向纤维将具有曲率

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} \quad (f)$$

这是材料力学中求位移时所用的基本公式。同时，横截面上的水平直线将具有曲率

$$\frac{1}{\rho_z} = -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\mu M}{EI} \quad (g)$$

式(f)及式(g)所示的两个曲率，它们的方向相反而比值为 $1:\mu$ 。

现在，假定左端截面的形心 O 不移动，经过 O 点的、 x 方向的线段不转动，经过 O 点的、沿 y 方向的线段在 yz 面内也不转动。这样，约束条件将为

$$(u)_{x=y=z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=y=z=0} = 0,$$

$$(v)_{x=y=z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=y=z=0} = 0,$$

$$(w)_{x=y=z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x=y=z=0} = 0.$$

取 $u_0 = v_0 = w_0 = \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ，这些条件就可以满足。于是得位移分量为

$$u = \frac{M}{EI}xy, \quad v = -\frac{M}{2EI}(x^2 + \mu y^2 - \mu z^2), \quad w = -\frac{\mu M}{EI}yz.$$

在 v 的表达式中取 $y = z = 0$ ，即得杆轴的挠度

$$(v)_{y=z=0} = -\frac{M}{2EI}x^2, \quad (h)$$

与材料力学中所得的结果相同。

习 题

9-1 内半径为 a 、外半径为 b 的空心圆球，外面被固定而在内面受均布压力 q 。试求最大的径向位移和最大的切向拉应力。

答案：
$$\frac{(1-2\mu)(1+\mu)qa\left(\frac{b^3}{a^3}-1\right)}{E\left[2(1-2\mu)\frac{b^3}{a^3}+(1+\mu)\right]}, \quad \frac{(1-2\mu)\frac{b^3}{a^3}-(1+\mu)}{2(1-2\mu)\frac{b^3}{a^3}+(1+\mu)}q.$$

9-2 半空间体在边界平面的一个圆面积上受均布压力 q 。设圆面积的半径为 a ，试求圆心下方距边界为 h 处的位移

答案：
$$\frac{(1-\mu)q}{E}\left[\frac{2(1-\mu)a^2+(1-2\mu)h^2}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}- (1-2\mu)h\right].$$

9-3 半空间体在边界平面的一个矩形面积上受均布压力 q 。设矩形面积的边长为 a 及 b ，试求矩形中心及四角处的沉陷。

答案：
$$\frac{2(1-\mu^2)q}{\pi E}\left(\text{barsh} \frac{a}{b} + a\text{arsh} \frac{b}{a}\right), \quad \frac{(1-\mu^2)q}{\pi E}\left(\text{barsh} \frac{a}{b} + a\text{arsh} \frac{b}{a}\right).$$

9-4 试用位移势函数 $\psi = A_1 \ln \rho + A_2 \rho^2$ 导出解答(4-13) (在轴对称位移的条件下)。

9-5 设有无限大弹性体(空间体)，在体内的小洞中受集中荷载 F ，图 9-10，试用乐甫位移函数 $\zeta = A_1 R$ 求解应力分量。

答案：
$$\sigma_z = -\frac{F}{8\pi(1-\mu)}\left[\frac{(1-2\mu)z}{R^3} + \frac{3z^3}{R^5}\right].$$

9-6 设有任意形状的弹性体，在全部边界上(包括在孔洞上)受有均匀压力 q ，试证

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = -q, \quad \tau_{rz} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$$

能满足一切条件，因而就是正确解答。

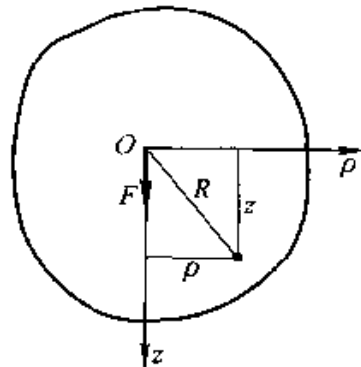


图 9-10

参 考 教 材

- [1] 钱伟长，叶开沅编. 弹性力学[M]. 北京：科学出版社，1956；第十章.
- [2] 铁木辛柯，古迪尔著. 弹性理论[M]. 徐芝纶译. 北京：高等教育出版社，1990；第九章及第十二章.
- [3] H. M. Westergaard 著. Theory of Elasticity and Plasticity[M]. New York: Harvard University Press, 1952; Chapter VI.

第十章 等截面直杆的扭转

§ 10-1 扭转问题中的应力和位移

设有等截面直杆，体力可以不计，在两端平面内受有大小相等而转向相反的扭矩 M ，图 10-1a。取杆的一端平面为 xy 面， z 轴沿着杆的纵向。

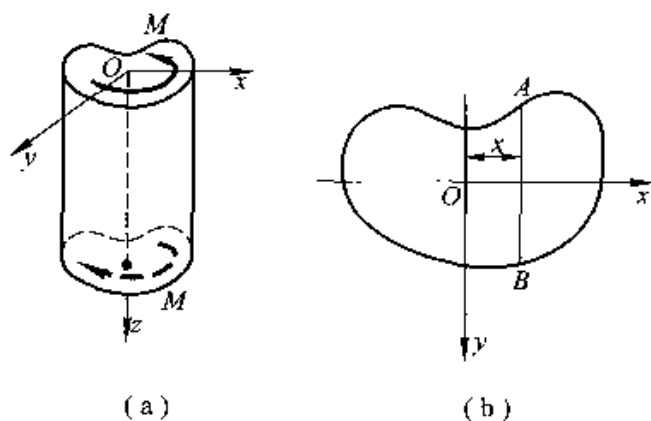


图 10-1

用半逆解法。参照材料力学中对于圆截面杆的解答，这里也假设：除了横截面上的切应力 τ_{xz} 和 τ_{yx} （即扭应力）以外，其余的应力分量都等于零，即

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (10-1)$$

代入平衡微分方程(8-1)，注意在这里有 $f_x = f_y = f_z = 0$ ，即得

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (a)$$

由前两个方程可见， τ_{xz} 和 τ_{yx} 应当只是 x 和 y 的函数，不随 z 变化。第三个方程可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} = \frac{\partial}{\partial y} (-\tau_{yx})$$

根据微分方程理论，一定存在一个函数 $\Phi(x, y)$ ，使得

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad -\tau_{yx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

于是可以将应力分量用函数 Φ 表示成为

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (10-2)$$

这里的函数 $\Phi(x, y)$ 称为扭转问题的应力函数，是普朗特提出的。

将(10-1)及(10-2)代入相容方程(9-32)，可见其中的前三式及最后一式总能满足，而其余二式要求

$$\nabla^2 \tau_{yz} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{zx} = 0,$$

将(10-2)代入，得

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Phi = 0,$$

这就是说， $\nabla^2 \Phi$ 应当是常量，即

$$\nabla^2 \Phi = C, \quad (10-3)$$

现在来考虑边界条件。在杆的侧面上，有 $n = 0$ 及 $\bar{f}_x = \bar{f}_y = \bar{f}_z = 0$ ，可见应力边界条件(8-5)中的前二式总能满足，而第三式要求

$$l(\tau_{yz})_s + m(\tau_{zx})_s = 0。$$

将表达式(10-2)代入，得

$$l\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_s - m\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_s = 0。$$

因为在边界上有

$$l = \frac{dy}{ds}, \quad m = -\frac{dx}{ds},$$

所以边界条件要求

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_s \frac{dy}{ds} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_s \frac{dx}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 0。$$

这就是说，在杆的侧面上(在横截面的边界曲线上)，应力函数 Φ 的边界值应当是常量。

由式(10-2)可见，当应力函数 Φ 增加或减少一个常数时，应力分量并不受影响。因此，在单连截面的情况下，即实心杆的情况下，为了简便，应力函数 Φ 的边界值可以取为零：

$$\Phi_s = 0, \quad (10-4)$$

在多连截面的情况下，虽然应力函数 Φ 在每一边界上都是常数，但各个常数一般并不相同。因此，只能把其中某一个边界上的 Φ_s 取为零。其他边界上的 Φ_s ，则须根据位移单值条件来确定。

在杆的任一端，例如上端， $l = m = 0$ 而 $n = -1$ ，应力边界条件(8-5)中的第三式总能满足，而前二式成为

$$-\tau_{zx} = \bar{f}_x, \quad -\tau_{yz} = \bar{f}_y, \quad (b)$$

因为面力 \bar{f}_x 及 \bar{f}_y 必须合成为力偶，而力偶的矩就等于扭矩 M ，所以要求

$$\iint \bar{f}_1 dx dy = 0, \quad (c)$$

$$\iint \bar{f}_2 dx dy = 0, \quad (d)$$

$$\iint (y \bar{f}_2 - x \bar{f}_1) dx dy = M_0. \quad (e)$$

根据(b)中的第一式及(10-2), 式(c)左边的积分式可以写成

$$\begin{aligned} \iint \bar{f}_1 dx dy &= - \iint \tau_{xz} dx dy = - \iint \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy \\ &= - \int dx \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = - \int (\Phi_B - \Phi_A) dx, \end{aligned}$$

其中 Φ_B 及 Φ_A 是横截面边界上 B 点及 A 点的 Φ 值, 图 10-1b, 应当等于零, 可见式(c)是满足的。同样可见式(d)也是满足的。

根据式(b)及(10-2), 式(e)左边的积分式可以写成

$$\begin{aligned} \iint (y \bar{f}_2 - x \bar{f}_1) dx dy &= - \iint (y \tau_{xz} - x \tau_{yz}) dx dy \\ &= - \iint \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx dy \\ &= - \int dx \int y \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy - \int dy \int x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

进行分部积分, 注意 $\Phi_A = \Phi_B = 0$, 可见

$$- \int dx \int y \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = - \int dx \left[(y_B \Phi_B - y_A \Phi_A) - \int \Phi dy \right] = \iint \Phi dx dy.$$

同样可见

$$- \int dy \int x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = \iint \Phi dx dy.$$

于是式(e)成为

$$2 \iint \Phi dx dy = M_0. \quad (10-5)$$

总结起来, 为了求得扭应力, 只须求出应力函数 Φ , 使它能满足方程(10-3)至(10-5), 然后由(10-2)式求应力分量。

现在来导出有关位移的公式。将应力分量的表达式(10-1)及(10-2)代入物理方程(8-17), 得

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{xz} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = 0.$$

再将这些表达式代入几何方程(8-9), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

通过积分运算, 可求得位移分量

$$u = u_0 + \omega_1 z - \omega_2 y - Kyz, \quad v = v_0 + \omega_3 x - \omega_4 z + Kxz,$$

其中的积分常数 u_0 、 v_0 、 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 和以前一样地代表刚体位移, K 也是积分常数。如果不计刚体位移, 只保留与形变有关的位移, 则

$$u = -Kyz, \quad v = Kxz, \quad (10-6)$$

用圆柱坐标表示, 就是

$$u_\rho = 0, \quad u_\varphi = K\rho z.$$

可见, 每个横截面在 xy 面上的投影不改变形状, 而只是转动一个角度 $\alpha = Kz$ 。

由此又可见, 杆的单位长度内的扭角是 $\frac{d\alpha}{dz} = K$ 。

将(10-6)代入(f)中第五式及第四式, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + Ky, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - Kx, \quad (10-7)$$

可以用来求出位移分量 u 。将上列二式分别对 y 及 x 求导, 然后相减, 即得

$$\nabla^2 \Phi = -2GK. \quad (10-8)$$

由此可见, 方程(10-3)中常数 C 应为

$$C = -2GK. \quad (10-9)$$

§ 10-2 扭转问题的薄膜比拟

普朗特指出: 薄膜在均匀压力下的垂度, 与等截面直杆扭转问题中的应力函数, 在数学上是相似的。用薄膜来比拟扭杆, 可以有助于求得扭转问题的解答, 说明如下。

设有一块均匀薄膜, 张在一个水平边界上, 图 10-2, 这水平边界与某一扭杆的横截面边界具有同样的形状和大小。当薄膜承受微小的均匀压力时, 薄膜的各点将发生微小的垂度。以边界所在的水平面为 xy 面, 则垂度为 z 。由于薄膜的柔顺性, 可以假定它不承受弯矩、扭矩、剪力和压力, 而只承受均匀的拉力 F_T (好像液膜的表面张力)。

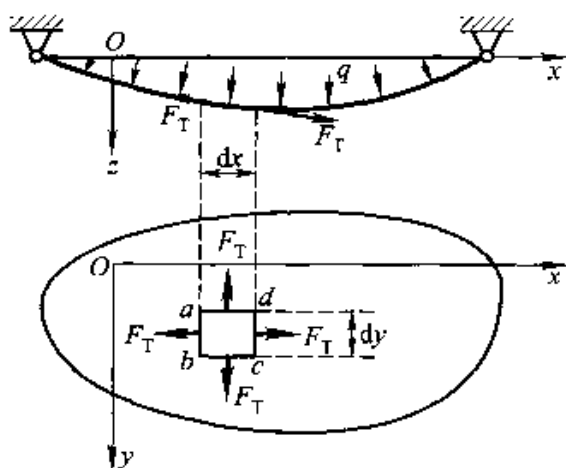


图 10-2

取薄膜的一个微小部分 $abcd$, 图 10-2, 它在 xy 面上的投影是一个矩形, 而矩形的边长是 dx 及 dy . 在 ab 边上的拉力是 $F_T dy$ (F_T 是薄膜每单位宽度上的拉力), 它在 z 轴上的投影是 $-F_T dy \frac{\partial z}{\partial x}$; 在 cd 边上的拉力也是 $F_T dy$, 但它在 z 轴上的投影是 $F_T dy \frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{\partial z}{\partial x} dx \right)$. 在 ad 边上的拉力是 $F_T dx$, 它在 z 轴上的投影是 $-F_T dx \frac{\partial z}{\partial y}$; 在 bc 边上的拉力也是 $F_T dx$, 但它在 z 轴上的投影是 $F_T dx \frac{\partial}{\partial y} \left(z + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)$. 注意 $abcd$ 部分所受的总压力在 z 轴上的投影是 $q dx dy$, 可由平衡条件 $\sum F_z = 0$ 得

$$-F_T dy \frac{\partial z}{\partial x} + F_T dy \frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{\partial z}{\partial x} dx \right) - F_T dx \frac{\partial z}{\partial y} + F_T dx \frac{\partial}{\partial y} \left(z + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) + q dx dy = 0.$$

简化以后, 除以 $dx dy$, 得

$$F_T \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + q = 0,$$

即

$$\nabla^2 z = -\frac{q}{F_T} \quad (10-10)$$

此外, 薄膜在边界上的垂度显然等于零, 即

$$z_s = 0, \quad (10-11)$$

因为 q/F_T 是常量, 所以微分方程(10-10)和边界条件(10-11)可以改写成为

$$\nabla^2 \left(\frac{F_T}{q} z \right) + 1 = 0, \quad \left(\frac{F_T}{q} z \right)_s = 0, \quad (a)$$

另一方面，因为扭转问题中的 GK 也是常量，所以应力函数 Φ 的微分方程 (10-8) 和边界条件 (10-4) 也可以改写成为

$$\nabla^2 \left(\frac{\Phi}{2GK} \right) + 1 = 0, \quad \left(\frac{\Phi}{2GK} \right)_{,n} = 0, \quad (b)$$

将式 (b) 与式 (a) 对比，并注意薄膜和扭杆横截面具有同样的边界，可见 $\frac{\Phi}{2GK}$ 与 $\frac{F_T}{q}z$ 决定于同样的微分方程和边界条件，因而必然具有相同的解答。于是有关系式 $\Phi/2GK = F_T z/q$ ，即

$$\frac{\Phi}{z} = \frac{2GK}{q/F_T} \quad (c)$$

命薄膜及其边界平面之间的体积为 V ，则有

$$V = \iint z dx dy,$$

应用式 (c)，然后应用 (10-5) 式，可由上式得出

$$V = \iint \frac{q}{2GKF_T} \Phi dx dy = \frac{qM}{4GKF_T},$$

从而有

$$\frac{M}{2V} = \frac{2GK}{q/F_T} \quad (d)$$

此外，根据 (10-2) 式，利用式 (c)，又可得

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2GKF_T}{q} z \right) = \frac{2GK}{q/F_T} \frac{\partial z}{\partial y},$$

其中的 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 显然就是薄膜沿 y 方向的斜率。上式也可以改写成为

$$\tau_{xy} / \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2GK}{q/F_T} \quad (e)$$

现在，假想我们调整该薄膜所受的压力 q ，使得薄膜的 q/F_T 值等于扭杆的 $2GK$ 值，就可以由 (c)、(d)、(e) 三式得出如下的三个结论：(1) 该扭杆的应力函数 Φ ，等于该薄膜的垂度 z 。(2) 该扭杆所受的扭矩 M ，等于该薄膜及其边界平面之间的体积的两倍，即 $2V$ 。(3) 该扭杆横截上某一点处的切应力 τ_{xy} ，等于该薄膜上对应点处的斜率 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

因为 x 轴和 y 轴可以取在扭杆横截面上任意两个互相垂直的方向，所以上述第 (3) 个结论可以推广如下：在扭杆横截面上某一点处的、沿任一方向的切应力，就等于该薄膜在对应点处的、沿垂直方向的斜率。由此又可见，扭杆横截面上的最大切应力，等于该薄膜的最大斜率。但须注意，最大切应力的方向

和最大斜率的方向是互相垂直的。

§ 10-3 椭圆截面杆的扭转

设有等截面直杆，它的横截面具有一个椭圆边界，椭圆的半轴是 a 和 b ，图 10-3。

因为椭圆的方程可以写成

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (\text{a})$$

而应力函数 Φ 在横截面的边界上应当等于零，所以，我们假设应力函数为

$$\Phi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (\text{b})$$

其中 m 是一个常数，然后来考察，是否可以满足一切条件

将式(b)代入微分方程(10-3)，得

$$\frac{2m}{a^2} + \frac{2m}{b^2} = C,$$

可见，取

$$m = \frac{C}{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}} = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} C,$$

即可满足基本微分方程(10-3)，而应力函数应取为

$$\Phi = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (\text{c})$$

现在由方程(10-5)来求出常数 C 。将式(c)代入(10-5)，得

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C \left(\frac{1}{a^2} \iint x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2 dx dy - \iint dx dy \right) = M. \quad (\text{d})$$

由材料力学已知

$$\iint x^2 dx dy = I_x = \frac{\pi a^3 b}{4},$$

$$\iint y^2 dx dy = I_y = \frac{\pi a b^3}{4},$$

$$\iint dx dy = A = \pi a b.$$

代入式(d)，即得

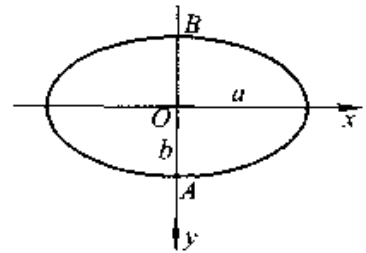


图 10-3

$$C = -\frac{2(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3} \quad (c)$$

再代回式(c), 得确定的应力函数

$$\Phi = -\frac{M}{\pi ab} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (f)$$

这个应力函数已经满足了所有一切条件。

将应力函数的表达式(f)代入公式(10-2), 得应力分量

$$\tau_{xy} = -\frac{2M}{\pi ab^3} y, \quad \tau_{yx} = \frac{2M}{\pi a^3 b} x \quad (10-12)$$

横截面上任意一点的合切应力是

$$\tau = (\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2M}{\pi ab} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10-13)$$

假想有一块薄膜, 张在如图 10-3 所示的椭圆边界上, 受有均匀压力, 则显然可见, 薄膜的最大斜率将发生在 A 点和 B 点, 而方向垂直于边界。根据薄膜比拟, 扭杆横截面上最大的切应力也将发生在 A 点和 B 点, 但方向平行于边界。将 A 点或 B 点的坐标(0, ±b)代入(10-13), 得出这个最大切应力

$$\tau_{\max} = \tau_A = \tau_B = \frac{2M}{\pi ab^2} \quad (10-14)$$

当 $a = b$ 时(扭杆的横截面为圆形时), 解答与材料力学中相同。

现在来求出形变和位移。由公式(10-9)及式(c)得单位长度内的扭角

$$K = -\frac{C}{2G} = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} \quad (10-15)$$

于是由(10-6)得出

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} yz, \\ v &= \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xz, \end{aligned} \right\} \quad (10-16)$$

另一方面, 将式(f)及(10-15)式代入(10-7), 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} y, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} x. \end{aligned}$$

进行积分, 得

$$\begin{aligned} u &= -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xy + f_1(y), \\ w &= -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xy + f_2(x). \end{aligned}$$

由此可见, $f_1(y)$ 及 $f_2(x)$ 应当等于同一常数 w_0 , 而 w_0 就是 z 方向的刚体位移。不计这个刚体位移, 即得

$$w = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xy \quad (10-17)$$

这个公式表明: 扭杆的横截面并不保持为平面, 而将翘成曲面。曲面的等高线在 xy 面上的投影是双曲线, 而这些双曲线的渐近线是 x 轴和 y 轴。只有当 $a = b$ 时(圆截面杆)才有 $w = 0$, 横截面才保持为平面。

§ 10-4 矩形截面杆的扭转

现在来分析矩形截面杆的扭转, 设矩形的边长为 a 及 b , 如图 10-4 所示。

首先, 假定矩形是很狭的, 即 $a \gg b$ 。在这一情况下, 由薄膜比拟可以推断, 应力函数 Φ 在绝大部分横截面上几乎不随 x 变化, 因为对应的薄膜几乎不受短边约束的影响, 近似于柱面。于是可以近似地取

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{dy}, \quad \text{而(10-3)成为}$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} = C,$$

进行积分, 并注意有边界条件 $(\Phi)_{y = \pm \frac{b}{2}} = 0$, 即得

$$\Phi = \frac{C}{2} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \quad (a)$$

为了求出常数 C , 将式(a)代入(10-5), 得

$$2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{C}{2} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) dx dy = M,$$

积分以后, 得 $-\frac{ab^3}{6}C = M$, 从而得到

$$C = -\frac{6M}{ab^3} \quad (b)$$

于是由式(a)得确定的应力函数

$$\Phi = \frac{3M}{ab^3} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \quad (c)$$

将式(c)代入(10-2), 得应力分量

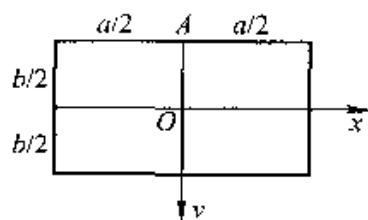


图 10-4

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{6M}{ab^3}y, \\ \tau_{yx} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (10-18)$$

由薄膜比拟可以推断, 最大切应力发生在矩形截面的长边上, 其大小为

$$\tau_{\max} = (\tau_{xy})_{y = \pm \frac{b}{2}} = \frac{3M}{ab^2} \quad (10-19)$$

将式(b)代入公式(10-9), 得扭角

$$K = -\frac{C}{2G} = \frac{3M}{ab^3G} \quad (10-20)$$

因为由此可得 $\frac{3M}{ab^3} = GK$, 所以应力函数的表达式(c)也可以写成

$$\Phi = GK \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \quad (d)$$

现在来分析任意矩形杆(横截面的边长比值 a/b 为任意数值) 在这里, 应力函数 Φ 应当满足微分方程(10-8), 即

$$\nabla^2 \Phi = -2GK, \quad (e)$$

并满足边界条件

$$(\Phi)_{y = \pm \frac{a}{2}} = 0, \quad (\Phi)_{y = \pm \frac{b}{2}} = 0, \quad (f)$$

此外, 根据对称条件(薄膜应当对称于 xz 面及 yz 面), 应力函数应当是 x 及 y 的偶函数。

试以狭矩形截面扭杆的应力函数(d)为基础, 加上一个修正函数 $F(x, y)$, 也就是, 取应力函数 Φ 为

$$\Phi = GK \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) + F \quad (g)$$

代入式(e), 并注意边界条件(f), 可见 F 应当是调和函数, 即

$$\nabla^2 F = 0, \quad (h)$$

并满足边界条件

$$(F)_{y = \pm \frac{a}{2}} = GK \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right), \quad (F)_{y = \pm \frac{b}{2}} = 0, \quad (i)$$

此外, 根据对称条件, F 也应当是 x 和 y 的偶函数。

在常用到的调和函数中, 有 $\cosh \alpha x$ 或 $\sinh \alpha x$ 乘以 $\cos \alpha y$ 或 $\sin \alpha y$, 以及 $\cosh \alpha y$ 或 $\sinh \alpha y$ 乘以 $\cos \alpha x$ 或 $\sin \alpha x$, 其中 α 是量纲为 L^{-1} 的常数。现在需要的调和函数是 x 和 y 的偶函数, 所以只能选取 $\cosh \alpha x \cos \alpha y$ 或 $\cosh \alpha y \cos \alpha x$ 。为了能够满足(i)中的第二式, 只好选取 $\cosh \alpha x \cos \alpha y$ 而命 $\alpha = m\pi/b$, 其中 m 为奇整数。为了也能满足(i)中的第一式, 不能只取这样的一项, 但可以取无

数多这种项的叠加，也就是取

$$F = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_m \cosh \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (j)$$

代入(i)中的第一式，得到

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_m \cosh \frac{m\pi a}{2b} \cos \frac{m\pi y}{b} = GK \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right)$$

将上式右边在 $y = -b/2$ 至 $y = b/2$ 的区间展为 $\cos \frac{m\pi y}{b}$ 的级数，然后比较两边的系数，得到

$$A_m \cosh \frac{m\pi a}{2b} = \frac{2}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} GK \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \cos \frac{m\pi y}{b} dy = -\frac{8GKb^2}{\pi^3 m^3} (-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

由此求出 A_m ，然后代入式(j)，得出满足一切条件的修正函数

$$F = -\frac{8GKb^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cosh \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{m\pi y}{b}}{m^3 \cosh \frac{m\pi a}{2b}}$$

代入式(g)，得确定的应力函数

$$\Phi = GK \left[\frac{b^2}{4} - y^2 - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cosh \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{m\pi y}{b}}{m^3 \cosh \frac{m\pi a}{2b}} \right] \quad (k)$$

由薄膜比拟可以断定，最大切应力发生在矩形横截面长边的中点，例如 A 点 $(x=0, y=-\frac{b}{2})$ ，它的大小是

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= (\tau_{xy})_{x=0, y=-\frac{b}{2}} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x=0, y=-\frac{b}{2}} \\ &= GKb \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \cosh \frac{m\pi a}{2b}} \right] \end{aligned} \quad (l)$$

为了得出扭矩 M 与扭角 K 的关系，应用公式(10-5)及式(k)，得

$$\begin{aligned} M &= 2 \iint \Phi dx dy = 2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Phi dx dy \\ &= GKab^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh \frac{m\pi a}{2b}}{m^5} \right] c \end{aligned}$$

由此得扭角的公式

$$K = \frac{M}{ab^3 G \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{\tanh \frac{m\pi a}{2b}}{m^5} \right]} \quad (m)$$

代入式(1)，得最大切应力的公式

$$\tau_{\max} = \frac{M \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^2 \cosh \frac{m\pi a}{2b}} \right]}{ab^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{\tanh \frac{m\pi a}{2b}}{m^5} \right]} \quad (n)$$

将上列两个公式分别写成

$$K = \frac{M}{ab^3 G \beta}, \quad (10-21)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M}{ab^2 \beta_1}, \quad (10-22)$$

则因子 β 及 β_1 只与比值 a/b 有关，两个因子的数值如下表所示。

a/b	β	β_1	a/b	β	β_1
1.0	0.141	0.208	3.0	0.263	0.267
1.2	0.166	0.219	4.0	0.281	0.282
1.5	0.196	0.230	5.0	0.291	0.291
2.0	0.229	0.246	10.0	0.312	0.312
2.5	0.249	0.258	很大	0.333	0.333

由上表可见，对于具有很狭的矩形横截面的扭杆 (a/b 很大)， β 及 β_1 都趋于 $1/3$ ，公式(10-21)及(10-22)分别简化为(10-20)及(10-19)。

§ 10-5 薄壁杆的扭转

工程上通常使用的薄壁杆，它们的横截面大都是由等宽度的狭矩形组成的。这些狭矩形可能是直的或是曲的，图 10-5。从薄膜可以想见，如果一个直的狭矩形和另一个曲的狭矩形具有相同的长度 a 和宽度 b ，则当张在这两个狭矩形边界上的薄膜具有相同的张力 F ，并受有相同的压力 q 时（这时它们的 q/F 相同），两个薄膜和各自的边界平面之间的体积，以及

两个薄膜的斜率，都将没有多大的差别。由此可以推断，如果有两个狭矩形截面的扭杆，它们的扭角 K 相同，切变模量 G 也相同（因而它们的 $2GK$ 相同），则两个扭杆的扭矩 M 及切应力 τ 也就没有多大的差别。因此，一个曲的狭矩形截面，可以用一个同宽同长的直的狭矩形截面来代替，而不致引起多大的误差。

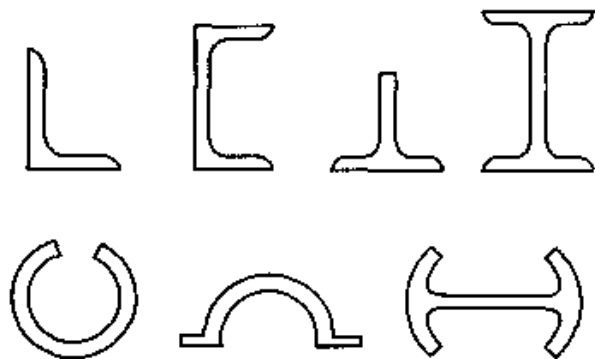


图 10-5

用 a_i 及 b_i 分别代表扭杆横截面的第 i 个狭矩形的长度及宽度， M_i 代表该矩形面积上承受的扭矩（是整个横截面上的扭矩 M 的一部分）， τ_i 代表该矩形长边中点附近的切应力， K 代表该扭杆的扭角。根据公式 (10-19) 及 (10-20)，我们有

$$\tau_i = \frac{3M_i}{a_i b_i^3}, \quad (a)$$

$$K = \frac{3M_i}{a_i b_i^3 G} \quad (b)$$

由式 (b) 得

$$M_i = \frac{GKa_i b_i^3}{3}, \quad (c)$$

所以扭杆的整个横截面上的扭矩为

$$M = \sum M_i = \frac{GK}{3} \sum a_i b_i^3, \quad (d)$$

由式 (c) 及式 (d) 消去 K ，得到 $M_i = \frac{a_i b_i^3}{\sum a_i b_i^3} M$ 。代回式 (a) 及式 (b)，即得

$$\tau_i = \frac{3Mb_i}{\sum a_i b_i^3}, \quad (10-23)$$

$$K = \frac{3M}{G \sum a_i b_i^3}, \quad (10-24)$$

对于狭矩形长边中点处的切应力 τ_i ，公式 (10-23) 给出相当精确的数值。但是，在两个狭矩形的连接处，可能发生远大于此的局部切应力。按照胡斯用

差分法计算的结果，比值 τ_{\max}/τ_i 与比值 ρ/b_i 的关系大致如图 10-6 所示。在这里， τ_{\max} 是内圆角处的最大切应力， τ_i 是按公式 (10-23) 算出的切应力， ρ 是内圆角处的曲率半径， b_i 是狭矩形的宽度。

分析闭合薄壁杆的扭转问题时，最好是应用薄膜比拟，以避免应用位移单值条件的麻烦。假想在薄壁杆的横截面边界上张一块薄膜，图 10-7，薄膜在外边界 AB 处的垂度取为零。命内边界 CD 处的垂度为 h (为了薄膜在内边界处的垂度为常量，可以假想 CD 是一块不变形的无重平板)。由于杆壁的厚度 δ 很小，薄膜的斜率沿着厚度方向的变化可以不计。于是，在杆壁厚度为 δ 之处，切应力的大小 (等于薄膜的斜率) 是

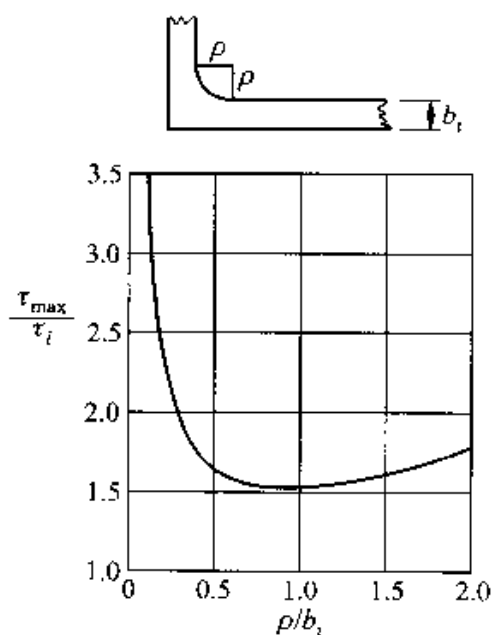


图 10-6

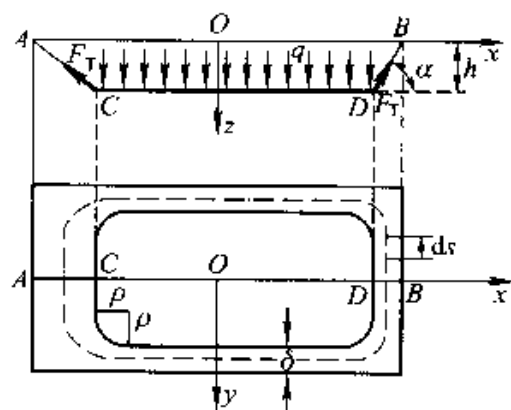


图 10-7

$$\tau = \frac{h}{\delta} q_1 \quad (e)$$

扭矩 M 应当等于体积 $ABDC$ 的两倍，即

$$M = 2Ahq_1 \quad (f)$$

其中的 A 可以取为内外两边界所包围的面积的平均值，也可以取为杆壁的中线所包围的面积。由式 (e) 及式 (f) 消去 h ，得

$$\tau = \frac{M}{2A\delta} \quad (10-25)$$

可见最大切应力发生在杆壁最薄之处。

为了确定扭角 K ，我们来考虑平板 CD 的平衡。在杆壁中线的微小长度 ds 上，薄膜对平板所施的拉力是 $F_T ds$ ，这个拉力在 z 轴上的投影是 $F_T ds \sin \alpha$ ，可以近似地取为 $F_T ds \tan \alpha$ 即 $F_T ds h / \delta$ (因为我们假定薄膜的垂度是微小的)。注意

平板所受的压力是 qA ，可以由平板的平衡条件 $\sum F_z = 0$ 得

$$\int F_1 ds \frac{h}{\delta} = qA.$$

这里的线积分应当包括杆壁中线的全长。注意 F_1 和 h 都是常量，则上式可以写成

$$\frac{h}{A} \int \frac{ds}{\delta} = \frac{q}{F_1}.$$

将由式(f)得来的 $h = M/2A$ 代入，并注意薄膜的 q/F_1 就等于薄壁扭杆的 $2GK$ ，

即由上式得出 $\frac{M}{2A^2} \int \frac{ds}{\delta} = 2GK$ ，从而得到

$$K = \frac{M}{4A^2 G} \int \frac{ds}{\delta}. \quad (10-26)$$

对于均匀厚度的闭口薄壁杆， δ 是常量，上式将简化为

$$K = \frac{Ms}{4A^2 G \delta}, \quad (10-27)$$

其中 s 是杆壁中线的全长。

在截面有凹角之处，局部的最大切应力 τ_{\max} 可能远大于公式(10-25)给出的 τ 值。根据胡斯用差分法计算的结果，比值 τ_{\max}/τ 与比值 ρ/δ 的关系大致如图 10-8 所示。

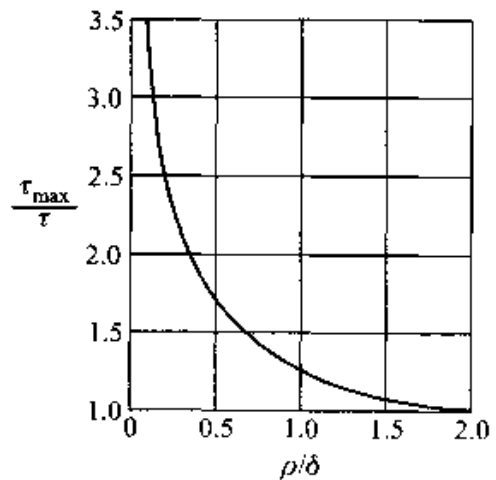


图 10-8

§ 10-6 扭转问题的差分解

对于等截面直杆的扭转问题，如果杆的横截面是单连截面，则用差分法求解是比较方便的。

假定在杆的横截面上织成网格，如图 7-1 所示。按照差分公式(7-2)及(7-4)，在任一内结点 0 ，我们有

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{h^2}. \quad (a)$$

另一方面，按照 Φ 的微分方程(10-8)，在该结点 0 ，我们有

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_0 = -2GK. \quad (b)$$

将式(a)代入式(b)，即得内结点 0 处的差分方程如下：

$$4\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4) = 2GKh^2, \quad (10-28)$$

其中的 GKh^2 是常量，对每个内结点都相同。

按照 § 10-1 中所述, 对于单连截面, 可以把边界上各结点处的 Φ 值取为零。这样, 在(10-28)所示的差分方程中, 未知值就只是内结点处的 Φ 值, 而这种差分方程的数目又恰好等于内结点的数目, 因此可以由这些方程求得内结点处的 Φ 值(用 GKh^2 表示)。

用应力函数表示应力分量的表达式是(10-2), 它可以写成

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (10-29)$$

对于内结点, 导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ 可用中点导数公式(7-1)或(7-3)求得; 对于边界结点, 则须用端点导数公式(7-7)至(7-10)求得。

如上求出的应力分量, 是用 GKh 表示的, 为了能把应力分量用扭矩 M 来表示, 还必须把 K 值用 M 值来表示。为此, 可以利用应力函数 Φ 与扭矩 M 的关系式(10-5), 即

$$2 \iint \Phi dx dy = M \quad (c)$$

设图 7-1 中结点 0 到结点 8 这九个结点处的 Φ 值已经求出(用 GKh^2 表示的), 即可应用二维辛普生公式, 计算这个以结点 0 为中心的 $2h \times 2h$ 正方形范围内的积分值:

$$\int_{y_0-h}^{y_0+h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \Phi dx dy = \frac{h^2}{9} [16\Phi_0 + 4(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4) + (\Phi_5 + \Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_8)] \quad (10-30)$$

把这些积分值相叠加, 就得出整个横截面上的 $\iint \Phi dx dy$, 用 GKh^4 表示。再将这个结果代入式(c), 即可将 K 值用 M 值来表示, 从而将如上求出的应力分量用扭矩 M 的值来表示。

作为例题, 试考虑横截面为正方形 $a \times a$ 的扭杆, 采用 $h = a/4$ 的 4×4 网格, 图 10-9。由于对称, 只须算出 b 、 c 、 d 三种结点处的 Φ 值(边界上的 Φ 值取为零)。按照(10-28), 该三种结点处的差分方程为

$$\begin{aligned} 4\Phi_b - 4\Phi_0 &= 2GKh^2, \\ 4\Phi_c - \Phi_b - 2\Phi_d &= 2GKh^2, \\ 4\Phi_d - 2\Phi_c &= 2GKh^2. \end{aligned}$$

联立求解, 得

$$\Phi_b = \frac{9}{4}GKh^2, \quad \Phi_c = \frac{7}{4}GKh^2, \quad \Phi_d = \frac{11}{8}GKh^2. \quad (d)$$

按照公式(10-30), 在以结点 d 为中心的 $2h \times 2h$ 正方形范围内, 图

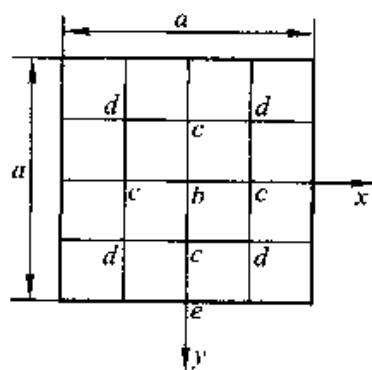


图 10-9

10-9, 积分值是

$$\begin{aligned} \int_{x_d-h}^{x_d+h} \int_{y_d-h}^{y_d+h} \Phi dx dy &= \frac{h^2}{9} [16\Phi_d + 4(2\Phi_c) + \Phi_b] \\ &= \frac{h^2}{9} \left[16 \times \frac{11}{8} GK h^2 + 4 \times 2 \times \frac{7}{4} GK h^2 + \frac{9}{4} GK h^2 \right] \\ &= \frac{17}{4} GK h^4, \end{aligned}$$

在整个横截面上, 积分值是

$$\iint \Phi dx dy = 4 \times \frac{17}{4} GK h^4 = 17 GK h^4.$$

代入式(e), 得

$$K = \frac{M}{34 Gh^4} = \frac{M}{0.133 Ga^4} \quad (e)$$

按照 § 10-4 中的公式(10-21)及附表中的数值, 得精确值

$$K = \frac{M}{a^4 G \beta} = \frac{M}{0.141 Ga^4}$$

可见差分法给出的 K 值比精确值大出约 6%。

由薄膜比拟可以想见, 最大切应力将发生在截面四边的中点, 例如在结点 e_c 。利用(10-29)式及端点导数公式(7-7), 得到

$$\begin{aligned} \tau_{\max} = (\tau_{xy})_c &= - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_c = - \frac{3\Phi_c - 4\Phi_d + \Phi_b}{2h} \\ &= \frac{4\Phi_c - \Phi_b}{2h} = \frac{19}{8} GK h = \frac{19}{32} GK a. \end{aligned}$$

将式(e)代入, 即得

$$\tau_{\max} = \frac{19}{32} \frac{M}{0.133 a^3} = \frac{M}{0.224 a^3}$$

按照 § 10-4 中的公式(10-22)及附表给出的 β_1 值, 得精确值

$$\tau_{\max} = \frac{M}{a^3 \beta_1} = \frac{M}{0.208 a^3}$$

可见差分法给出的数值比精确值小了点约 8%。

习 题

10-1 扭杆的横截面为等边三角形 OAB , 其高度为 a , 图 10-10 取坐标轴如图所示, 则 AB 、 OA 、 OB 三边的方程分别为 $x - a = 0$, $x - \sqrt{3}y = 0$, $x + \sqrt{3}y = 0$, 试证应力函数

$$\Phi = m(x-a)(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)$$

能满足一切条件, 并求出最大切应力及扭角。

答案: $|\tau_{max}| = \frac{15\sqrt{3}M}{2a^3}, K = \frac{15\sqrt{3}M}{Ga^4}$

10-2 半径为 a 的圆截面扭杆, 有半径为 b 的圆弧槽, 图 10-11 取坐标轴如图所示, 则圆截面边界的方程为 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, 圆弧槽的方程为 $x^2 + y^2 - b^2 = 0$ 试证应力函数

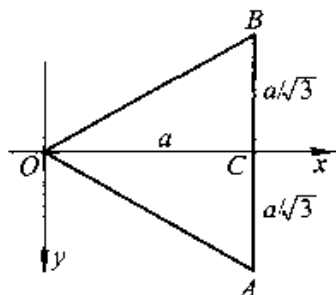


图 10-10

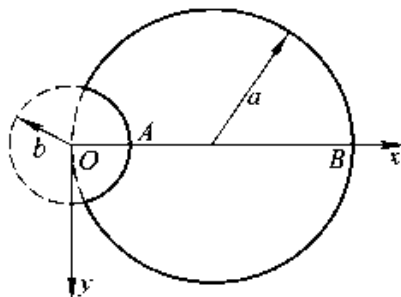


图 10-11

$$\Phi = -GK \frac{(x^2 + y^2 - b^2)(x^2 + y^2 - 2ax)}{2(x^2 + y^2)} = -\frac{GK}{2} \left[x^2 + y^2 - b^2 - \frac{2ax(x^2 + y^2 - b^2)}{x^2 + y^2} \right]$$

能满足方程(10-4)及(10-8), 试求最大切应力和边界上离圆弧槽较远处(例如 B 点)的应力: 设圆弧槽很小(b 远小于 a), 试求槽边的应力集中因子 f 。

答案: $|\tau_{max}| = GK(2a - b), \tau_B = GK(a - \frac{b^2}{4a}), f = 2$

10-3 设有闭合薄壁杆, 杆壁具有均匀厚度 δ , 杆壁中线的长度为 s , 而中线所包围的面积为 A 。另有一开口薄壁杆, 系由上述薄壁杆沿纵向切开而成。设两杆受有同样大小的扭矩, 试求两杆的最大切应力之比, 并求两杆的扭角之比。

答案: $\frac{s\delta}{6A}, \frac{s^2\delta^2}{12A^2}$

10-4 闭合薄壁杆的横截面如图 10-12 所示, 均匀厚度为 δ , 受扭矩 M , 试求最大切应力及扭角。

答案: $M/8a^2\delta, M/8Ga^3\delta$

10-5 扭杆的横截面如图 10-13 所示, 试用差分法求出扭角 取 $h = a/2$ 。

答案: $0.9M/Ga^4$

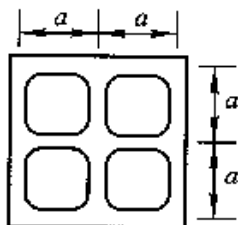


图 10-12

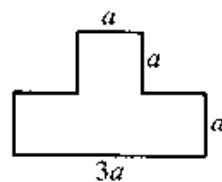


图 10-13

参考教材

[1] 铁木辛柯, 古迪尔著. 弹性理论[M]. 徐芝纶译. 北京: 高等教育出版社, 1990: 第

十章.

- [2] 钱伟长, 叶开沅编. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1956: 第七章.
- [3] 徐芝纶著. 弹性力学中的差分方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989: 第二章.

第十一章 能量原理与变分法

§ 11-1 弹性体的形变势能

变分法，主要是研究泛函及其极值的求解方法。所谓泛函，就是以函数为自变量的一类函数，简单地讲，泛函就是函数的函数。弹性力学变分法中所研究的泛函，就是弹性体的能量，如形变势能，外力势能等。因此，弹性力学中的变分法又称为能量法。

假定弹性体在受力作用的过程中始终保持平衡，因而没有动能的改变，而且弹性体的非机械能也没有变化，于是，外力势能的减少（也就是外力所做的功）就完全转变为形变势能（又称为应变能），存储于弹性体的内部。形变势能可以用应力在其相应的应变上所做的功来计算。设弹性体只在某一个方向，例如 x 方向，受有均匀的正应力 σ_x ，相应的线应变为 ε_x ，则其每单位体积内具有的形变势能，即应变能密度为

$$v_\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x \quad (a)$$

应变能密度是以应变分量为自变量的泛函，在图 11-1 中表示为应力-应变曲线右下方的一部分面积。

在图 11-1 中的应力-应变曲线左上方的部分面积，记为

$$v_\sigma = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x d\sigma_x \quad (b)$$

v_σ 表示单位体积内的应变余能，又称为应变余能密度。它是以应力分量为自变量的泛函，在图 11-1 中即为矩形面积 $\sigma_x \varepsilon_x$ 除去 v_ε 的余下部分。

当弹性体的应力-应变关系为线性时，由于 $\sigma_x = E\varepsilon_x$ ，或从图 11-1 可见，有

$$v_\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \quad (c)$$

$$v_\sigma = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x d\sigma_x = \frac{1}{2} \varepsilon_x \sigma_x \quad (d)$$

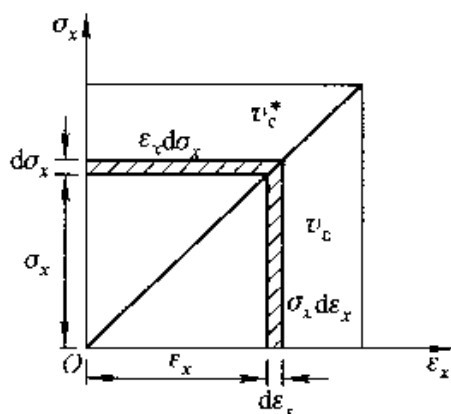


图 11-1

在这种状态下, 虽然应变能密度和应变余能密度的数值相等, 但应注意它们的自变量是不同的。

同样, 设弹性体只在某两个互相垂直的方向, 例如 x 和 y 方向, 受有均匀的切应力 τ_{xy} , 相应的切应变为 γ_{xy} , 则其应变能密度为 $\tau_{xy}\gamma_{xy}/2$ 。

设弹性体受有全部六个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} , 则形变势能的计算似乎很复杂, 因为这时的每一个应力分量会引起与另一个应力分量相应的形变分量(例如 σ_x 会引起 ε_x 等等), 好像形变势能将随着弹性体受力的次序不同而不同。但是, 根据能量守恒定理, 形变势能的多少与弹性体受力的次序无关, 而完全确定于应力及形变的最终大小(要不然, 我们按某一种次序对弹性体加载, 而按另一种次序卸载, 就将在一个循环中使弹性体增加或减少一定的能量, 而这是不可能的)。因此, 我们假定六个应力分量和六个形变分量全都同时按同样的比例增加到最后的大小, 这样就可以很简单地算出相应于每一个应力分量的应变能密度, 然后把它们相叠加, 从而得出全部应变能密度:

$$v_e = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (e)$$

在一般的情况下, 弹性体受力并不均匀, 各个应力分量和形变分量一般都是位置坐标的函数, 因而应变能密度 v_e 一般也是位置坐标的函数。为了得出整个弹性体的形变势能 V_e , 必须把应变能密度 v_e 在整个弹性体的体积内进行积分, 也就是

$$V_e = \iiint v_e dx dy dz_0 \quad (f)$$

将式(e)代入, 即得

$$V_e = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz_0 \quad (g)$$

形变势能也可以只用形变分量来表示。为此, 须利用物理方程(8-19), 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \varepsilon_x \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \varepsilon_y \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \varepsilon_z \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

其中 $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ 。将式(h)代入式(e)，简化以后，得

$$v_e = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{\mu}{1-2\mu} \theta^2 + (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \right] \quad (i)$$

并由式(f)得弹性体的形变势能表达式

$$V_e = \frac{E}{2(1+\mu)} \iiint \left[\frac{\mu}{1-2\mu} \theta^2 + (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \right] dx dy dz \quad (11-1)$$

由于 $0 < \mu < 1/2$ ，故由上式可见：不论形变如何，弹性体的形变势能总不会是负的。在所有的形变分量都等于零的情况下，形变势能才等于零，相应于任何形变，形变势能都是正的。

试将式(i)分别对六个形变分量求导，再参阅式(h)，可见有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_e}{\partial \varepsilon_x} &= \sigma_x, & \frac{\partial v_e}{\partial \varepsilon_y} &= \sigma_y, & \frac{\partial v_e}{\partial \varepsilon_z} &= \sigma_z, \\ \frac{\partial v_e}{\partial \gamma_{yz}} &= \tau_{yz}, & \frac{\partial v_e}{\partial \gamma_{zx}} &= \tau_{zx}, & \frac{\partial v_e}{\partial \gamma_{xy}} &= \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (11-2)$$

它们表示：弹性体的应变能密度对于任一形变分量的改变率，就等于相应的应力分量。

形变势能还可以用位移分量来表示。为此，只需将几何方程(8-9)代入(11-1)式。这样就得出

$$\begin{aligned} V_e = \frac{E}{2(1+\mu)} \iiint & \left[\frac{\mu}{1-2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \\ & \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (11-3) \end{aligned}$$

整个弹性体的应变余能可以类似地得出

$$V_e = \iiint v_e dx dy dz \quad (j)$$

其中的应变余能密度 v_e 在应力-应变关系为线性时同样是

$$v_e = \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx} + \gamma_{xy} \tau_{xy}) \quad (k)$$

注意应变余能是以应力分量为自变量的泛函，因此，应变余能可以只用应力分量来表示。为此，须利用物理方程(8-17)，即

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

代入式(k), 简化以后, 得应变余能密度的表达式

$$v_e = \frac{1}{2E} [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\mu)(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)], \quad (m)$$

并由式(j)得整个弹性体的应变余能表达式

$$V_e = \frac{1}{2E} \iiint [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\mu)(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)] dx dy dz, \quad (11-4)$$

试将式(m)分别对六个应力分量求导, 再参阅式(1), 可见有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_e}{\partial \sigma_x} &= \varepsilon_x, & \frac{\partial v_e}{\partial \sigma_y} &= \varepsilon_y, & \frac{\partial v_e}{\partial \sigma_z} &= \varepsilon_z, \\ \frac{\partial v_e}{\partial \tau_{yz}} &= \gamma_{yz}, & \frac{\partial v_e}{\partial \tau_{zx}} &= \gamma_{zx}, & \frac{\partial v_e}{\partial \tau_{xy}} &= \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (11-5)$$

它们表示: 弹性体的应变余能密度对于任一应力分量的改变率, 就等于相应的形变分量。

§ 11-2 位移变分方程

设有任一弹性体, 在一定的外力作用下处于平衡状态。命 u 、 v 、 w 为该弹性体中实际存在的位移分量, 它们满足用位移分量表示的平衡微分方程, 并满足位移边界条件以及用位移分量表示的应力边界条件。现在, 假想这些位移分量发生了位移边界条件所容许的微小改变, 即所谓虚位移或位移变分 δu 、 δv 、 δw , 成为

$$u' = u + \delta u, \quad v' = v + \delta v, \quad w' = w + \delta w$$

然后来考察，能量方面将发生什么样的改变。

假定弹性体在虚位移过程中并没有温度的改变，也没有速度的改变，因而也就没有热能或动能的改变。这样，按照能量守恒定理，形变势能的增加应当等于外力势能的减少，也就等于外力所做的功，即所谓虚功。注意外力包括分量为 f_x 、 f_y 、 f_z 的体力，以及分量为 \bar{f}_x 、 \bar{f}_y 、 \bar{f}_z 的面力，可见形变势能的增加为

$$\delta V_e = \iiint (f_x dx dy dz \delta u + f_y dx dy dz \delta v + f_z dx dy dz \delta w) + \iint (\bar{f}_x dS \delta u + \bar{f}_y dS \delta v + \bar{f}_z dS \delta w),$$

其中的三重积分须包括弹性体的全部体积；由于虚位移或位移变分 δu 、 δv 、 δw 是在位移边界条件所容许下发生的，因此，在受约束的边界上， $\delta u = \delta v = \delta w = 0$ ，上式的二重积分只需包括全部受已知面力的边界面积。将上式进行归项以后，得到

$$\delta V_e = \iiint (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dx dy dz + \iint (\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v + \bar{f}_z \delta w) dS. \quad (11-6)$$

这个方程就是所谓位移变分方程，有的文献把它称为拉格朗日变分方程。

应用位移变分方程，可以得出有限单元法中用到的一个重要方程，即所谓虚功方程，推导如下。按照变分原理，变分的运算与定积分的运算可以交换次序，于是有

$$\delta V_e = \delta \iiint v_e dx dy dz = \iiint \delta v_e dx dy dz.$$

把应变能密度 v_e 看做形变分量的函数，并应用(11-2)式，可由上式得到

$$\begin{aligned} \delta V_e &= \iiint \left(\frac{\partial v_e}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial v_e}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial v_e}{\partial \varepsilon_z} \delta \varepsilon_z + \frac{\partial v_e}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \frac{\partial v_e}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} + \frac{\partial v_e}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right) dx dy dz \\ &= \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz. \end{aligned}$$

代入位移变分方程(11-6)，即得

$$\begin{aligned} &\iiint (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dx dy dz + \iint (\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v + \bar{f}_z \delta w) dS \\ &= \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz. \quad (11-7) \end{aligned}$$

这就是所谓虚功方程。把该方程右边的各项称为应力在虚应变上所做的虚功，则虚功方程表示：如果在虚位移发生之前，弹性体是处于平衡状态，那么，在虚位移过程中，外力在虚位移上所做的虚功就等于应力在相应的虚应变上所做的虚功。

从位移变分方程(11-6)出发，还可以推出弹性力学中的一个原理，即所谓最

小势能原理。由于虚位移是微小的，因此，在虚位移过程中，外力的大小和方向可以当做保持不变，只是作用点有了改变。于是可以把方程(11-6)改写成

$$\delta V_e = \iiint [\delta(f_x u) + \delta(f_y v) + \delta(f_z w)] dx dy dz + \iint [\delta(\bar{f}_x u) + \delta(\bar{f}_y v) + \delta(\bar{f}_z w)] dS,$$

将变分与定积分交换次序，并进行移项，即得

$$\delta \left[V_e - \iiint (f_x u + f_y v + f_z w) dx dy dz - \iint (\bar{f}_x u + \bar{f}_y v + \bar{f}_z w) dS \right] = 0. \quad (a)$$

现在，用 V 代表外力的势能（以 $u = v = w = 0$ 时的自然状态下的势能为零），它也就等于外力在实际位移上所做的功冠以负号，即

$$V = - \iiint (f_x u + f_y v + f_z w) dx dy dz - \iint (\bar{f}_x u + \bar{f}_y v + \bar{f}_z w) dS, \quad (b)$$

代入式(a)，即得

$$\delta(V_e + V) = 0.$$

因为 $V_e + V$ 是形变势能与外力势能的总和，所以由此可见，在给定的外力作用下，实际存在的位移应使总势能的变分成为零。这就推出这样一个原理：在给定的外力作用下，在满足位移边界条件的所有各组位移中间，实际存在的位移应使总势能成为极值。如果考虑二阶变分，则得到 $\delta^2(V_e + V) \geq 0$ ，由此就可以证明：对于稳定平衡状态，这个极值是极小值。因此，上述原理称为最小势能原理。

我们以前已经看到，实际存在的位移，除了满足位移边界条件以外，还应当满足用位移表示的平衡微分方程和应力边界条件；现在又看到，实际存在的位移，除了满足位移边界条件以外，还满足位移变分方程。而且，通过运算，还可以从位移变分方程导出用位移表示的平衡微分方程和应力边界条件。于是可见，位移变分方程可以代替平衡微分方程和应力边界条件。

现在来进一步考察，如果位移分量除了满足位移边界条件以外，还满足应力边界条件，那么，从能量观点看来，弹性体的位移变分又应当满足什么条件。

由于位移分量的变分，形变分量也将有相应的变分。按照几何方程，形变分量的变分为

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \delta u, \dots, \\ \delta \gamma_{yz} &= \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \delta w + \frac{\partial}{\partial z} \delta v, \dots \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

由于形变分量的变分，形变势能也将有相应的变分

$$\delta V_e = \iiint \delta v_e dx dy dz,$$

把应变能密度 v_e 看做形变分量的函数, 则上式成为

$$\delta V_e = \iiint \left(\frac{\partial v_e}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \dots + \frac{\partial v_e}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \dots \right) dx dy dz,$$

将(11-2)及式(c)代入, 得

$$\delta V_e = \iiint \left[\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + \dots + \tau_{yz} \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta w + \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) + \dots \right] dx dy dz, \quad (d)$$

式(d)的右边共有9项, 现在来对每一项进行分部积分, 并应用奥斯特洛格拉斯基公式。例如, 对于其中的第一项, 我们有

$$\begin{aligned} & \iiint \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u dx dy dz \\ &= \iiint \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) dx dy dz - \iiint \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u dx dy dz \\ &= \iint l \sigma_x \delta u dS - \iiint \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u dx dy dz, \end{aligned}$$

对于其余各项也都进行同样的处理, 则式(d)成为

$$\begin{aligned} \delta V_e = & \iint [(l \sigma_x + m \tau_{yz} + n \tau_{zx}) \delta u + (m \sigma_x + n \tau_{yz} + l \tau_{zx}) \delta v + \\ & (n \sigma_x + l \tau_{yz} + m \tau_{zx}) \delta w] dS - \iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta u + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \right) \delta v + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) \delta w \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

代入位移变分方程(11-6), 由于在受约束的边界上, 位移变分 $\delta u = \delta v = \delta w = 0$, 进行整理以后, 可得

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x \right) \delta u + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + f_y \right) \delta v + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + f_z \right) \delta w \right] dx dy dz - \iint [(l \sigma_x + m \tau_{yz} + n \tau_{zx} - \bar{f}_x) \delta u + \\ & (m \sigma_x + n \tau_{yz} + l \tau_{zx} - \bar{f}_y) \delta v + (n \sigma_x + l \tau_{yz} + m \tau_{zx} - \bar{f}_z) \delta w] dS = 0. \end{aligned}$$

其中的二重积分仍然只包括全部受已知面力的边界。如果应力边界条件也得到满足, 利用(8-5)式, 则上式简化为

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x \right) \delta u + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + f_y \right) \delta v + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + f_z \right) \delta w \right] dx dy dz = 0 \quad (11-8) \end{aligned}$$

这就是当位移分量满足位移边界条件及应力边界条件时, 位移变分所应满足的方程。有些文献把它称为伽辽金变分方程。

§ 11-3 位移变分法

上一节中导出的位移变分方程，给弹性力学问题提供这样一个近似解法：设定位移分量的表达式，使其满足位移边界条件，但其中包含若干个特定系数，然后利用位移变分方程决定这些系数。

试取位移分量的表达式如下：

$$u = u_0 + \sum_m A_m u_m, v = v_0 + \sum_m B_m v_m, w = w_0 + \sum_m C_m w_m, \quad (11-9)$$

其中 A_m 、 B_m 、 C_m 为互不依赖的 $3m$ 个系数； u_0 、 v_0 、 w_0 为设定的函数，在给定位移的边界上，它们的边界值等于边界上的已知位移； u_m 、 v_m 、 w_m 为在该边界上等于零的设定函数。这样，不论系数 A_m 、 B_m 、 C_m 如何取值， u 、 v 、 w 总能满足位移边界条件。注意：位移的变分只是由系数 A_m 、 B_m 、 C_m 的变分来实现，至于各个设定函数，则仅随坐标而变，与位移的变分完全无关。

按照表达式(11-9)，位移分量的变分是

$$\delta u = \sum_m u_m \delta A_m, \quad \delta v = \sum_m v_m \delta B_m, \quad \delta w = \sum_m w_m \delta C_m, \quad (a)$$

而形变势能的变分是

$$\delta V_e = \sum_m \left(\frac{\partial V_e}{\partial A_m} \delta A_m + \frac{\partial V_e}{\partial B_m} \delta B_m + \frac{\partial V_e}{\partial C_m} \delta C_m \right). \quad (b)$$

将式(b)及式(a)代入位移变分方程(11-6)，得

$$\begin{aligned} & \sum_m \left(\frac{\partial V_e}{\partial A_m} \delta A_m + \frac{\partial V_e}{\partial B_m} \delta B_m + \frac{\partial V_e}{\partial C_m} \delta C_m \right) \\ &= \sum_m \iiint (f_x u_m \delta A_m + f_x v_m \delta B_m + f_x w_m \delta C_m) dx dy dz + \\ & \quad \sum_m \iint (\bar{f}_x u_m \delta A_m + \bar{f}_x v_m \delta B_m + \bar{f}_x w_m \delta C_m) dS, \end{aligned}$$

进行移项，将每个系数的变分归并，得到

$$\begin{aligned} & \sum_m \left[\frac{\partial V_e}{\partial A_m} - \iiint f_x u_m dx dy dz - \iint \bar{f}_x u_m dS \right] \delta A_m + \\ & \sum_m \left[\frac{\partial V_e}{\partial B_m} - \iiint f_x v_m dx dy dz - \iint \bar{f}_x v_m dS \right] \delta B_m + \\ & \sum_m \left[\frac{\partial V_e}{\partial C_m} - \iiint f_x w_m dx dy dz - \iint \bar{f}_x w_m dS \right] \delta C_m = 0. \end{aligned}$$

因为变分 δA_m 、 δB_m 、 δC_m 是完全任意的，而且是互不依赖的，所以它们在上式中的系数必须等于零。于是得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_e}{\partial A_m} &= \iiint f_i u_m dx dy dz + \iint \bar{f}_i u_m dS, \\ \frac{\partial V_e}{\partial B_m} &= \iiint f_i v_m dx dy dz + \iint \bar{f}_i v_m dS, \\ \frac{\partial V_e}{\partial C_m} &= \iiint f_i w_m dx dy dz + \iint \bar{f}_i w_m dS. \end{aligned} \right\} \quad (11-10)$$

(m = 1, 2, \dots)

由形变势能的表达式(11-3)及位移分量的表达式(11-9)可见,形变势能 V_e 是系数 A_m 、 B_m 、 C_m 的二次函数,因而方程(11-10)将是各个系数的一次方程。既然各个系数是互不依赖的,就总可以由这些方程求得各个系数,从而由表达式(11-9)求得位移分量。很多文献上把这个方法称为里茨法。

如果选择表达式(11-9)中的函数,使得位移边界条件和应力边界条件都能得到满足,那么,将式(a)代入(11-8)式,就得到

$$\begin{aligned} &\sum_m \iiint \delta A_m \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right) u_m dx dy dz + \\ &\sum_m \iiint \delta B_m \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y \right) v_m dx dy dz + \\ &\sum_m \iiint \delta C_m \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z \right) w_m dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

(m = 1, 2, \dots)

根据 δA_m 、 δB_m 、 δC_m 的任意性,它们的系数应当分别等于零,于是得

$$\begin{aligned} &\iiint \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right) u_m dx dy dz = 0, \\ &\iiint \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y \right) v_m dx dy dz = 0, \\ &\iiint \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z \right) w_m dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

(m = 1, 2, \dots)

将上列三方程中的应力分量通过物理方程(8-20)用形变分量表示,再通过几何方程(8-9)用位移分量表示,简化以后,即得

$$\left. \begin{aligned} &\iiint \left[\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 u \right) + f_x \right] u_m dx dy dz = 0, \\ &\iiint \left[\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 v \right) + f_y \right] v_m dx dy dz = 0, \\ &\iiint \left[\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + f_z \right] w_m dx dy dz = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11-11)$$

(m = 1, 2, \dots)

由(11-9)式可见, 位移分量 u 、 v 、 w 是系数 A_m 、 B_m 、 C_m 的一次式, 所以方程(11-11)将是这些系数的一次方程。既然各个系数是互不依赖的, 就总可以由这些方程求得系数 A_m 、 B_m 、 C_m , 从而由(11-9)式求得位移分量。这个方法就是所谓伽辽金法。

用位移变分法求得位移分量以后, 不难通过弹性方程(9-1)求得应力分量, 但往往出现这样的情况, 取不多的系数 A_m 、 B_m 、 C_m , 就可以求得较精确的位移, 而由此求出的应力却很不精确。为了求得的应力充分精确, 必须取更多的系数。

§ 11-4 位移变分法应用于平面问题

在平面应变问题中, 我们有 $w=0$, 而且 u 和 v 都不随坐标 z 而变, 在 z 方向取一个单位长度, 则用位移分量表示的形变势能表达式(11-3)简化为

$$V_\varepsilon = \frac{E}{2(1+\mu)} \iint \left[\frac{\mu}{1-2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (11-12)$$

对于平面应力问题, 按照 § 2-6 中所述, 须将上式中的 E 换为 $\frac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1+\mu}$, 这样就得到

$$V_\varepsilon = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{(1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (11-13)$$

因为在两种平面问题中都不必考虑 w , 所以在位移分量的表达式(11-9)中只须保留其前二式, 即

$$u = u_0 + \sum_m A_m u_m, \quad v = v_0 + \sum_m B_m v_m. \quad (11-14)$$

在采用里茨法时, 为了决定系数 A_m 及 B_m , 只须应用(11-10)中的前二式。在 z 方向取一个单位长度, 并注意所有各量都不随 z 而变, 可见该二式成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial A_m} &= \iint f_i u_m dx dy + \int \bar{f}_i u_m ds, \\ \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial B_m} &= \iint f_j v_m dx dy + \int \bar{f}_j v_m ds, \end{aligned} \right\} \quad (11-15)$$

其中的线积分系沿受已知面力的边界进行。与此相应, 在采用伽辽金法时, 只须应用(11-11)中前二式的简化形式。对于平面应变问题, 该二式成为

$$\left. \begin{aligned} \iint \left[\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 u \right) + f_x \right] u_m dx dy &= 0, \\ \iint \left[\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 v \right) + f_y \right] v_m dx dy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11-16)$$

其中 $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, 对于平面应力问题, 须将上式中的 E 换为 $\frac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2}$, μ 换为

$\frac{\mu}{1+\mu}$, 这样就得到

$$\left. \begin{aligned} \iint \left[\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f_x \right] u_m dx dy &= 0, \\ \iint \left[\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + f_y \right] v_m dx dy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11-17)$$

作为例题, 设有宽度为 a 而高度为 b 的薄板, 图 11-2, 左边及下边受连杆支承, 右边及上边分别受有均布压力 q_1 及 q_2 , 不计体力, 试求薄板的位移。

取坐标轴如图所示。按照表达式 (11-14) 的形式, 把位移分量设定为

$$\left. \begin{aligned} u &= x(A_1 + A_2 x + A_3 y + \dots), \\ v &= y(B_1 + B_2 x + B_3 y + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

不论各个系数如何取值, 都可以满足左边及下边的位移边界条件, 即

$$(u)_{x=0} = 0, \quad (v)_{y=0} = 0.$$

在这里, 因为边界上并没有不等于零的已知位移, 所以在 (11-14) 式中取 $u_0 = 0$, $v_0 = 0$

当式 (a) 中的系数取任意数值时, 应力边界条件不一定能满足, 因此, 只能用单茨法求解, 而不能用伽辽金法求解。现在, 试在式 (a) 中只取 A_1 及 B_1 两个待定系数, 也就是取

$$u = A_1 u_1 = A_1 x, \quad v = B_1 v_1 = B_1 y. \quad (b)$$

代入 (11-13) 式, 得到

$$V_e = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b [A_1^2 + B_1^2 + 2\mu A_1 B_1] dx dy,$$

进行积分以后, 得到

$$V_e = \frac{Eab}{2(1-\mu^2)} (A_1^2 + B_1^2 + 2\mu A_1 B_1). \quad (c)$$

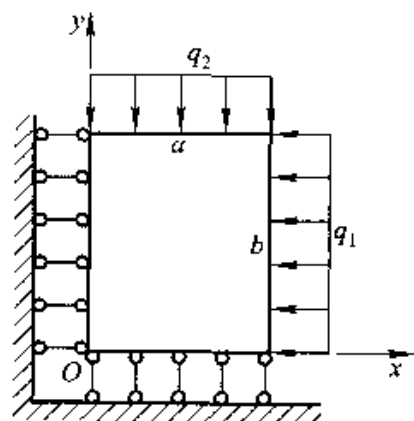


图 11-2

因为在这里 $f_x = f_y = 0$, 而 $m = 1$, 所以(11-15)式简化为

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial A_1} = \int \bar{f}_x u_1 ds, \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial B_1} = \int \bar{f}_y v_1 ds. \quad (d)$$

在薄板的右边界有

$$\bar{f}_x = -q_1, \quad u_1 = x = a, \quad ds = dy,$$

从而有

$$\int \bar{f}_x u_1 ds = \int_0^b (-q_1) a dy = -q_1 ab;$$

在薄板的上边界有

$$\bar{f}_y = -q_2, \quad v_1 = y = b, \quad ds = dx,$$

从而有

$$\int \bar{f}_y v_1 ds = \int_0^a (-q_2) b dx = -q_2 ab.$$

于是由式(d)得

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial A_1} = -q_1 ab, \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial B_1} = -q_2 ab. \quad (e)$$

将式(e)代入式(c), 得出决定 A_1 及 B_1 的方程

$$\frac{Eab}{2(1-\mu^2)}(2A_1 + 2\mu B_1) = -q_1 ab,$$

$$\frac{Eab}{2(1-\mu^2)}(2B_1 + 2\mu A_1) = -q_2 ab.$$

求解 A_1 及 B_1 , 得到

$$A_1 = -\frac{q_1 - \mu q_2}{E}, \quad B_1 = -\frac{q_2 - \mu q_1}{E}, \quad (f)$$

从而由式(b)得到位移分量的解答

$$u = -\frac{q_1 - \mu q_2}{E}x, \quad v = -\frac{q_2 - \mu q_1}{E}y. \quad (g)$$

如果在式(a)中除了 A_1 及 B_1 以外再取一些其他的待定系数, 例如 A_2 及 B_2 等等, 进行与上相似的计算, 可见这些系数都将等于零, 而 A_1 及 B_1 仍然如式(f)表示, 从而可见, 位移分量的解答仍然如式(g)所示。

读者试证: 按照几何方程及物理方程由位移分量(g)求出的应力分量, 可以满足平衡微分方程和应力边界条件。这就是说, 式(g)所示的位移分量就是精确解答。当然, 这只是一个非常特殊的情况。在一般的情况下, 如果在设定的位移分量表达式中只取少数几个待定系数, 是不可能求得精确解答的。

作为另一个例题, 设有宽度为 $2a$ 而高度为 b 的矩形薄板, 图 11-3, 左右两边及下边均被固定, 而上边的位移给定为

$$u = 0, \quad v = -\eta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \quad (\text{h})$$

不计体力，试求薄板的位移和应力。

取坐标轴如图所示。按照(11-14)式，取 $m = 1$ ，把位移分量设定为

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ v &= -\eta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{y}{b} + B_1 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{aligned} \right\} (\text{i})$$

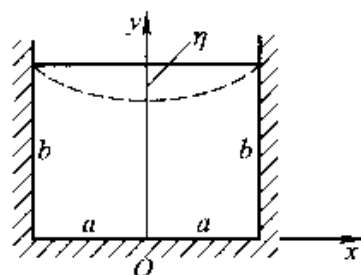


图 11-3

可以满足位移边界条件，即

$$\begin{aligned} (u)_{x=\pm a} &= 0, & (v)_{x=\pm a} &= 0, \\ (u)_{y=0} &= 0, & (v)_{y=0} &= 0, \\ (u)_{y=b} &= 0, & (v)_{y=b} &= -\eta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \end{aligned}$$

此外，由于 u 是 x 的奇函数而 v 是 x 的偶函数，对称条件也是满足的（这就是在 u 的表达式中放置因子 x/a 的理由）。

在这一问题中，并没有应力边界条件，因此可以认为，式(i)所示的位移既然满足了位移边界条件，也就满足了全部边界条件。这就可以应用伽辽金法求解，使数学运算比较简单一些。

注意 $f_x = f_y = 0$ 而 $m = 1$ ，可见方程(11-17)在这里成为

$$\left. \begin{aligned} \int_{-a}^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) u_1 dx dy &= 0, \\ \int_{-a}^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) v_1 dx dy &= 0. \end{aligned} \right\} (\text{j})$$

现在，按照式(i)，求出位移分量的各个二阶导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{6A_1}{a^2} \frac{x}{a} \left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{2A_1}{b^2} \left(\frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{A_1}{ab} \left(1 - 3 \frac{x^2}{a^2} \right) \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{2\eta}{a^2} \frac{y}{b} - \frac{2B_1}{a^2} \left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -\frac{2B_1}{b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{2\eta}{ab} \frac{x}{a} - \frac{2B_1}{ab} \frac{x}{a} \left(1 - 2 \frac{y}{b}\right).$$

另一方面, 由式(i)可见有

$$u_1 = \left(\frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3}\right) \left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$v_1 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right);$$

将上列各个二阶导数以及 u_1 和 v_1 的表达式代入式(j), 进行积分以后, 得到 A_1 及 B_1 的两个线性方程, 从而求得

$$A_1 = \frac{35(1+\mu)\eta}{42 \frac{b}{a} + 20(1-\mu) \frac{a}{b}},$$

$$B_1 = \frac{5(1-\mu)\eta}{16 \frac{a^2}{b^2} + 2(1-\mu)}.$$

代入式(i), 即得位移分量的解答

$$u = \frac{35(1+\mu)\eta}{42 \frac{b}{a} + 20(1-\mu) \frac{a}{b}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

$$v = -\eta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{y}{b} + \frac{5(1-\mu)\eta}{16 \frac{a^2}{b^2} + 2(1-\mu)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

当 $b=a$ 而 $\mu=0.2$ 时, 上列解答成为

$$u = 0.724\eta \left(\frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3}\right) \left(\frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^2}\right),$$

$$v = -\eta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(0.773 \frac{y}{a} + 0.227 \frac{y^2}{a^2}\right).$$

应用几何方程及物理方程, 可由上式求得应力分量

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{E\eta}{a} \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(0.161 - 0.095 \frac{y}{a}\right) - 0.754 \left(1 - 3 \frac{x^2}{a^2}\right) \left(\frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^2}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{E\eta}{a} \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(0.805 + 0.473 \frac{y}{a}\right) - 0.302 \left(1 - 3 \frac{x^2}{a^2}\right) \left(\frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^2}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{E\eta}{a} \left[\frac{x}{a} \left(0.644 \frac{y}{a} + 0.189 \frac{y^2}{a^2} \right) + 0.302 \left(\frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} \right) \left(1 - 2 \frac{y}{a} \right) \right].\end{aligned}$$

在 $y=b=a$ 处, 相应的面力为

$$\begin{aligned}\bar{f}_x &= (\sigma_x)_{y=a} = -1.278 \frac{E\eta}{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \\ \bar{f}_y &= (\tau_{xy})_{y=a} = \frac{E\eta}{a} \left(0.531 \frac{x}{a} + 0.302 \frac{x^3}{a^3} \right).\end{aligned}$$

这就是为了维持薄板边界 $y=b$ 的给定位移而需要在该边界上施加的面力。

§ 11-5 应力变分方程

设有任一弹性体, 在外力的作用下处于平衡。命 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} 为实际存在的应力分量, 它们满足平衡微分方程和应力边界条件, 也满足相容方程, 其相应的位移还满足位移边界条件。现在, 假想体力和应力边界条件上给定的面力不变而应力分量发生了微小的改变 $\delta\sigma_x$ 、 \dots 、 $\delta\tau_{yz}$ 、 \dots , 即所谓虚应力或应力的变分, 使应力分量成为

$$\sigma'_x = \sigma_x + \delta\sigma_x, \dots, \quad \tau'_{yz} = \tau_{yz} + \delta\tau_{yz}, \dots$$

假定 σ'_x 、 \dots 、 τ'_{yz} 、 \dots 只满足平衡微分方程和应力边界条件, 试考察能量方面将发生什么改变。

既然两组应力分量都满足同样体力和面力作用下的平衡微分方程和应力边界条件, 应力分量的变分必然满足无体力时的平衡微分方程, 即

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \delta\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta\tau_{xz} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \delta\sigma_y + \frac{\partial}{\partial z} \delta\tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial x} \delta\tau_{xy} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \delta\sigma_z + \frac{\partial}{\partial x} \delta\tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \delta\tau_{yz} &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (\text{a})$$

并满足无面力时的应力边界条件, 即

$$\left. \begin{aligned}l(\delta\sigma_x)_s + m(\delta\tau_{xy})_s + n(\delta\tau_{xz})_s &= 0, \\ m(\delta\sigma_y)_s + n(\delta\tau_{yz})_s + l(\delta\tau_{xy})_s &= 0, \\ n(\delta\sigma_z)_s + l(\delta\tau_{zx})_s + m(\delta\tau_{yz})_s &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (\text{b})$$

同时, 在位移给定的边界上(面力不可能给定), 应力分量的变分必然伴随着面力分量的变分 $\delta\bar{f}_x$ 、 $\delta\bar{f}_y$ 、 $\delta\bar{f}_z$ 。根据应力边界条件的要求, 应力分量的变分在边

界上必须满足

$$\left. \begin{aligned} l\delta\sigma_x + m\delta\tau_{xy} + n\delta\tau_{xz} &= \delta\bar{f}_x, \\ m\delta\sigma_y + n\delta\tau_{yz} + l\delta\tau_{xy} &= \delta\bar{f}_y, \\ n\delta\sigma_z + l\delta\tau_{xz} + m\delta\tau_{yz} &= \delta\bar{f}_z. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

由于应力分量的变分，应变余能必有相应的变分。把应变余能看做应力分量的函数，则应变余能的变分应为

$$\delta V_c = \iiint \delta v_c dx dy dz = \iiint \left(\frac{\partial v_c}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \cdots + \frac{\partial v_c}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} + \cdots \right) dx dy dz.$$

将(11-5)式代入，得

$$\delta V_c = \iiint (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \cdots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \cdots) dx dy dz.$$

再将几何方程(8-9)代入，得

$$\delta V_c = \iiint \left[\frac{\partial u}{\partial x} \delta \sigma_x + \cdots + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta \tau_{xy} + \cdots \right] dx dy dz.$$

对上式右边的各项进行和 § 11-2 中同样的处理，例如

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial x} \delta \sigma_x dx dy dz = \iint lu \delta \sigma_x dS - \iiint u \frac{\partial}{\partial x} (\delta \sigma_x) dx dy dz.$$

最后可得

$$\begin{aligned} \delta V_c = & \iint [u(l\delta\sigma_x + m\delta\tau_{xy} + n\delta\tau_{xz}) + \cdots] dS - \\ & \iiint \left[u \left(\frac{\partial}{\partial x} \delta \sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta \tau_{xz} \right) + \cdots \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

再将式(a)、(b)及(c)代入，即得

$$\delta V_c = \iint (u\delta\bar{f}_x + v\delta\bar{f}_y + w\delta\bar{f}_z) dS, \quad (11-18)$$

这就是所谓应力变分方程，有的文献把它叫做卡斯蒂利亚诺变分方程。这方程的右边的积分在给定位移的边界上进行，它代表面力的变分在实际给定的位移（即 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} ）上所做的功。由此可见，由于应力的变分，应变余能的变分等于面力的变分在实际位移上所做的功。

如上所述，如果在某一部分边界上，面力是给定的，则该部分边界上的面力不能有变分，于是 $\delta\bar{f}_x = \delta\bar{f}_y = \delta\bar{f}_z = 0$ ，而(11-18)式右边的相应积分项成为零；如果在某一部分边界上，给定的位移等于零，则(11-18)式右边的相应积分项也成为零。因此，应力变分方程(11-18)右边的积分，只须在这样的边界上进行：面力没有给定，而给定的位移又不等于零。

从应力变分方程(11-18)出发，可以推出弹性力学中的另一个原理，即所

谓最小余能原理。将方程(11-18)改写为

$$\delta V_0 - \iint (u\delta\bar{f}_1 + v\delta\bar{f}_2 + w\delta\bar{f}_3) dS = 0. \quad (d)$$

注意, 在需要积分的边界上, 位移是给定的, 在变分过程中保持不变, 所以上式可以改写为

$$\delta \left[V_0 - \iint (u\bar{f}_1 + v\bar{f}_2 + w\bar{f}_3) dS \right] = 0. \quad (e)$$

式(e)中方括号内的表达式代表弹性体的总余能。于是可见, 在满足平衡微分方程和应力边界条件的所有各组应力中间, 实际存在的一组应力应使弹性体的总余能成为极值。如果考虑二阶变分, 则得到 $\delta^2 V_0 \geq 0$, 就可以证明这个极值是极小值, 所以上述结论称为最小余能原理。

以前看到, 实际存在的应力, 除了满足平衡微分方程和应力边界条件以外, 还应当满足相容方程, 以及相应的位移满足位移边界条件。现在又看到, 实际存在的应力, 除了满足平衡微分方程和应力边界条件以外, 还满足应力变分方程。而且, 通过运算, 还可以从应力变分方程导出相容条件。于是可见, 应力变分方程可以代替相容条件及位移边界条件。

当然, 以上所述只限于单连体。在应力变分方程中考虑多连体的位移单值条件, 是非常复杂的问题。

§ 11-6 应力变分法

上一节中导出的应力变分方程, 给弹性力学问题提供这样一个近似解法: 设定应力分量的表达式, 使其满足平衡微分方程和应力边界条件, 但其中包含若干个待定系数, 然后利用应力变分方程决定这些系数。

巴博考维奇建议, 取应力分量的表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\sigma_x)_0 + \sum_m A_m (\sigma_x)_m, \\ \sigma_y &= (\sigma_y)_0 + \sum_m A_m (\sigma_y)_m, \\ \sigma_z &= (\sigma_z)_0 + \sum_m A_m (\sigma_z)_m, \\ \tau_{yz} &= (\tau_{yz})_0 + \sum_m A_m (\tau_{yz})_m, \\ \tau_{zx} &= (\tau_{zx})_0 + \sum_m A_m (\tau_{zx})_m, \\ \tau_{xy} &= (\tau_{xy})_0 + \sum_m A_m (\tau_{xy})_m, \end{aligned} \right\} \quad (11-19)$$

其中 A_m 是互不依赖的 m 个系数, $(\sigma_x)_0, \dots, (\tau_{xz})_0, \dots$ 是满足平衡微分方程和应力边界条件的设定函数, $(\sigma_x)_m, \dots, (\tau_{xz})_m, \dots$ 是满足“没有体力和面力作用时的平衡微分方程和应力边界条件”的设定函数。这样, 不论系数 A_m 如何取值, $\sigma_x, \dots, \tau_{xz}, \dots$ 总能满足平衡微分方程和应力边界条件。注意: 应力的变分只是由系数 A_m 的变分来实现, 至于各个设定函数, 则仅随坐标而变, 与应力的变分完全无关。

如果在弹性体的每一部分边界上, 不是面力被给定, 便是位移等于零, 则由应力变分方程(11-18)得 $\delta V_c = 0$, 即

$$\frac{\partial V_c}{\partial A_m} = 0. \quad (11-20)$$

由公式(11-4)及表达式(11-19)可见, 应变余能 V_c 是 A_m 的二次函数, 因而方程(11-20)将是 A_m 的一次方程。这样的方程共有 m 个, 恰好可以用来求解系数 A_m , 从而由表达式(11-19)求得应力分量。

如果在某一部分边界上, 位移是给定的, 但并不等于零, 则在这一部分边界上须直接应用变分方程(11-18), 即

$$\delta V_c = \iint (u \delta \bar{f}_x + v \delta \bar{f}_y + w \delta \bar{f}_z) dS, \quad (a)$$

在这里, u, v, w 是已知的, 积分只包括该部分边界, 而在该部分边界上, 面力的变分与应力的变分两者之间的关系如前一节中的式(c)所示, 即

$$\left. \begin{aligned} \delta \bar{f}_x &= l \delta \sigma_x + m \delta \tau_{xy} + n \delta \tau_{xz}, \\ \delta \bar{f}_y &= m \delta \sigma_y + n \delta \tau_{yz} + l \delta \tau_{xy}, \\ \delta \bar{f}_z &= n \delta \sigma_z + l \delta \tau_{zx} + m \delta \tau_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将表达式(11-19)代入, 用来计算式(a)右边的积分, 将得出如下的结果:

$$\iint (u \delta \bar{f}_x + v \delta \bar{f}_y + w \delta \bar{f}_z) dS = \sum_m B_m \delta A_m, \quad (c)$$

其中 B_m 是常数。另一方面, 我们有

$$\delta V_c = \sum_m \frac{\partial U^*}{\partial A_m} \delta A_m. \quad (d)$$

将式(c)及式(d)代入式(a), 注意各个 A_m 是互不相关的, 就得出如下的方程:

$$\frac{\partial V_c}{\partial A_m} = B_m. \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (e)$$

这仍然是 A_m 的一次方程, 而且总共有 m 个, 仍然可以用来求解系数 A_m , 从

而由表达式(11-19)求得应力。

当然, 如果没有位移被给定而又不等于零的边界, 则所有的 B_n 都等于零, 而式(e)简化为(11-20)式。

在应用应力变分法时, 要使设定的应力分量既满足应力边界条件, 又满足平衡微分方程, 这往往是很困难的。但是, 在某些类型的问题中存在着应力函数, 而且用应力函数表示的应力分量又能满足平衡微分方程。这时, 我们就只须设定应力函数的表达式, 使它给出的应力分量能满足应力边界条件, 困难就大大减少了。

§ 11-7 应力变分法应用于平面问题

在第二章中已经证明: 在平面问题中, 如果体力分量 f_x 和 f_y 是常量, 就存在着应力函数。现在, 按照(2-26)式, 把应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 用应力函数 Φ 表示成为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (a)$$

在应用应力变分法时, 可以把应力函数 Φ 设定为

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_m A_m \Phi_m \quad (11-21)$$

其中 A_m 为互不依赖的 m 个系数。这样就只须使 Φ_0 给出的应力分量满足实际的应力边界条件, 并使 Φ_m 给出的应力分量满足无面力时的应力边界条件。

在平面应力问题中, 有 $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, 而且 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 不随坐标 z 而变。在 z 方向取一个单位厚度, 则用应力分量表示的应变余能表达式(11-4)简化为

$$V_c = \frac{1}{2E} \iint [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2] dx dy \quad (11-22)$$

对于平面应变问题, 按照 § 2-6 中所述, 须将上式中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$, 这样就得到

$$V_c = \frac{1+\mu}{2E} \iint [(1-\mu)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2\tau_{xy}^2] dx dy \quad (11-23)$$

如果所考虑的弹性体是单连体, 体力为常量, 而且问题是应力边界问题, 则按照 § 2-11 中所述, 应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 应当与 μ 无关。这时, 为了计算方

便, 可以取 $\mu = 0$, 于是平面应力情况下的表达式(11-22)和平面应变情况下的表达式(11-23)都简化为

$$V_c = \frac{1}{2E} \iint (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\tau_{xy}^2) dx dy.$$

将式(a)代入, 即得用应力函数表示应变余能的表达式

$$V_c = \frac{1}{2E} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (11-24)$$

在应力边界问题中, 因为面力不能有变分, 所以方程(11-18)简化为

$$\delta V_c = 0.$$

另一方面, 因为应力分量以及应变余能的变分是通过系数 A_m 的变分来实现的, 所以上式归结为

$$\frac{\partial V_c}{\partial A_m} = 0.$$

将(11-24)式代入, 即得

$$\begin{aligned} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \right) \frac{\partial}{\partial A_m} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \right) \frac{\partial}{\partial A_m} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + \right. \\ \left. 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial A_m} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy = 0, \quad (11-25) \\ (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

可以用来决定系数 A_m 。

作为例题, 设有矩形薄板或长柱, 体力不计, 在两对边上受有按抛物线分布的拉力, 其最大集度为 q , 图 11-4。在这里, 边界条件是

$$(\sigma_x)_{x=+a} = q \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (\tau_{xy})_{x=+a} = 0,$$

$$(\sigma_x)_{x=-a} = 0, \quad (\tau_{xy})_{x=-a} = 0.$$

取表达式(11-21)中的 Φ_0 为

$$\Phi_0 = \frac{q}{2} y^2 \left(1 - \frac{y^2}{6b^2} \right),$$

则

$$(\sigma_x)_0 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} = q \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

$$(\sigma_y)_0 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = 0, \quad (\tau_{xy})_0 = -\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = 0,$$

可以满足边界条件。

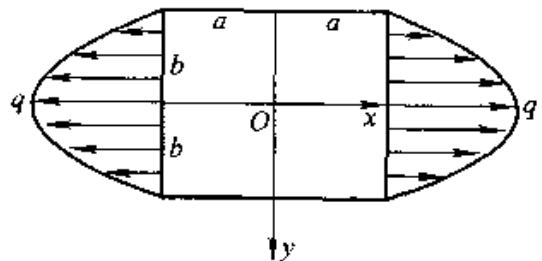


图 11-4

为了使得 Φ_m 所对应的应力能满足无面力时的边界条件, 取 Φ_m 具有因子 $(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2$, 或 $\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2$, 以使 Φ_m 对 y 的二阶导数在 $x = \pm a$ 的两对边上成为零, Φ_m 对 x 的二阶导数在 $y = \pm b$ 的两对边上成为零, Φ_m 对 x 及 y 各一阶的二阶导数在所有四边上成为零。因此, 取

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0 + \sum_m A_m \Phi_m = & \frac{q}{2} y^2 \left(1 - \frac{y^2}{6b^2}\right) + \\ & qb^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \left[A_1 + A_2 \frac{x^2}{a^2} + A_3 \frac{y^2}{b^2} + \right. \\ & \left. A_4 \frac{x^4}{a^4} + A_5 \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} + A_6 \frac{y^4}{b^4} + \dots \right] \end{aligned} \quad (b)$$

在这里, 因为应力分布应当对称于 x 轴及 y 轴, 所以在级数中只取 x 和 y 的偶次幂。为了使得 A_1, A_2 等等系数成为无因次的, 所以布置了因子 $qb^2, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$, 等等。

首先, 只在式(b)中取一个待定系数 A_1 , 也就是取

$$\Phi = \frac{q}{2} y^2 \left(1 - \frac{y^2}{6b^2}\right) + A_1 qb^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \quad (c)$$

注意 Φ 是 x 及 y 的偶函数, 可见公式(11-25)成为

$$4 \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy = 0。$$

将式(c)代入, 进行积分, 简化以后, 得

$$\left(\frac{64}{7} + \frac{256 b^2}{49 a^2} + \frac{64 b^4}{7 a^4} \right) A_1 = 1。$$

对于正方形的薄板或正方形截面的长柱, 命 $\frac{b}{a} = 1$, 得

$$A_1 = 0.0425。$$

代入式(c), 命 $b = a$, 再求应力分量, 得

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = q \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) - 0.170q \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{3y^2}{a^2}\right),$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -0.170q \left(1 - \frac{3x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -0.681q \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \frac{xy}{a^2}。$$

在薄板或长柱的中心, $x = y = 0$, 得到 $\sigma_x = 0.830q$ 。

为了求得较精确的应力数值, 现在, 在式(b)中取三个系数 A_1, A_2, A_3 ,

也就是取

$$\Phi = \frac{q}{2}y^2\left(1 - \frac{y^2}{6b^2}\right) + qb^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2\left(A_1 + A_2\frac{y^2}{a^2} + A_3\frac{y^4}{b^2}\right), \quad (d)$$

进行与上相同的运算, 得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{64}{7} + \frac{256b^2}{49a^2} + \frac{64b^4}{7a^4}\right)A_1 + \left(\frac{64}{77} + \frac{64b^4}{49a^4}\right)A_2 + \left(\frac{64}{49} + \frac{64b^4}{77a^4}\right)A_3 &= 1, \\ \left(\frac{64}{11} + \frac{64b^4}{7a^4}\right)A_1 + \left(\frac{192}{143} + \frac{256b^2}{77a^2} + \frac{192b^4}{7a^4}\right)A_2 + \left(\frac{64}{77} + \frac{64b^4}{77a^4}\right)A_3 &= 1, \\ \left(\frac{64}{7} + \frac{64b^4}{11a^4}\right)A_1 + \left(\frac{64}{77} + \frac{64b^4}{77a^4}\right)A_2 + \left(\frac{192}{7} + \frac{256b^2}{77a^2} + \frac{192b^4}{143a^4}\right)A_3 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

对于正方形薄板或正方形截面的长柱, $\frac{b}{a} = 1$, 由方程(e)得

$$A_1 = 0.040405, \quad A_2 = A_3 = 0.011716.$$

由此得 $x=0$ 的截面上的 σ_x 为

$$(\sigma_x)_{x=0} = q\left(0.862 - 0.796\frac{y^2}{a^2} + 0.352\frac{y^4}{a^4}\right).$$

在薄板或长柱的中心, $y=0$, 得到 $\sigma_x = 0.862q$.

当式(b)中不取待定系数、取一个待定系数及取三个待定系数时, 在薄板或长柱中心的 σ_x 分别为 $1.000q$ 、 $0.830q$ 及 $0.862q$ 。可见计算的收敛较快。估计精确数值约在 $0.860q$ 左右。

当比值 $\frac{b}{a}$ 逐渐减小时, $x=0$ 的截面上的正应力逐渐趋于均匀。例如, 命 $\frac{b}{a} = 0.5$, 则由联立方程(e)得

$$A_1 = 0.0798, \quad A_2 = 0.1250, \quad A_3 = 0.0183.$$

在 $x=0$ 的截面上, 正应力分布如下:

y	0	0.2b	0.4b	0.6b	0.8b	1.0b
σ_x	0.690q	0.684q	0.669q	0.653q	0.649q	0.675q

可见, σ_x 的各个数值都很接近平均应力 $2q/3$, 这可以作为圣维南原理的一个验证。

§ 11-8 应力变分法应用于扭转问题

在等截面直杆的扭转问题中, 也存在着应力函数。按照 § 10-1 中所述,

横截面上的切应力(扭应力)可以表示成为

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

其中的 $\Phi = \Phi(x, y)$ 是普朗特应力函数, 而其他的应力分量都等于零。于是, 用应力分量表示的应变余能表达式(11-4)成为

$$V_c = \frac{1+\mu}{E} \iiint \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

用 $\frac{1}{2G}$ 代替 $\frac{1+\mu}{E}$, 并注意 Φ 只是 x 和 y 的函数, 不随 z 变化, 则由上式得到

$$V_c = \frac{L}{2G} \iint \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

其中 L 为扭杆的长度, 而积分只须在横截面上进行。于是, 应变余能的变分成为

$$\delta V_c = \frac{L}{2G} \delta \iint \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (a)$$

为了建立扭转问题的变分方程, 需要计算面力在位移上的功。在扭杆的侧面上, 没有面力作用, 因而没有什么面力的功。在扭杆的两端, 面力合成为方向相反的两个扭矩 M , 而两端的相对转角为 KL , 其中 K 为扭杆单位长度的扭角, 因此, 面力在位移上的功就等于 MKL , 并由公式(10-5)可见其等于 $2KL \iint \Phi dx dy$ 。于是我们有

$$\iint (u \bar{f}_x + v \bar{f}_y + w \bar{f}_z) dS = 2KL \iint \Phi dx dy,$$

从而有

$$\iint (u \delta \bar{f}_x + v \delta \bar{f}_y + w \delta \bar{f}_z) dS = 2KL \delta \iint \Phi dx dy. \quad (b)$$

将式(a)及式(b)代入应力变分方程(11-18), 得到

$$\frac{L}{2G} \delta \iint \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 2KL \delta \iint \Phi dx dy,$$

或

$$\delta \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2GK\Phi \right\} dx dy = 0. \quad (c)$$

这就是扭转问题中适用的变分方程。

在计算实际问题时, 可将应力函数 Φ 设定为

$$\Phi = \sum_m A_m \Phi_m,$$

其中 A_m 为互不依赖的 m 个系数。为了使得应力函数 Φ 满足边界条件, 即, Φ 在横截面的边界上等于零, 只须使设定的函数 Φ_m 都在横截面的边界上等于零。

现在, 因为应力分量以及应变余能的变分是通过系数 A_m 的变分来实现的, 所以式(c)归结为

$$\frac{\partial}{\partial A_m} \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2GK\Phi \right\} dx dy = 0.$$

求导以后, 即得

$$\iint \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial A_m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial A_m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - 2GK \frac{\partial \Phi}{\partial A_m} \right] dx dy = 0, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (11-26)$$

可以用来决定系数 A_m 。

试以矩形截面的扭杆为例, 图 10-4。四根边界直线的方程是

$$x + \frac{a}{2} = 0, \quad x - \frac{a}{2} = 0, \quad y + \frac{b}{2} = 0, \quad y - \frac{b}{2} = 0.$$

因此, 为了满足边界条件, 可以取

$$\begin{aligned} \Phi &= \left(x + \frac{a}{2} \right) \left(x - \frac{a}{2} \right) \left(y + \frac{b}{2} \right) \left(y - \frac{b}{2} \right) \sum A_{mn} x^m y^n \\ &= \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \sum A_{mn} x^m y^n. \end{aligned} \quad (d)$$

根据薄膜比拟, 应力函数 Φ 应为 x 及 y 的偶函数, 所以上式中的 m 及 n 都只须取为偶数。

对于正方形截面的扭杆 ($b = a$), 如果在式(d)中只取一项 ($m = n = 0$) 则有

$$\Phi = A_{00} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right).$$

代入(11-26)式, 得到

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[A_{00} 2x \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right) 2x \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right) + A_{00} 2y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) 2y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) - \right. \\ &\quad \left. 2GK \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right) \right] dx dy = 0. \end{aligned}$$

运算以后, 得到 $A_{00} = \frac{5GK}{2a^2}$, 从而得到

$$\Phi = \frac{5GK}{2a^2} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right). \quad (e)$$

公式(10-5)给出

$$M = 2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Phi dx dy = \frac{5}{36} GK a^4,$$

由此得

$$K = \frac{36M}{5Ga^4}.$$

按照(10-21)式, 系数 $\beta = \frac{5}{36} = 0.139$, 比精确值 0.141 小了 1.4%。将求出的 K 代入式(e), 然后求出应力分量, 可见最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{9M}{2a^3}$$

按照(10-22)式, 系数 $\beta_1 = \frac{2}{9} = 0.222$, 比精确值 0.208 大出 6.8%。

如果在式(d)中取三项, 则有

$$\Phi = \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \left(y^2 - \frac{a^2}{4}\right) (A_{00} + A_{20}x^2 + A_{02}y^2)$$

进行与上相同的运算, 得到

$$A_{00} = \frac{1}{554} \frac{295GK}{a^2}, \quad A_{20} = A_{02} = \frac{525GK}{277a^4}$$

由此算出的扭角 K 比精确值只小了 0.14%, 最大切应力 τ_{\max} 比精确值只大出 4%。

§ 11-9 解答的唯一性

对于一个弹性力学问题, 我们可能是按应力求解或是按位移求解; 在采用半逆解法时, 可能从不同的假设出发。我们还可能采用这种或那种数值解法。这样会不会导致不同的解答呢? 解答的唯一性对此给出否定的回答。

为了证明解答的唯一性, 我们假设, 相应于一定的体力和一定的边界条件, 某一弹性力学问题有了两组解答: 一组解答中的应力分量、形变分量及位移分量为

$$\sigma'_x, \dots, \varepsilon'_x, \dots, u', v', w',$$

而另一组解答中的各个分量为

$$\sigma''_x, \dots, \varepsilon''_x, \dots, u'', v'', w''。$$

现在来考察, 这两组解答是否相同。

第一组解答应当满足平衡微分方程(8-1), 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma'_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{xz} + f_x &= 0, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

在面力已知的边界上, 它应当满足应力边界条件(8-5), 即

$$\begin{aligned} l(\sigma'_{xx}) + m(\tau'_{xy}) + n(\tau'_{xz}) &= \bar{f}_x, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

在位移已知的边界上，它应当满足位移边界条件(8-21)，即

$$u'_s = \bar{u}, \quad v'_s = \bar{v}, \quad w'_s = \bar{w}_c$$

同样，第二组解答应当满足

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma''_x + \frac{\partial}{\partial y} \tau''_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau''_{zx} + f_x = 0,$$

.....,

$$l(\sigma''_x)_s + m(\tau''_{yx})_s + n(\tau''_{zx})_s = \bar{f}_x,$$

.....,

$$u''_s = \bar{u}, \quad v''_s = \bar{v}, \quad w''_s = \bar{w}_c$$

将两组解答中对应的方程相减，得到

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma'_x - \sigma''_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau'_{yx} - \tau''_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau'_{zx} - \tau''_{zx}) = 0,$$

.....,

$$l(\sigma'_x - \sigma''_x)_s + m(\tau'_{yx} - \tau''_{yx})_s + n(\tau'_{zx} - \tau''_{zx})_s = 0,$$

.....,

$$(u' - u'')_s = 0, \quad (v' - v'')_s = 0, \quad (w' - w'')_s = 0.$$

由上式可见，两组解答之差所对应的状态是：弹性体不受体力作用，而且在边界上不是面力为零就是边界位移为零。于是又可见，当该弹性体进入上述状态时，没有外力做的功，因而该弹性体中的总的形变势能为零，即 $V_s = 0$ 。

在上述状态中，按照 § 11-1 中所述，所有的形变分量都等于零。这就是说，两组解答中对应的形变分量全都相同，从而由物理方程可见，两组解答中对应的应力分量也全都相同。但须指出，如果弹性体不具有充分的位移边界(约束)，则两组解答中对应的位移分量可能不完全相同，而相差以某种刚体位移。

弹性力学问题的解答虽然是唯一的，但可有不同的表达式。同一个问题的解答，由于采用的解法不同，可能是表以不同形式的函数，或者是表以不同的级数。但是，这些不同形式的解答，最终应统一于相同的数值。

§ 11-10 功的互等定理

设同一弹性体在某一状态中所受的体力为 f''_x, f''_y, f''_z ，面力为 $\bar{f}'_x, \bar{f}'_y, \bar{f}'_z$ ，引起的应力、形变、位移为 $\sigma'_x, \dots, \epsilon'_x, \dots, u', v', w'$ ；它在另一状态中所受的体力为 f''_x, f''_y, f''_z ，面力为 $\bar{f}''_x, \bar{f}''_y, \bar{f}''_z$ ，引起的应力、形变、位移为 $\sigma''_x, \dots, \epsilon''_x, \dots, u'', v'', w''$ 。

于是，第一状态中的外力在第二状态中的位移上所做的功为

$$W_{12} = \iiint (f'_x u'' + f'_y v'' + f'_z w'') dx dy dz + \iint (\bar{f}'_x u'' + \bar{f}'_y v'' + \bar{f}'_z w'') dS \quad (a)$$

应用(8-5)式及奥斯特洛格拉斯基公式, 可得

$$\begin{aligned} & \iint (f'_x u'' + \bar{f}'_y v'' + \bar{f}'_z w'') dS \\ &= \iint [(l\sigma'_x + m\tau'_{xy} + n\tau'_{xz}) u'' + (m\sigma'_y + n\tau'_{xy} + l\tau'_{yz}) v'' + \\ & \quad (n\sigma'_z + l\tau'_{xz} + m\tau'_{yz}) w''] dS \\ &= \iiint [\left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma'_x + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{xz} \right) u'' + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma'_y + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{xy} + \frac{\partial}{\partial x} \tau'_{yz} \right) v'' + \\ & \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma'_z + \frac{\partial}{\partial x} \tau'_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{yz} \right) w''] dx dy dz + \iiint \left[\sigma'_x \frac{\partial u''}{\partial x} + \sigma'_y \frac{\partial v''}{\partial y} + \sigma'_z \frac{\partial w''}{\partial z} + \right. \\ & \quad \left. \tau'_{xy} \left(\frac{\partial w''}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial z} \right) + \tau'_{xz} \left(\frac{\partial u''}{\partial z} + \frac{\partial w''}{\partial x} \right) + \tau'_{yz} \left(\frac{\partial v''}{\partial x} + \frac{\partial u''}{\partial y} \right) \right] dx dy dz. \quad (b) \end{aligned}$$

代入式(a), 并应用几何方程(8-9), 得

$$\begin{aligned} W_{12} = & \iiint \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma'_x + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{xz} + f'_x \right) u'' + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma'_y + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{xy} + \frac{\partial}{\partial x} \tau'_{yz} + f'_y \right) v'' + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma'_z + \frac{\partial}{\partial x} \tau'_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{yz} + f'_z \right) w'' + \sigma'_x \varepsilon''_x + \sigma'_y \varepsilon''_y + \sigma'_z \varepsilon''_z + \tau'_{xy} \gamma''_{xy} + \right. \\ & \left. \tau'_{xz} \gamma''_{xz} + \tau'_{yz} \gamma''_{yz} \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

再应用平衡微分方程(8-1), 可将上式简化为

$$W_{12} = \iiint (\sigma'_x \varepsilon''_x + \sigma'_y \varepsilon''_y + \sigma'_z \varepsilon''_z + \tau'_{xy} \gamma''_{xy} + \tau'_{xz} \gamma''_{xz} + \tau'_{yz} \gamma''_{yz}) dx dy dz. \quad (c)$$

同样可得第二状态中的外力在第一状态中的位移上所做的功为

$$W_{21} = \iiint (\sigma''_x \varepsilon'_x + \sigma''_y \varepsilon'_y + \sigma''_z \varepsilon'_z + \tau''_{xy} \gamma'_{xy} + \tau''_{xz} \gamma'_{xz} + \tau''_{yz} \gamma'_{yz}) dx dy dz. \quad (d)$$

利用物理方程(8-20), 将式(c)及式(d)中的应力分量都用形变分量表示, 即得

$$\begin{aligned} W_{12} = W_{21} = & \iiint \{ \lambda \theta' \theta'' + G [2(\varepsilon'_x \varepsilon''_x + \varepsilon'_y \varepsilon''_y + \varepsilon'_z \varepsilon''_z) + \\ & (\gamma'_{xy} \gamma''_{xy} + \gamma'_{xz} \gamma''_{xz} + \gamma'_{yz} \gamma''_{yz})] \} dx dy dz, \end{aligned}$$

其中 $\theta' = \varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z$, $\theta'' = \varepsilon''_x + \varepsilon''_y + \varepsilon''_z$. 于是可见, 第一状态中的外力在第二状态中的位移上所做的功, 就等于第二状态中的外力在第一状态中的位移上所做的功。这就是功的互等定理。

应用上述定理, 有时可以非常简便地求得弹性体的某种整体形变。例如, 设有等截面的直杆, 受有两个大小相等而方向相反的横向压力 F_1 , 图11-5a。如要求出杆中各点的应力或形变, 那是比较复杂的。但如所求的只是杆的总伸

长, 则可应用功的互等定理而很简便地得到解答。为此, 把给出的状态当作第一状态, 所求的总伸长为 δ_1 ; 把该杆受轴向拉力 F_2 当作第二状态, 图 11-5b, 算出杆的横向收缩为 $\delta_2 = \mu \frac{F_2 b}{AE}$, 其中 A 为杆的横截面面积。根据功的互等定理, 我们有 $F_1 \delta_2 = F_2 \delta_1$, 即

$$F_1 \mu \frac{F_2 b}{AE} = F_2 \delta_1,$$

从而得出 $\delta_1 = \frac{\mu F_1 b}{AE}$ 。有趣的是, 杆的伸长与杆的截面形状无关, 与杆的长度 l 也无关。

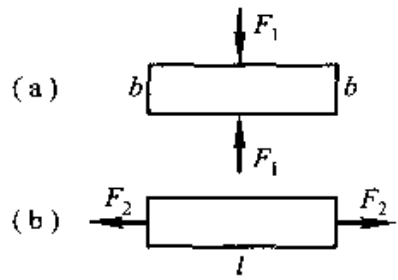


图 11-5

习 题

11-1 铅直平面内的正方形薄板, 边长为 $2a$, 四边固定, 图 11-6, 只受重力的作用。设 $\mu = 0$, 试取位移分量的表达式为

$$u = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \frac{x}{a} \frac{y}{a} \left(A_1 + A_2 \frac{x^2}{a^2} + A_3 \frac{y^2}{a^2} + \dots\right),$$

$$v = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \left(B_1 + B_2 \frac{x^2}{a^2} + B_3 \frac{y^2}{a^2} + \dots\right),$$

用里茨法或伽辽金法求解(在 u 的表达式中, 布置了因子 x 和 y , 因为按照问题的对称条件, u 应为 x 和 y 的奇函数)。

答案: 当只取 A_1 项及 B_1 项时, 得

$$\sigma_x = -\frac{450}{533} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \rho g y.$$

11-2 正方形薄板, 边长为 $2a$, 图 11-7, 在左右两边受有按抛物线分布的拉力, 即

$$(\sigma_x)_{y=\pm a} = q \left(\frac{y}{a}\right)^2.$$

试用应力变分法按如下的应力函数求解:

$$\Phi = \frac{qy^4}{12a^2} + qa^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 \left(A_1 + A_2 \frac{x^2}{a^2} + A_3 \frac{y^2}{a^2} + \dots\right),$$

答案: 当只取 A_1 一项时, 得到

$$(\sigma_x)_{y=0} = q \left(0.170 + 0.490 \frac{y^2}{a^2}\right);$$

当只取 A_1 、 A_2 、 A_3 三项时, 得到

$$(\sigma_x)_{y=0} = q \left(0.138 + 0.796 \frac{y^2}{a^2} - 0.352 \frac{y^4}{a^4}\right);$$

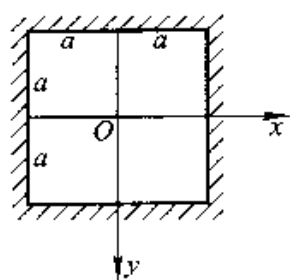


图 11-6

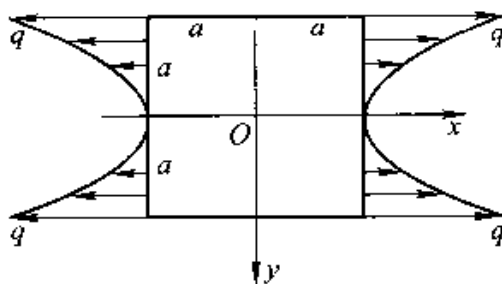


图 11-7

11-3 矩形薄板，三边固定，一边受有均布压力 q ，图 11-8，试用应力变分法按如下的应力函数求解（取 $\mu=0$ ）：

$$\Phi = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qa^2}{2} \left(A_1 \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} + A_2 \frac{y^3}{b^3} \right)$$

答案： $A_1 = -6$, $A_2 = \frac{60}{36 + 160 \frac{a^2}{b^2} + 21 \frac{a^4}{b^4}}$

11-4 扭杆的横截面为一个象限圆，图 11-9。试取

$$\Phi = Axy(a^2 - x^2 - y^2),$$

用变分法求出扭杆每单位长度内的扭角。

答案： $K = \frac{9\pi}{2} \frac{M}{Ga^4}$

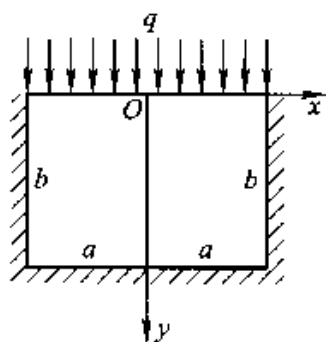


图 11-8

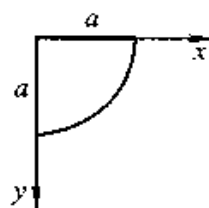


图 11-9

11-5 试用功的互等定理求出图 11-5a 中所示直杆的体积改变。

答案： 减小 $F_1 b(1-2\mu)/E$ 。

参考教材

- [1] Л. С. 列宾逊著. 弹性力学问题的变分法 [M]. 叶开沅, 卢文达译. 北京: 科学出版社, 1958: 第一章, 第二章, 第三章.
- [2] 徐芝纶著. 弹性力学中的差分方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1989: 第二章.

第十二章 弹性波的传播

§ 12-1 弹性体的运动微分方程

在以上的各章中，只讨论了弹性力学的静力问题。假定弹性体的任一微小部分都始终处于静力平衡状态，因而位移、形变、应力都只是位置坐标的函数，不随时间变化。在弹性力学的动力问题中，弹性体的位移、形变、应力一般都随时间变化，因而不仅是位置坐标的函数，而且也是时间的函数。

很明显，只要我们在动力问题中仍然采用理想弹性体的假定和微小位移的假定，那么，以前针对静力问题而建立的物理方程和几何方程，以及把应力分量用位移分量表示的弹性方程，都将适用于动力问题中的任一瞬时，无须加以任何改变。但是，静力问题中的平衡微分方程却须用运动微分方程来代替。

在建立运动微分方程时，除了考虑应力和体力以外，还须考虑弹性体由于具有加速度而应当施加的惯性力。把弹性体中任一点的位移分量仍然用 u 、 v 、 w 代表，则该点的加速度分量为 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 、 $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ 、 $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ 。按照达朗贝尔原理，在弹性体的每单位体积上，应当施加的惯性力分量为

$$-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

其中的 ρ 为弹性体的密度。将上列惯性力分量分别叠加于体力分量 f_x 、 f_y 、 f_z ，则平衡微分方程(8-1)成为如下的运动微分方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

这一组运动微分方程，与几何方程及物理方程联立，就是弹性力学动力问题的

基本方程。

因为运动微分方程中含有位移分量，而位移分量一般都不可能用应力及其导数来表示，所以弹性力学动力问题一般都不宜按应力求解，而宜按位移求解。为了消去式(a)中的应力分量，只须将弹性方程(9-1)代入该式。这样就得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 u \right) + f_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 v \right) + f_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + f_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12-1)$$

方程(12-1)就是按位移求解动力问题时所需用的基本微分方程，在有些文献中称为拉梅方程，其中的 E 、 μ 、 ρ 是已知的常量，体力分量 f_x 、 f_y 、 f_z 是 x 、 y 、 z 、 t 的已知函数，位移分量 u 、 v 、 w 是 x 、 y 、 z 、 t 的未知函数。按照动力问题的初始条件和边界条件由这些方程求出位移分量以后，就可以利用弹性方程(9-1)求得应力分量。

所谓初始条件，就是弹性体的位移分量 u 、 v 、 w 以及速度分量 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 在 $t=0$ 时的已知条件。至于边界条件，则和几何方程或物理方程一样，静力问题中的位移边界条件及应力边界条件都适用于动力问题中的任一瞬时。

在动力问题中，为了避免数学上的很大困难，通常都不计体力。因此，我们在方程(12-1)中删去体力分量 f_x 、 f_y 、 f_z ，移项以后，得出如下形式的运动微分方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\mu)\rho} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 u \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\mu)\rho} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 v \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\mu)\rho} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w \right), \end{aligned} \right\} \quad (12-2)$$

其中

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

§ 12-2 弹性体中的无旋波与等容波

当静力平衡状态下的弹性体受到荷载的作用时，并不是在弹性体的所有各

部分都立即引起位移、形变和应力。在作用开始时，距荷载作用处较远的部分都保持不受干扰。在作用开始后，荷载所引起的位移、形变和应力，就以波动的形式用有限大的速度向别处传播。这种波动就是所谓弹性波。在本节中，我们将介绍无限大弹性体中弹性波的两种基本形式：无旋波与等容波。

首先，假定弹性体中发生的位移 u 、 v 、 w 可以表示成为

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (a)$$

其中 $\psi = \psi(x, y, z, t)$ 是位移的势函数，这种位移称为无旋位移。为了说明“无旋”的意义，试考察表达式

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (b)$$

在弹性体的任意一点， $\frac{\partial v}{\partial x}$ 是 x 方向的线段绕 z 轴的旋转角，而 $-\frac{\partial u}{\partial y}$ 是 y 方向的线段绕 z 轴的旋转角，所以 θ_z 是这两个旋转角的平均值，可以表征弹性体在该点的、绕 z 轴的旋转量。同样，

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (c)$$

两者可以分别表征弹性体在该点绕 x 轴及 y 轴的旋转量。现在，将式 (a) 代入式 (b) 及式 (c)，可见旋转量 θ_x 、 θ_y 、 θ_z 都等于零。因此，式 (a) 所示的位移称为无旋位移，而相应于这种位移状态的弹性波就称为无旋波。

在式 (a) 所示的无旋位移状态之下，我们有

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla^2 \psi,$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi = \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 u, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \nabla^2 v, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \nabla^2 w. \end{aligned}$$

一并代入运动微分方程 (12-2)，简化以后，即得无旋波的波动方程如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \nabla^2 u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_1^2 \nabla^2 v, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_1^2 \nabla^2 w, \quad (12-3)$$

其中

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}}, \quad (12-4)$$

其次，假定弹性体中发生的位移 u 、 v 、 w 满足体应变为零的条件，即

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (d)$$

这种位移称为等容位移，因为弹性体中任一部分的容积（即体积）保持不变。相应于这种位移状态的弹性波就称为等容波。将式(d)代入运动微分方程(12-2)，即得等容波的波动方程如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_2^2 \nabla^2 u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 \nabla^2 v, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_2^2 \nabla^2 w, \quad (12-5)$$

其中

$$c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (12-6)$$

无旋波和等容波是弹性波的两种基本形式，它们的波动方程(12-3)和(12-5)具有同样的形式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f. \quad (12-7)$$

对于无旋波，式中的 c 等于 c_1 ，如(12-4)所示；对于等容波，式中的 c 等于 c_2 ，如(12-6)所示。以后将要证明，波动方程(12-7)中的 c 就是弹性波的传播速度（ c_1 就是无旋波的传播速度， c_2 就是等容波的传播速度）。

波动方程(12-7)具有一个很重要的特性，那就是，如果该方程有任意一个特解

$$f = f_0(x, y, z, t),$$

则 f_0 对于 x, y, z, t 等任一变数的偏导数也是该方程的特解，证明如下。

用 ξ 代表 x, y, z, t 等变数之一，则总可以有关系式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla^2 f_0) &= \nabla^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

既然 f_0 是波动方程(12-7)的特解，则由该方程有

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f_0.$$

将上式的两边对 ξ 求导，得到

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \right) = c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla^2 f_0).$$

再将式(e)代入，即得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \xi} \right) = c^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \xi} \right),$$

可见 $\frac{\partial f_0}{\partial \xi}$ 确是波动方程(12-7)的特解。

因为弹性体中的形变分量和应力分量，以及质点的速度分量，都可以用位移分量对于坐标或时间的偏导数来表示，所以由波动方程的上述特性可见，如果弹性体的位移分量满足某一波动方程，而相应的传播速度为 c ，则其形变分量、应力分量和质点速度分量也将满足这一波动方程，而且传播的速度也是 c 。这就表明，在弹性体中，形变、应力、以及质点速度，都将和位移以相同的方式与速度进行传播。

§ 12-3 平面波的传播

如果弹性体在其内部的某一点受到荷载的作用，则荷载所引起的位移、形变和应力，就将以弹性波的形式从该点传播开来。在离开作用点较远之处，弹性波可以当做是平面波。当弹性体的质点运动方向平行于弹性波传播的方向时，该弹性波就称为纵向平面波，简称为纵波；当弹性体的质点运动方向垂直于弹性波的传播方向时，该弹性波就称为横向平面波，简称为横波。

首先来讨论纵波。将 x 轴取在波的传播方向，则弹性体的位移分量可以表示成为

$$u = u(x, t), \quad v = 0, \quad w = 0. \quad (12-8)$$

由此可以得出

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nabla^2 v = 0, \quad \nabla^2 w = 0.$$

代入运动微分方程(12-2)，可见其中的后二式成为恒等式，而第一式成为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (12-9)$$

其中的 c_1 如公式(12-4)所示。微分方程(12-9)的通解是

$$u = u_1 + u_2 = f_1(x - c_1 t) + f_2(x + c_1 t), \quad (12-10)$$

其中的 f_1 和 f_2 是任意函数。下面来说明这个通解的物理意义。

试考察通解(12-10)的第一部分，即

$$u_1 = f_1(x - c_1 t). \quad (a)$$

对于任一瞬时 t ， u_1 只是 x 的函数，可以用图 12-1 中的曲线 ABC 来表示，而该曲线的形状取决于函数 f_1 。在 Δt 时间以后， $x - c_1 t$ 将成为 $x - c_1(t + \Delta t)$ ， u_1 将随着改变数值。但是，如果把坐标 x 也增大 $\Delta x = c_1 \Delta t$ ，则 f_1 的数值保持不变，因而 u_1 保持不变。这就是说，为瞬时 t 所作的曲线 ABC ，只要把它沿 x 方

向移动一个距离 $\Delta x = c_1 \Delta t$ ，如图中的虚线 $A'B'C'$ ，就适用于瞬时 $t + \Delta t$ 。于是可见，通解(12-10)的第一部分 $f_1(x - c_1 t)$ 就表示一个纵波，它沿着 x 方向传播，而它的传播速度等于常量 c_1 。

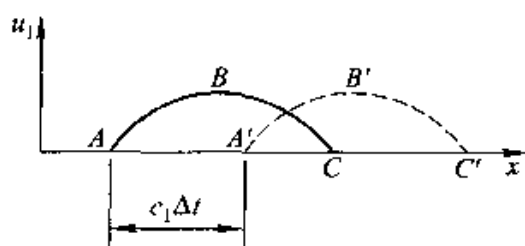


图 12-1

用几何方程(8-9)求出与位移(a)相对应的形变分量，可见 x 方向的线应变为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{df_1(x - c_1 t)}{d(x - c_1 t)} \frac{\partial(x - c_1 t)}{\partial x} = \frac{d}{d\xi} f_1(\xi), \quad (b)$$

其中 $\xi = x - c_1 t$ ，而其余的形变分量都等于零。这就是说，弹性体的每一点都始终处于 x 方向的简单拉压状态。应用物理方程(8-20)，注意在这里有 $\theta = \varepsilon_x$ ，求得正应力分量为

$$\sigma_x = \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \varepsilon_x, \quad (c)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \varepsilon_x,$$

而切应力分量都等于零。各个正应力分量之间有关系式

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_z}{\sigma_x} = \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

与位移(a)相对应，弹性体的质点沿 x 方向的速度分量是

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{df_1(x - c_1 t)}{d(x - c_1 t)} \frac{\partial(x - c_1 t)}{\partial t} \\ &= -c_1 \frac{d}{d\xi} f_1(\xi), \end{aligned} \quad (d)$$

而沿 y 方向及 z 方向的速度分量都等于零。将式(b)代入式(d)，得到

$$\frac{\dot{u}_1}{c_1} = -\varepsilon_x.$$

因为 ε_x 总是很小的数值，所以质点的运动速度 \dot{u}_1 总是远远小于弹性波的传播速度 c_1 。以钢材为例，传播速度 c_1 为几千米每秒，而在钢结构中，质点速度 \dot{u}_1 最大也不过是几米每秒。

与上相似，解答(12-10)中的第二部分，即

$$u_2 = f_2(x + c_1 t),$$

也表示一个纵波，它沿着负 x 方向传播，但它的传播速度也等于常量 c_1 。于是可见，通解(12-10)表示分别沿 x 方向和负 x 方向的两个纵波，它们的传播速度都等于公式(12-4)所示的 c_1 。读者试证，纵波是一种无旋波。

现在来讨论横波。仍然将 x 轴放在波的传播方向, y 轴放在位移的方向, 即横向, 则位移分量可以表示成为

$$u = 0, \quad v = v(x, t), \quad w = 0. \quad (12-11)$$

由此可以得出

$$\theta = 0, \quad \nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \nabla^2 w = 0.$$

代入运动微分方程(12-2), 可见其中的第一式及第三式成为恒等式, 而第二式成为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (12-12)$$

其中的 c_2 如(12-6)式所示。微分方程(12-12)的通解是

$$v = v_1 + v_2 = f_1(x - c_2 t) + f_2(x + c_2 t), \quad (12-13)$$

其中 f_1 和 f_2 是任意函数。

对通解(12-13)中的第一部分

$$v_1 = f_1(x - c_2 t) \quad (e)$$

进行与上相似的分析, 可见 v_1 表示一个横波, 它的位移沿着 y 方向, 它的传播方向是沿着 x 方向, 而传播的速度等于常量 c_2 。

用几何方程(8-9)求出与位移(e)相应的形变分量, 可见

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{d}{d\xi} f_1(\xi), \quad (f)$$

其中 $\xi = x - c_2 t$, 而其余的形变分量都等于零。这就是说, 弹性体的每一点都始终处于 x 及 y 方向的简单剪切状态。应用物理方程(8-20), 求得切应力分量 τ_{xy} 为

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{d}{d\xi} f_1(\xi), \quad (g)$$

而其余的应力分量都等于零。

与位移(e)相对应, 弹性体的质点沿 y 方向的速度分量为

$$\dot{v}_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} = -c_2 \frac{d}{d\xi} f_1(\xi), \quad (h)$$

而沿 x 方向及 z 方向的速度分量都等于零。将式(f)代入式(h), 得到

$$\frac{\dot{v}_1}{c_2} = -\gamma_{xy}.$$

因为 γ_{xy} 总是很小的数值, 所以质点的运动速度 \dot{v}_1 总是远远小于弹性波的传播速度 c_2 。

同样可见, 解答(12-13)中的第二项

$$v_2 = f_2(x + c_2 t)$$

也表示一个横波，它沿着负 x 方向传播，但它的传播速度也等于常量 c_2 。于是可见，通解(12-13)中的 f_1 及 f_2 分别表示沿 x 方向及负 x 方向的两个横波，它们的传播速度都等于公式(12-6)所示的 c_2 。显然，横波是一种等容波，因为相应的体应变 θ 等于零。

横波的传播速度 c_2 总是小于纵波的传播速度 c_1 。根据公式(12-4)及(12-6)，两者的比值为

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}} \quad (12-14)$$

当 $\mu = \frac{1}{3}$ 时， $\frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{2}$ ，可见在一般的金属材料中，横波的传播速度大致只是纵波传播速度的一半。在地震时，地震波中的纵波总是比横波先到，根据测出的纵波与横波到达时间的间隔，可以约略算出震源至测站的距离。

§ 12-4 表层波的传播

如果弹性体的一部分边界是自由边界，则在该弹性体的距自由边界较近之处，可能发生所谓表层波(类似于投石入水而在水面上发生的波)。这种表层波具有如下的特性：(1)随着距自由边界的法向距离增大而迅速减弱。(2)由于这种波主要在弹性体表层传播，并不深入内部，其振幅等衰减较慢，因而随着距波源的距离增大而增加其相对于其他各种波的优势。因此，下面我们所要着重讨论的，是表层波在距自由边界较近而距波源较远处的传播。

在距波源较远之处，弹性体中与表层波相应的位移可以当做是平面位移。为简单起见，把自由边界当做是平面。我们取边界为 xz 面 ($y=0$)， y 轴指向弹性体的内部， x 轴平行于表层波的传播方向。这样，与表层波相应的位移将是平行于 xy 面的平面位移。

把位移取为无旋位移与等容位移的叠加。取无旋位移的表达式为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A s e^{-ay} \sin(pt - sx), \\ v_1 &= -A a e^{-ay} \cos(pt - sx), \\ w_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中的 A 、 a 、 p 、 s 均为常数。常数 p 的量纲应为 T^{-1} ， a 和 s 的量纲应为 L^{-1} ， A 的量纲应为 L^2 。当常数 a 为正实数时，式(a)可以反映表层波的特性，即，位移分量 u_1 及 v_1 随着 y 的增大而迅速减小。三角函数的幅角 $pt - sx$ 可以改写为 $-s(x - c_3 t)$ ，其中

$$c_3 = p/s, \quad (b)$$

按照类似于 § 12-3 的分析可见, 式(a)所示的位移是以速度 c_3 沿着 x 方向传播。将式(a)中的 u_1 、 v_1 、 w_1 作为 u 、 v 、 w 代入运动微分方程(12-2), 可见该方程要求

$$a^2 = s^2 - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}{E(1-\mu)} p^2,$$

或通过式(b)及公式(12-6)改写为

$$a^2 = s^2 \left[1 - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{c_3^2}{c_2^2} \right], \quad (c)$$

另一方面, 取等容位移的表达式为

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= Bbe^{-by} \sin(pt - sx), \\ v_2 &= -Bse^{-by} \cos(pt - sx), \\ w_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

其中的 B 和 b 是常数。常数 b 的量纲应为 L^{-1} , B 的量纲应为 L^2 。当常数 b 为正实数时, u_2 及 v_2 随着 y 的增大而迅速减小, 反映表层波的特性。常数 p 及 s 与上相同, 因而位移传播的速度仍然是 c_3 , 如式(b)所示。将式(d)中的 u_2 、 v_2 、 w_2 作为 u 、 v 、 w 代入运动微分方程(12-2), 可见该方程要求

$$b^2 = s^2 - \frac{2(1+\mu)\rho}{E} p^2,$$

或通过式(b)及公式(12-6)改写为

$$b^2 = s^2 \left(1 - \frac{c_3^2}{c_2^2} \right). \quad (e)$$

现在, 将无旋位移(a)与等容位移(d)相叠加, 也就是取

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad (f)$$

边界条件要求

$$(\sigma_y)_{y=0} = 0, \quad (\tau_{xy})_{y=0} = 0.$$

利用弹性方程(9-1), 可以将它们改用位移分量表示成为

$$\left(\frac{\mu}{1-\mu} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0.$$

将式(f)代入, 然后将式(a)及式(d)代入, 简化以后, 得到

$$\begin{aligned} \left(a^2 - \frac{\mu}{1-\mu} s^2 \right) A + \frac{1-2\mu}{1-\mu} bsB &= 0, \\ 2asA + (b^2 + s^2)B &= 0. \end{aligned}$$

这是 A 和 B 的齐次线性方程。为了表层波的存在, A 和 B 不能都等于零, 因

此，上列二方程的系数行列式应当等于零，即

$$\begin{vmatrix} a^2 - \frac{\mu}{1-\mu}s^2 & \frac{1-2\mu}{1-\mu}bs \\ 2as & b^2 + s^2 \end{vmatrix} = 0。$$

展开以后，得到

$$2(1-2\mu)abs^2 = (b^2 + s^2) [(1-\mu)a^2 - \mu s^2]。$$

两边平方以后，得到

$$4(1-2\mu)^2 a^2 b^2 s^4 = (b^2 + s^2)^2 [(1-\mu)a^2 - \mu s^2]^2。$$

将式(c)及式(e)代入，简化以后，可见 s 被消去而得出比值 c_3/c_2 的六次方程如下：

$$\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^6 - 8\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^4 + 8\left(\frac{2-\mu}{1-\mu}\right)\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 - \frac{8}{1-\mu} = 0。 \quad (12-15)$$

于是，对于给定数值的 μ ，总可以由方程(12-15)求得比值 c_3/c_2 。但 a 和 b 都必须为正实数，如上所述，因此，式(c)所示的 a^2 和式(e)所示的 b^2 都必须为正数，可见比值 c_3/c_2 必须满足如下的两个条件

$$1 - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 \geq 0, \quad 1 - \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 \geq 0。$$

又因 $1-2\mu < 2(1-\mu)$ ，后一式的成立能保证前一式的成立，可见比值 c_3/c_2 只须满足 $1 - (c_3/c_2)^2 \geq 0$ ，即

$$\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 \leq 1。 \quad (12-16)$$

选用满足这一条件的比值 c_3/c_2 ，即可根据公式(12-6)给出的 c_2 求得 c_3 。

例如，设 $\mu = 1/4$ ，则方程(12-15)成为

$$\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^6 - 8\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^4 + \frac{56}{3}\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 - \frac{32}{3} = 0。$$

由此求得

$$\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 = 4, \quad 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}。$$

满足条件(12-16)的只是

$$\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0.845。$$

由此求得

$$c_3 = \sqrt{0.845}c_2 = 0.919c_2。 \quad (g)$$

于是由公式(12-4)、(12-6)及式(g)求得

$$c_1 = 1.095 \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_2 = 0.633 \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_3 = 0.582 \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

最早研究表层波，并得出一些成果的，是瑞利。这些成果对后来发展起来的地震理论起了一定的作用。因此，在很多文献中，表层波被称为瑞利波。

§ 12-5 球面波的传播

如果弹性体具有圆球形的孔洞，而在孔洞内受到球对称的爆炸之类的作用，或者，如果具有圆球形外表面的弹性体在其外表面上受到球对称的动力作用，则由于对称，只可能发生径向位移 u_r ，不可能发生切向位移，而且径向位移 u_r 将只是径向坐标 r 和时间 t 的函数。这样，由孔洞向外传播或由外表面向内传播的弹性波将是球对称的，即所谓球面波。

在球对称问题的基本微分方程(9-6)中，注意现在 u_r 是 r 和 t 两个变数的函数，并且不计径向体力 f_r ，而用径向惯性力 $-\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$ 代替 f_r ，即得

$$\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0.$$

引用公式(12-4)所示的 c_1 ，则上式可以简写为

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{a})$$

和 § 12-2 中相似，把径向位移 u_r 取为

$$u_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (\text{b})$$

其中 $\psi = \psi(r, t)$ 是位移的势函数，则式(a)成为

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{c})$$

注意

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) \right] &= \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right), \end{aligned}$$

则式(c)又可以改写成为

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) \right] - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = 0.$$

对 r 积分一次, 得

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F(t), \quad (\text{d})$$

其中 $F(t)$ 为 t 的任意函数。在一般情况下, $F(t)$ 不等于零, 但是, 我们总可以求出方程(d)的任意一个特解 $\psi_1(t)$, 它只是 t 的函数, 而由式(b)可见, 这个特解并不会影响位移 u_r 。因此, 式(d)中的 $F(t)$ 可以取为等于零。这样, 式(d)就可以简写成为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi),$$

而它的通解是

$$r\psi = f_1(r - c_1 t) + f_2(r + c_1 t), \quad (12-17)$$

其中的 f_1 及 f_2 为任意函数。

通解(12-17)中的 f_1 及 f_2 都表示沿径向传播的球面波, 它们的传播速度都等于公式(12-4)所示的 c_1 (由于对称, 弹性体的径向线段及环向线段都不会有转动, 所以球面波当然是无旋波)。函数 f_1 表示由内向外传播的球面波, 适用于圆球形孔洞内受球对称动力作用时的情况; 函数 f_2 表示由外向内传播的球面波, 适用于空心或实心圆球在外表面受球对称动力作用时的情况。

习 题

12-1 试证: 当纵波或横波在弹性体中传播时, 该弹性体的动能与形变势能保持相等。

12-2 试导出方程(12-15)。

12-3 试求 $\mu=0$ 及 $\mu=1/3$ 时的 c_1 、 c_2 、 c_3 。

答案: 当 $\mu=0$ 时, $c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $c_2 = 0.707 \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $c_3 = 0.618 \sqrt{\frac{E}{\rho}}$; 当 $\mu=1/3$ 时, $c_1 = 1.225 \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $c_2 = 0.612 \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $c_3 = 0.570 \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 。

参 考 教 材

- [1] 铁木辛柯, 古迪尔著. 弹性理论[M]. 徐芝纶译. 北京: 高等教育出版社, 1990: 第十五章.
- [2] 钱伟长, 叶开沅编. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1956: 第十三章.

内 容 索 引

(按照汉语拼音字母次序排列)

A

- 艾里应力函数, § 2-12
- 按位移求解, § 2-9, § 6-4, § 7-7 至 § 7-10, § 9-1, § 13-2, § 20-4
- 按应力求解, § 2-9, § 2-10, § 9-10
- 凹角, § 10-5

B

- 贝尔特拉米方程, § 9-10
- 半逆解法, § 2-12, § 10-1
- 半空间体, § 9-6 至 § 9-8
- 半平面体, § 4-11, § 4-12
- 半无矩理论, § 20-11
- 保角变换, § 5-7
- 闭合壳体, § 19-3, § 19-8
- 边界条件, § 2-7, § 5-4, § 8-2, § 13-4, § 19-8, § 19-9, § 22-2, § 22-7
- 边缘效应, § 19-9, § 20-7, § 21-8, § 22-10
- 边值条件, § 6-3
- 扁壳, 基本方程及边界条件, § 22-2
 - 简化计算, § 22-10, § 22-11
 - 弯曲问题, § 22-7 至 § 22-9
 - 无矩计算, § 22-3 至 § 22-5
 - 中面的几何性质, § 22-1
- 变分法, § 11-1, § 17-7, § 18-3, § 18-6
 - 位移, § 11-3, § 11-4
 - 应力, § 11-6 至 § 11-8
- 变分方程, 位移, § 11-2 至 § 11-4
 - 应力, § 11-5 至 § 11-8
- 变厚度薄板, § 13-12, § 13-13, § 14-4

- 波, 表层, § 12-4
 - 等容, § 12-2
 - 横, § 12-3
 - 平面, § 12-3
 - 球面, § 12-5
 - 弹性, § 12-1
 - 无旋, § 12-2
 - 纵, § 12-3
- 波纹板, § 17-4
- 薄板, 大挠度弯曲, § 18-1
 - 内力, § 13-3, § 13-8, § 14-1
 - 受迫振动, § 15-8, § 17-8
 - 受纵横荷载, § 16-1
 - 稳定及压曲, § 16-2 至 § 16-8, § 17-8
 - 小挠度弯曲, § 13-1, § 14-1, § 17-3, § 17-5 至 § 17-7
 - 自由振动, § 15-1 至 § 15-7
- 薄壁杆, § 10-5
- 薄壳, 概念, § 19-3
 - 基本方程及边界条件, § 19-5 至 § 19-8
 - 无知理论, § 19-9
- 薄膜比拟, § 10-2
- 薄膜内力, § 16-1, § 19-6
- 不变量, § 8-3, § 8-6
- 不稳定温度场, § 6-1, § 6-2, § 7-3
- 布西内斯克解答, § 9-6

C

- 差分公式, § 7-1, § 14-1
- 差分解(差分法)
 - 不稳定温度场, § 7-3
 - 临界荷载, § 16-6
 - 扭转问题, § 10-6
 - 位移, § 7-7 至 § 7-10
 - 温度应力, § 7-6, § 7-10
 - 稳定温度场, § 7-2
 - 小挠度弯曲, § 14-1 至 § 14-4, § 17-6
 - 应力函数, § 7-4 至 § 7-6
 - 自然频率, § 15-5

常体力情况, § 2-11
 沉陷, § 4-11, § 9-6, § 13-4, § 13-5, § 13-7
 齿槽边, § 2-7
 纯弯曲, § 3-1, § 3-2, § 4-7, § 9-11

D

大挠度弯曲, § 18-1 至 § 18-6
 单连体, § 2-10, § 7-4
 等截面直杆的扭转, § 10-1 至 § 10-6
 等曲率扁壳, § 22-1, § 22-5, § 22-9 至 § 22-11
 等容波, § 12-2
 等效横向荷载, § 13-15
 等效剪力, § 13-4, § 19-8
 等效平错力, § 19-8
 等效弯矩, § 13-15
 顶盖旋转壳, § 21-5
 顶盖柱壳, § 20-3, § 20-10, § 20-11
 端点导数公式, § 7-1
 多连体, § 2-10, § 4-6, § 5-5, § 5-6, § 7-9
 多项式解答, § 3-1

F

符拉基解答, § 4-11
 复变函数表示, 边界条件, § 5-4
 应力函数, § 5-1, § 5-3
 应力和位移, § 5-2

G

钢筋混凝土板, § 17-4
 刚体位移, § 2-4, § 8-5
 高斯条件, § 19-4, § 21-1
 各向同性体, § 1-3, § 2-6, § 8-7
 各向异性板, § 17-2 至 § 17-8
 各向异性体, § 17-1
 共振现象, § 15-8
 占尔萨公式, § 5-1
 固定边, § 19-8
 郭洛文解答, § 4-7

H

- 合理中面, § 22 - 6
- 横波, § 12 - 3
- 横向荷载, § 13 - 1
- 横向剪力, § 13 - 3, § 19 - 6
- 胡克定律, § 1 - 3, § 2 - 6, § 17 - 1
- 旋转壳, § 22 - 1 至 § 21 - 9
 - 简化计算, § 21 - 8, § 21 - 9
 - 弯曲问题, § 21 - 7, § 21 - 8
 - 无矩理论, § 21 - 2 至 § 21 - 6
 - 中面的几何性质, § 21 - 1
- 混合边界条件, § 2 - 7
- 混合法(混合求解), § 2 - 9, § 18 - 1, § 21 - 7, § 22 - 7
- 混合解函数, § 22 - 8

J

- 基本假定, § 1 - 3
- 基础板, § 13 - 14, § 14 - 4
- 级数解答, § 3 - 5, § 13 - 6, § 13 - 7, § 20 - 10, § 22 - 3, § 22 - 4
- 最小势能原理, § 11 - 2
- 最小余能原理, § 11 - 5
- 几何方程, § 2 - 4, § 4 - 2, § 8 - 5, § 17 - 2, § 18 - 1, § 19 - 2, § 19 - 5
- 计算假定, § 13 - 1, § 19 - 3
- 加肋板, § 17 - 4
- 伽辽金法, § 11 - 3, § 11 - 4, § 14 - 7, § 14 - 8
- 伽辽金位移函数, § 9 - 5
- 夹支边, § 13 - 4
- 切应力互等, § 1 - 2, § 2 - 2, § 8 - 1
- 简支边, § 13 - 4, § 19 - 8, § 22 - 2
- 简支梁, § 3 - 3, § 3 - 6
- 简化计算, 扁壳, § 22 - 10, § 22 - 11
 - 旋转壳, § 21 - 8, § 21 - 9
 - 柱壳, § 20 - 7, § 20 - 8
- 角点条件, § 13 - 4
- 接触问题, § 4 - 6, § 9 - 9
- 解答的唯一性, § 11 - 9
- 矩形截面杆, § 10 - 4

绝热温升, § 6-2, § 7-3

均匀性, § 1-3

K

卡斯蒂利亚诺变分方程, § 11-5

开敞壳体, § 19-3

开口薄壁杆, § 10-5

科达齐条件, § 19-4, § 21-1

壳体, 边界条件, § 19-8

 概念, § 19-3

 几何方程, § 19-5

 内力及物理方程, § 19-6

 平衡微分方程, § 19-7

空心圆球, § 9-3

孔口问题, § 4-9, § 5-8 至 § 5-11

L

乐甫位移函数, § 9-5

拉格朗日变分方程, § 11-2

拉梅常数, § 8-7

拉梅系数, § 19-1, § 19-4

莱维解答, § 3-4, § 4-10

莱维解法, § 13-7, § 13-12

理想弹性体, § 1-3

连杆支承边, § 2-7

连续板, § 14-4

连续性, § 1-3

裂隙问题, § 5-10

临界荷载, § 16-2 至 § 16-8

M

米歇尔方程, § 9-10

米歇尔解答, § 4-10

面力, § 1-2, § 2-7

膜型扁壳, § 22-6

N

纳维解法, § 13-6, § 20-5

内尖角, § 7-9
能量法, § 15-6, § 15-7, § 16-7, § 16-8
能量原理, § 11-2, § 11-5
逆解法, § 2-12, § 3-1, § 3-5
扭矩, § 10-1, § 13-6, § 19-6
扭转, 薄壁杆, § 10-5
 等截面直杆, § 10-1, § 10-6
 矩形截面杆, § 10-4
 椭圆截面杆, § 10-3

P

平板内力, § 19-6
平错力, § 16-1, § 19-6
平衡微分方程, § 2-2, § 4-1, § 8-1, § 8-8, § 8-9, § 13-3, § 19-7
频率, § 15-1 至 § 15-8
平面波, § 12-3
平面截面, § 3-2, § 4-7, § 9-11
平面应变, § 2-1, § 2-6, § 6-7
平面应力, § 2-1, § 2-6, § 17-2
平移扁壳, § 22-1
普朗特应力函数, § 10-1

Q

基尔斯解答, § 4-9
球对称问题, § 8-9, § 9-1, § 9-3
球壳, § 21-5, § 21-7 至 § 21-9
球面扁壳, § 22-1
球面波, § 12-5
球体, § 9-9
曲梁, § 4-7
曲率主向及曲率线, § 19-4
曲线边界, § 7-2, § 7-4, § 14-4
曲线坐标, § 5-7, § 19-1

R

热传导, § 6-1, § 6-2
容器旋转壳, § 21-4
容器柱壳, § 20-2, § 20-8

里茨法, § 11-3, § 11-4, § 14-5, § 14-6, § 17-7, § 18-3, § 18-6

S

塞路蒂解答, § 9-7

摄动法, § 18-5

深梁, § 7-5, § 7-8

圣维南原理, § 2-8

实用弹性力学, § 1-1

受迫振动, § 15-8, § 17-8

数学弹性力学, § 1-1

顺剪力, § 16-1

T

弹性波, § 12-1 至 § 12-5

弹性层, § 9-2

弹性常数, § 2-6, § 17-1

弹性对称面, § 17-1

弹性曲面, § 13-2, § 13-8

弹性支承, § 13-4

弹性主向, § 17-1

体应变, § 8-5, § 8-6

体积应力, § 8-7

体积力(体力), § 1-2, § 2-11

椭圆板, § 13-5

椭圆杆, § 10-3

椭圆孔口, § 5-9

椭圆柱壳, § 20-2, § 20-3

W

弯曲内力, § 19-6

完全接触, § 4-6, § 7-2

完全弹性, § 1-3

微分方程, 大挠度, § 18-1

平衡, § 2-2, § 4-1, § 8-1, § 8-8, § 13-3, § 19-7, § 19-9

压曲, § 16-2 至 § 16-5, § 17-8

受迫振动, § 15-8

弹性曲面, § 13-2, § 13-3, § 13-8, § 17-3

运动, § 12-1

- 自由振动, § 15-1, § 17-8
 唯一性, § 11-9
 位移边界条件, § 2-7, § 8-7
 位移单值条件, § 2-10, § 4-6, § 5-5
 位移的求出, § 3-2, § 4-5, § 4-11, § 9-11
 位移函数, § 9-5, § 20-5
 位移势函数, § 6-5, § 9-4
 温度场, § 6-1, § 6-3, § 7-2, § 7-3
 温度应力, § 6-4 至 § 6-8, § 7-6, § 7-10, § 13-15
 文克勒地基, § 13-14
 稳定, § 16-2, § 16-6
 无筋扁壳, § 22-6
 无矩计算, § 20-2, § 20-3, § 21-3 至 § 21-6, § 22-3
 无矩理论, § 19-9, § 20-1, § 21-2, § 22-3
 无限大多连体, § 5-6
 无限大弹性层, § 9-2
 无旋波, § 12-2
 物理方程, § 2-6, § 4-2, § 8-7, § 13-1, § 19-1, § 19-6

X

- 相容方程(相容条件), § 2-10, § 4-3, § 9-10, § 17-2, § 22-7
 向后差分, § 7-1, § 7-3
 向前差分, § 7-1, § 7-3
 小挠度弯曲, § 13-1, § 17-5
 楔形体, § 3-4, § 4-10, § 6-8
 斜方向的应变及位移, § 2-5
 斜面上的应力, § 2-3
 形变, § 1-2
 形变势能, § 11-1, § 14-5, § 15-6, § 16-7, § 17-7, § 18-3, § 18-6
 形变协调, § 2-10, § 9-10, § 18-1
 形变状态, § 8-6
 虚功方程, § 11-2

Y

- 压力隧洞, § 4-6
 压曲微分方程, § 16-2, § 16-5, § 17-8
 英格里斯解答, § 4-10
 影响函数, § 13-6

应变, § 1-2, § 2-5
 应力边界条件, § 2-7, § 8-2
 应力单值条件, § 5-5
 应力分量的坐标变换, § 4-4
 应力函数, § 2-12, § 4-3, § 5-1, § 7-4 至 § 7-6, § 10-1, § 17-2
 应力集中, § 4-9, § 5-9 至 § 5-11
 应力主向, § 2-3, § 8-3
 应力状态, § 8-2
 圆板, § 13-8 至 § 13-11, § 13-13, § 15-4, § 16-5
 圆环及圆筒, § 4-6, § 6-7
 圆孔, § 4-9
 圆盘匀速转动, § 4-8
 网球, § 9-3, § 9-9
 运动微分方程, § 12-1

Z

振形, § 15-1 至 § 15-5
 正交各向异性板, § 17-2 至 § 17-8
 正交各向异性体, § 17-1
 正交曲线坐标, § 19-1, § 19-2, § 19-4
 中点导数公式, § 7-1
 中面内力, § 19-6
 中面形变, § 19-5
 轴对称弯曲, 薄板, § 13-9, § 14-5, § 18-3 至 § 18-5
 薄壳, § 20-6, § 20-7, § 21-7 至 § 21-9
 轴对称问题, 平面, § 4-5, § 6-7
 空间, § 8-8, § 9-1
 主刚度, § 17-4
 主曲率, § 19-4
 主弯矩, § 14-9
 主应变, § 8-6, § 8-7
 主应力, § 2-3, § 8-3, § 14-9
 柱壳, 弯曲问题, § 20-4 至 § 20-11
 无知理论, § 20-1 至 § 20-3
 转动圆盘, § 4-8
 锥壳, § 21-4
 自然频率, § 15-2 至 § 15-7, § 17-8
 自由边, § 13-4, § 19-8
 总剪力, § 13-4, § 19-8
 纵波, § 12-3
 最大与最小的应力, § 2-3, § 8-4

人名对照表

(按照译名的汉语拼音字母次序排列)

A

艾里 G. B. Airy

B

贝尔特拉米 E. Beltrami

贝塞尔 F. W. Bessel

别茹霍夫 И. И. Безухов

泊松 S. D. Poisson

布西内斯克 J. Boussinesq

D

达朗贝尔 J. R. d'Alembert

F

菲列波夫 А. П. Филиппов

符拉芒 A. Flamant

符拉索夫 В. З. Власов

傅里叶 J. B. J. Fourier

G

盖开勒 J. W. Geckeler

盖莱 J. M. Gere

高斯 C. F. Gauss

柯西 A. L. Cauchy

郭洛义 X. C. Головин

古迪尔 J. N. Goodier

古尔萨 E. Goursat

H

赫兹 H. Hertz

胡拜尔 M. T. Huber

胡斯 J. H. Huth

胡克 R. Hooke

J

伽辽金 Б. Г. Галёркин

季柯维奇 В. В. Дикович

K

卡门 L. von Kármán

卡斯蒂利亚诺 A. Castigliano

开尔文 W. Kelvin

科达齐 D. Codazzi

科尔库诺夫 И. В. Колкунов

克洛索夫 Г. В. Колосов

L

乐甫 A. E. H. Love

拉格朗日 J. L. Lagrange

拉梅 G. Lamé

拉普拉斯 P. S. Laplace

赖斯纳 H. Reissner

莱维 M. Lévy

列宾逊 Л. С. Лейбензон

列赫尼茨基 С. Г. Лехницкий

M

马斯洛夫 Г. Н. Маслов
 米歇尔 J. H. Michell
 明德林 R. D. Mindlin
 莫尔 Q. Mohr
 穆斯赫利什维利 Н. И. Мухелишвили

N

纳维 L. M. H. Navier
 诺沃日洛夫 В. В. Новожилов

O

欧拉 L. Euler

P

帕尔姆 A. L. Parme
 巴博考维奇 И. Ф. Папкович
 普厄希尔 T. Pöschl
 普朗特 L. Prandtl

Q

基尔斯 G. Kirsch
 基尔霍夫 G. R. Kirchhoff

R

日莫契金 Б. Н. Жемочкин
 甲茨 W. Ritz
 瑞利 D. C. L. Rayleigh

S

萨文 Г. Н. Савин
 赛代尔 E. Seydel
 塞路蒂 V. Cerruti
 圣维南 B. de Saint-Venant
 施塔耶尔芦 И. Я. Штцерман

T

铁木辛柯 S. Timoshenko

W

外斯特噶德 H. M. Westergaard
 文克勒 F. Winkler
 沃诺斯基 S. Woinowsky-Krieger

Y

英格卑斯 C. E. Inglis



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

弹性力学

Elasticity

第4版

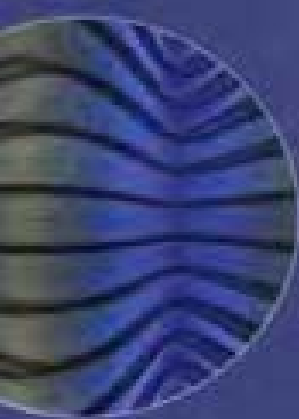
下 册

徐芝纶



高等教育出版社

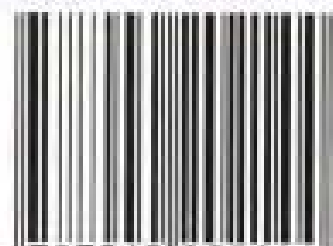
Higher Education Press



弹性力学

Elasticity

ISBN 7-04-020214-X



9 787040 202144 >

定价 23.60 元

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

弹性力学

第四版

下册

徐芝纶

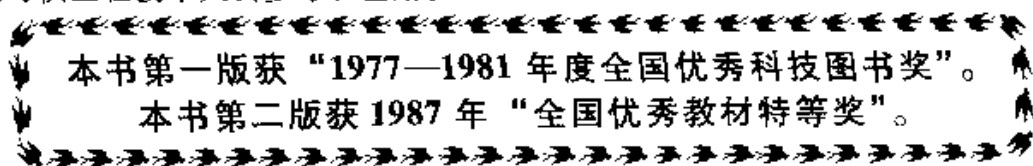
高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。第四版是在保持第三版内容、编排和写作风格不变的基础上修订而成的。本书是“高等教育百门精品课程教材计划”的一个立项项目。

全书分上、下两册。上册为数学弹性力学部分,内容包括:平面问题的基本理论及其直角坐标解答、极坐标解答、复变函数解答,温度应力的平面问题、平面问题的差分解;空间问题的基本理论及其解答,和等截面直杆的扭转、能量原理与变分法、弹性波的传播。下册为应用弹性力学部分,内容包括:薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法、差分解法、变分解法,及薄板的振动、稳定、各向异性、大挠度问题;壳体的一般理论以及柱壳、旋转壳、扁壳。

本书可作为高等学校工程力学、土建、水利、机械、航空航天等专业弹性力学课程的教材,也可供工程技术人员参考和应用。



图书在版编目(CIP)数据

弹性力学. 下册/徐芝纶. —四版. —北京: 高等教育出版社, 2006. 12

ISBN 7-04-020214-X

I. 弹... II. 徐... III. 弹性力学-高等学校-教材 IV. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 131468 号

策划编辑 黄毅 责任编辑 姜凤 封面设计 张楠
责任绘图 尹莉 版式设计 余杨 责任校对 刘莉
责任印制 尤静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京铭成印刷有限公司		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	1979 年 8 月第 1 版
印 张	18.75		2006 年 12 月第 4 版
字 数	350 000	印 次	2006 年 12 月第 1 次印刷
		定 价	23.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 20214-00

第一版前言

本书是为高等学校工科力学专业编写的弹性力学教材。

全书分上下两册，上册先讲平面问题，再讲空间问题，下册先讲薄板问题，再讲薄壳问题。这样安排，大致符合由浅入深、由易到难、循序渐进的原则。

为了训练学生理论推导和实际运算的能力，每章之后都附有难易程度不同的习题，任课教师可按照专业教学计划的要求和学生课外学时的多少，适当布置。

在大多数章的最后，列出了参考教材的目录，以使学生在阅读了这些教材以后，能够更全面、深入地掌握该章的内容。

内容索引和人名对照表，附在下册的书后。

本书承主审人北京航空学院王德荣同志和武汉建筑材料工业学院王龙甫同志，以及同济大学、大连工学院、太原工学院、华北水利水电学院、西南交通大学、天津大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。

徐芝纶 1978年10月

第二版前言

本书在1979年出版以后，曾蒙若干兄弟院校的教师作为教材试用，并先后提出不少宝贵的意见和建议。现在已经按照这些意见和建议进行了修改，择要说明如下。

原书中关于楔形坝体温度应力的一般分析，数学运算较繁，在有限单元法广泛应用于坝体应力分析以后，已经失去了应用价值。原书中关于等截面直杆弯曲问题的解答，虽然属于古典弹性力学上的重大成就，但在工程上很少有人应用。因此，在修订版中删去了这两方面的内容。

修订版在平面问题的基本理论中增加了“斜方向的应变”这一节，是为了适应结构实验分析方面的需要；在薄板小挠度弯曲问题的边界条件中，增加了弹性支承边的边界条件，因为弹性支承是板壳理论中的一个重要概念，而且在很多的板壳结构中，支承构件的弹性也是必须加以考虑的。

原书中关于平面问题应力函数以及应力和位移的复变函数表示，沿用过去文献中的传统推导方法，引用了几个人为的调和函数，显得曲折而不自然。在修订版中，放弃了这些调和函数而用共轭复变数进行推导，比较直观，容易为学生接受。

等曲率扁壳的简化计算，是我国的力学工作者们在50年代末期和60年代初期的重大贡献，至今还不失为国际上的先进成果。因此，在修订版中稍许增多了这方面的内容。

此外，在很多的章节中，文字叙述和数学推导作了某些修改，习题也有些调整。

恳切希望兄弟院校的教师继续对本书进行严格的审查，把发现的缺点和错误及时通知本人，以便再度加以修改或更正，使本书成为比较合用的一部教材。

徐芝纶 1982年4月

第三版前言

在安排本书第三版的内容时，对总的体系未加更改，对次序的先后也只作了很小的变动。

由于国内的大专院校和设计单位都已普遍使用电子计算机(至少已普遍使用微型机)，用手工进行的松弛计算已经失去了实用价值，所以第三版中取消了这方面的内容。

平面问题的位移差分解，与应力函数差分解相比，具有较广泛的适用性，但是，对同样的精度要求说来，方程较多是其缺点。由于电子计算机的使用，这一缺点已无关重要，因此，第三版中增加了位移差分解的内容。

兄弟院校的几位同志建议，增加“解答的唯一性”和“功的互等定理”。还有同志认为，既然空间轴对称问题的应力函数等同于拉甫位移函数，前者就不必介绍了。编者采纳了这两方面的建议。

为了便于教学，第三版中对文句和插图作了不少的修改，对例题和习题也作了一些调整。

徐芝纶 1987年5月

第四版前言

《弹性力学》是徐芝纶教授(1911—1999)为工程力学专业、工科研究生等编著的一部教材,1990年出版了第三版,至今已有16年,为满足教学要求,现修订出版第四版。

第四版在保持第三版的内容、编排和写作风格不变的前提下,进行以下几方面的修订:(1)为方便读者阅读,在正文之前增加了“主要符号表”。(2)按1993年发布的GB 3100~3102—93《量和单位》系列国家标准及有关规定,规范使用量和单位的名称、符号及书写规则。(3)重新绘制了全部插图,少数图示有所改进,图注均用宋体字。(4)在反复斟酌的基础上,对个别字、词及表述作了修订,在“能量原理及变分法”一章中增加了余能概念。

第四版的修订工作由王润富(河海大学)、徐慰祖(北京工业大学)、张元直(高等教育出版社)共同完成。

修订不当之处敬请读者指正。

修订者

2006年7月

主要符号表

弹性力学

坐标 直角坐标 x, y, z ; 圆柱坐标 ρ, φ, z ; 极坐标 ρ, φ ; 球坐标 r, θ, φ 。

体力分量 f_x, f_y, f_z (直角坐标系); f_ρ, f_φ, f_z (圆柱坐标系); f_ρ, f_φ (极坐标系)。

面力分量 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ (直角坐标系); $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi, \bar{f}_z$ (圆柱坐标系); $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi$ (极坐标系)。

位移分量 u, v, w (直角坐标系); u_ρ, u_φ, w (圆柱坐标系); u_ρ, u_φ (极坐标系)。

边界约束分量 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ (直角坐标系)。

方向余弦 l, m, n (直角坐标系)。

应力分量 正应力 σ , 切应力 τ ; 全应力 p ; 斜面应力分量 p_x, p_y, p_z (直角坐标系); σ_n, τ_n ; 体积应力 Θ 。

应变分量 线应变 ε , 切应变 γ ; 体应变 θ 。

势能和功 形变势能(应变能) V_e , 外力势能 V , 总势能 E_p , 功 W , 动能 E_k , 应变余能 V_c 。

艾里应力函数 Φ , 扭转应力函数 Φ 。

弹性模量 E , 切变模量 G , 体积模量 K , 泊松比 μ 。

质量 m , 密度 ρ , 重力加速度 g 。

温度场和温度应力

温度 T , 绝热温升 θ 。

热量 Q , 热流密度 q 。

比热容 c , 线胀系数 α 。

导热系数(热导率) λ , 导温系数(热扩散率) a , 运流放热系数(表面传热系数) β 。

薄板力学

挠度 w , 振形函数 W , 振动频率 ω , 抗弯刚度 D 。

中面内力(薄膜内力) 拉压力, 平错力(纵向剪力) $F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Txy} = F_{Tyx}$ (直角坐标系); $F_{T\rho}, F_{T\varphi}, F_{T\rho\varphi} = F_{T\varphi\rho}$ (极坐标系)。

平板内力 弯矩, 扭矩 $M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}$ (直角坐标系); $M_\rho, M_\varphi, M_{\rho\varphi} = M_{\varphi\rho}$ (极坐标系)。

横向剪力, 总剪力 $F_{Sx}, F_{Sy}; F'_{Sx}, F'_{Sy}$ (直角坐标系); $F_{S\rho}, F_{S\varphi}; F'_{S\rho},$

$F_{S\varphi}^i$ (极坐标系)。

薄壳力学

正交曲线坐标 α, β, γ 。坐标线上微分线段 ds_1, ds_2, ds_3 。

位移 u_1, u_2, u_3 ; 中面位移 u, v, w 。

线应变 e_1, e_2, e_3 ; 切应变 e_{23}, e_{31}, e_{12} 。

中面线应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 。中面切应变 ε_{12} 。中面主曲率 k_1, k_2 。中面主曲率改变 χ_1, χ_2 。中面扭率改变 χ_{12} 。壳体的中面荷载 q_1, q_2, q_3 。

中面内力(薄膜内力) 拉压力 F_{T1}, F_{T2} ; 平错力 F_{T12}, F_{T21} 。总平错力 F_{T12}^i, F_{T21}^i 。

平板内力 弯矩 M_1, M_2 ; 扭矩 M_{12}, M_{21} 。

横向剪力 F_{S1}, F_{S2} 。总剪力 F_{S1}^i, F_{S2}^i 。

量纲

国际单位制(SI)采用的基本量为, 长度(L), 质量(M), 时间(T), 电流(I), 热力学温度(Θ), 物质的量(N), 发光强度(J)。

目 录

(下 册)

主要符号表	J
第十三章 薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法	1
§ 13-1 有关概念及计算假定	1
§ 13-2 弹性曲面的微分方程	3
§ 13-3 薄板横截面上的内力及应力	6
§ 13-4 边界条件。扭矩的等效剪力	9
§ 13-5 简单例题	13
§ 13-6 简支边矩形薄板的纳维解法	17
§ 13-7 矩形薄板的莱维解法及一般解法	20
§ 13-8 圆形薄板的弯曲	23
§ 13-9 圆形薄板的轴对称弯曲	26
§ 13-10 轴对称弯曲问题的实例	28
§ 13-11 圆形薄板在静水压力下的弯曲	31
§ 13-12 变厚度矩形薄板	33
§ 13-13 变厚度圆形薄板	35
§ 13-14 文克勒地基上的基础板	39
§ 13-15 薄板的温度应力	41
第十四章 用差分法及变分法解薄板的小挠度弯曲问题	48
§ 14-1 差分公式。内力及反力的差分表示	48
§ 14-2 差分方程及边界条件	51
§ 14-3 差分法例题	53
§ 14-4 差分法中对若干问题的处理	57
§ 14-5 里茨法的应用	62
§ 14-6 里茨法应用举例	66
§ 14-7 伽辽金法的应用	69
§ 14-8 伽辽金法应用举例	70
§ 14-9 主应力与主弯矩	72

第十五章 薄板的振动问题	77
§ 15-1 薄板的自由振动	77
§ 15-2 四边简支的矩形薄板的自由振动	79
§ 15-3 两对边简支的矩形薄板的自由振动	82
§ 15-4 圆形薄板的自由振动	85
§ 15-5 用差分法求自然频率	86
§ 15-6 用能量法求自然频率	89
§ 15-7 用能量法求自然频率举例	92
§ 15-8 薄板的受迫振动	94
第十六章 薄板的稳定问题	100
§ 16-1 薄板受纵横荷载的共同作用	100
§ 16-2 薄板的压曲	103
§ 16-3 四边简支的矩形薄板在均布压力下的压曲	104
§ 16-4 两对边简支的矩形薄板在均布压力下的压曲	107
§ 16-5 圆形薄板的压曲	110
§ 16-6 用差分法求临界荷载	113
§ 16-7 用能量法求临界荷载	115
§ 16-8 用能量法求临界荷载举例	117
第十七章 各向异性板	123
§ 17-1 各向异性体的物理方程	123
§ 17-2 各向异性板的平面应力问题	124
§ 17-3 各向异性板的小挠度弯曲问题	126
§ 17-4 构造上正交各向异性的薄板	129
§ 17-5 小挠度弯曲问题的经典解法	132
§ 17-6 用差分法解小挠度弯曲问题	134
§ 17-7 用变分法解小挠度弯曲问题	136
§ 17-8 压曲问题及振动问题	138
第十八章 薄板的大挠度弯曲问题	142
§ 18-1 基本微分方程及边界条件	142
§ 18-2 无限长薄板的大挠度弯曲	145
§ 18-3 变分法的应用	149
§ 18-4 圆板的轴对称问题	152
§ 18-5 用摄动法解圆板的轴对称问题	154
§ 18-6 用变分法解圆板的轴对称问题	157

第十九章 壳体的一般理论	162
§ 19-1 曲线坐标与正交曲线坐标	162
§ 19-2 正交曲线坐标中的弹性力学几何方程	164
§ 19-3 关于壳体的一些概念	167
§ 19-4 壳体的正交曲线坐标	168
§ 19-5 壳体的几何方程	169
§ 19-6 壳体的内力及物理方程	173
§ 19-7 壳体的平衡微分方程	177
§ 19-8 壳体的边界条件	180
§ 19-9 薄壳的无矩理论	183
第二十章 柱壳	187
§ 20-1 柱壳的无矩理论	187
§ 20-2 容器柱壳的无矩计算	188
§ 20-3 顶盖柱壳的无矩计算	192
§ 20-4 弯曲问题的基本微分方程	195
§ 20-5 圆柱壳在法向荷载下的弯曲	197
§ 20-6 轴对称弯曲问题	200
§ 20-7 轴对称弯曲问题的简化解答	203
§ 20-8 容器柱壳的简化计算	206
§ 20-9 圆柱壳在任意荷载下的弯曲	208
§ 20-10 顶盖柱壳的三角级数解答.....	210
§ 20-11 顶盖柱壳的半无矩理论及梁理论.....	213
第二十一章 旋转壳	221
§ 21-1 中面的几何性质	221
§ 21-2 旋转壳的无矩理论	222
§ 21-3 轴对称问题的无矩计算	225
§ 21-4 容器旋转壳的无矩计算	227
§ 21-5 顶盖旋转壳的无矩计算	230
§ 21-6 非轴对称问题的无矩计算	232
§ 21-7 球壳的轴对称弯曲	235
§ 21-8 球壳轴对称弯曲问题的简化解答	238
§ 21-9 球壳的简化计算	241
第二十二章 扁壳	246
§ 22-1 中面的几何性质	246

§ 22 - 2	基本方程及边界条件	248
§ 22 - 3	无矩计算。重三角级数解答	250
§ 22 - 4	无矩计算。单三角级数解答	254
§ 22 - 5	静水压力作用下的无矩内力	257
§ 22 - 6	合理中面	262
§ 22 - 7	用混合法解弯曲问题	264
§ 22 - 8	混合解函数的引用。级数解答	266
§ 22 - 9	等曲率扁壳的计算	267
§ 22 - 10	等曲率扁壳的简化计算	268
§ 22 - 11	等曲率扁壳受均布荷载时的简化计算	270
内容索引		277
人名对照表		286

第十三章 薄板的小挠度弯曲问题 及其经典解法

§ 13 - 1 有关概念及计算假定

在弹性力学里，两个平行面和垂直于这两个平行面的柱面所围成的物体，称为平板，或简称为板，图 13 - 1。这两个平行面称为板面，而这个柱面称为侧面或板边。两个板面之间的距离 δ 称为板的厚度，而平分厚度 δ 的平面称为板的中间平面，简称为中面。如果板的厚度 δ 远小于中面的最小尺寸 b (例如小于 $b/8$ 至 $b/5$)，这个板就称为薄板，否则就称为厚板。

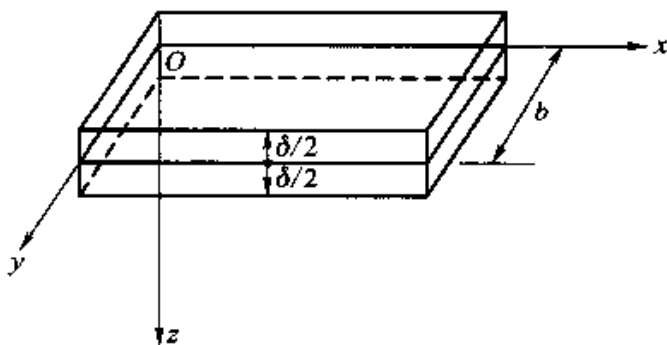


图 13 - 1

对于薄板，已经引用一些计算假定从而建立了一套完整的理论，

可以用来较简便地计算工程上的问题。对于厚板，虽然也有这样或那样的计算方案被提出来，但还不便应用于工程实际问题。

当薄板受有一般荷载时，总可以把每一个荷载分解为两个分荷载，一个是作用在薄板中面之内的所谓纵向荷载，另一个是垂直于中面的所谓横向荷载。对于纵向荷载，可以认为它们沿薄板厚度均匀分布，因而它们所引起的应力、形变和位移，可以按平面应力问题进行计算，如第二章至第七章中所述。横向荷载将使薄板弯曲，它们所引起的应力、形变和位移，可以按薄板弯曲问题进行计算。

当薄板弯曲时，中面所弯成的曲面，称为薄板的弹性曲面，而中面内各点在横向的(即垂直于中面方向的)位移，称为挠度。

本章中只讲述薄板的小挠度弯曲理论，也就是只讨论这样的薄板：它虽然很薄，但仍然具有相当的弯曲刚度，因而它的挠度远小于它的厚度。如果薄板的弯曲刚度很小，以致挠度与厚度属于同阶大小，则须另行建立所谓大挠度弯曲理论，见第十八章。

薄板的小挠度弯曲理论，是以三个计算假定为基础的（这些假定已被大量的实验所证实）。取薄板的中面为 xy 面，图 13-1，这些假定可以陈述如下：

(1) 垂直于中面方向的正应变，即 ε_z ，可以不计。取 $\varepsilon_z = 0$ ，则由几何方程(8-9)中的第三式得 $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ，从而得

$$w = w(x, y)。 \quad (13-1)$$

这就是说，在中面的任一根法线上，薄板全厚度内的所有各点都具有相同的位移 w ，也就等于挠度。

由于作出了上述假定，我们必须放弃与 ε_z 有关的物理方程

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}。$$

这样才能容许 $\varepsilon_z = 0$ ，而同时又容许 $\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$ ，如下一节中所见。

(2) 应力分量 τ_{xz} 、 τ_{yz} 和 σ_z 远小于其余三个应力分量，因而是次要的，它们所引起的形变可以不计（注意：它们本身却是维持平衡所必需的，不能不计）。

因为不计 τ_{xz} 及 τ_{yz} 所引起的形变，所以有

$$\gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0。$$

于是由几何方程(8-9)得

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}。 \quad (13-2)$$

与上相似，必须放弃与 γ_{xz} 及 γ_{yz} 有关的物理方程

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz}。$$

这样才能容许 γ_{xz} 及 γ_{yz} 等于零，而又容许 τ_{xz} 及 τ_{yz} 不等于零，如下一节中所见。

由于 $\varepsilon_z = 0$ ， $\gamma_{xz} = 0$ ， $\gamma_{yz} = 0$ ，可见中面的法线在薄板弯曲时保持不伸缩，并且成为弹性曲面的法线。

因为不计 σ_z 所引起的形变，所以由物理方程有

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (13-3)$$

这就是说，薄板小挠度弯曲问题中的物理方程和薄板平面应力问题中的物理方

程是相同的。

(3) 薄板中面内的各点都没有平行于中面的位移, 即

$$(u)_{z=0} = 0, \quad (v)_{z=0} = 0. \quad (13-4)$$

因为 $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$, 所以由上式得出

$$(\varepsilon_x)_{z=0} = 0, \quad (\varepsilon_y)_{z=0} = 0, \quad (\gamma_{xy})_{z=0} = 0.$$

这就是说, 中面的任意一部分, 虽然弯曲成为弹性曲面的一部分, 但它在 xy 面上的投影形状却保持不变。

§ 13-2 弹性曲面的微分方程

薄板的小挠度弯曲问题是按位移求解的, 取为基本未知函数的是薄板的挠度 w 。因此, 我们要把所有的其他物理量都用 w 来表示, 并建立 w 的微分方程, 即所谓弹性曲面微分方程。

首先把形变分量 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 用 w 来表示。将方程(13-2)对 z 进行积分, 积分时注意 w 只是 x 和 y 的函数, 不随 z 而变, 即得

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z + f_1(x, y), \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z + f_2(x, y),$$

其中的 f_1 和 f_2 是任意函数。应用方程(13-4), 得 $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ 。可见

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z, \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z.$$

于是可以把形变分量 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 用 w 表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}z. \end{aligned} \right\} \quad (13-5)$$

在这里, 由于挠度 w 是微小的, 弹性曲面在坐标方向的曲率及扭率可以近似地用 w 表示为

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (a)$$

所以(13-5)式也可以改写为

$$\varepsilon_x = \chi_x z, \quad \varepsilon_y = \chi_y z, \quad \gamma_{xy} = 2\chi_{xy} z. \quad (13-6)$$

因为曲率 χ_x 、 χ_y 和扭率 χ_{xy} 完全确定了薄板所有各点的形变分量，所以这三者就称为薄板的形变分量。

其次，将应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 用 w 来表示。由物理方程(13-3)求解应力分量，得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将(13-5)式代入式(b)，即得所需的表达式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (13-7)$$

注意 w 不随 z 变化，可见这三个应力分量都和 z 成正比。

再其次，将应力分量 τ_{xz} 及 τ_{yz} 用 w 来表示。在这里，因为不存在纵向荷载，所以有 $f_x = f_y = 0$ ，而平衡微分方程(8-1)中的前二式可以写成

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x},$$

将表达式(13-7)代入，并注意 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ，即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned}$$

注意 w 不随 z 而变，将上列二式对 z 进行积分，得

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + F_1(x, y), \\ \tau_{yz} &= \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + F_2(x, y), \end{aligned}$$

其中 F_1 及 F_2 是任意函数。但是，在薄板的下面和上面，有边界条件

$$(\tau_{xz})_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0, \quad (\tau_{yz})_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0.$$

应用这些条件求出 $F_1(x, y)$ 及 $F_2(x, y)$ 以后，即得表达式

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(z^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(z^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (13-8)$$

最后, 将应力分量 σ_z 也用 w 来表示。利用平衡微分方程(8-1)中的第三式, 取体力分量 $f_z = 0$, 得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}. \quad (c)$$

如果体力分量 f_z 并不等于零, 我们可以把薄板每单位面积内的体力和面力归入薄板上面的面力, 一并用 q 表示, 以沿 z 轴的正方向时为正:

$$q = (\bar{f}_z)_{z=-\frac{\delta}{2}} + (\bar{f}_z)_{z=\frac{\delta}{2}} + \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} f_z dz. \quad (d)$$

这只会对最次要的应力分量 σ_z 引起误差, 对其他的应力分量则毫无影响。这样的处理, 和材料力学中对梁的处理相同。

注意 $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, 将表达式(13-8)代入式(c), 得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta^2}{4} - z^2 \right) \nabla^4 w.$$

对 z 进行积分, 得

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 w + F_3(x, y), \quad (e)$$

其中的 F_3 是任意函数。但是, 在薄板的下面, 有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=\frac{\delta}{2}} = 0.$$

将式(e)代入, 求出 $F_3(x, y)$, 再代回式(e), 即得表达式

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[\frac{\delta^2}{4} \left(z - \frac{\delta}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(z^3 - \frac{\delta^3}{8} \right) \right] \nabla^4 w \\ &= -\frac{E\delta^3}{6(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{\delta} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{\delta} \right) \nabla^4 w. \end{aligned} \quad (13-9)$$

现在来导出 w 的微分方程。在薄板的上面, 有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=-\frac{\delta}{2}} = -q,$$

其中 q 是薄板每单位面积内的横向荷载, 包括横向面力及横向体力, 如式(d)所示。将表达式(13-9)代入, 即得

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 w = q,$$

或

$$D \nabla^4 w = q, \quad (13-10)$$

其中的

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \quad (13-11)$$

称为薄板的弯曲刚度，它的量纲是 L^2MT^{-2} 。

方程(13-10)称为薄板的弹性曲面微分方程，是薄板小挠度弯曲问题的基本微分方程。求解薄板的小挠度弯曲问题时，须按照薄板侧面上(即板边上)的边界条件，由这个微分方程求出挠度 w ，然后就可以按公式(13-7)至(13-9)求得应力分量。

§ 13-3 薄板横截面上的内力及应力

在绝大多数的情况下，都很难使得应力分量在薄板的侧面上(板边上)精确地满足应力边界条件，而只能应用圣维南原理，使薄板全厚度上的应力分量所组成的内力整体地满足边界条件。因此，在讨论边界条件以前，先来考察这些应力分量所组成的内力。

从薄板内取出一个平行六面体，它的三边的长度分别为 dx 、 dy 和 δ ，图 13-2。

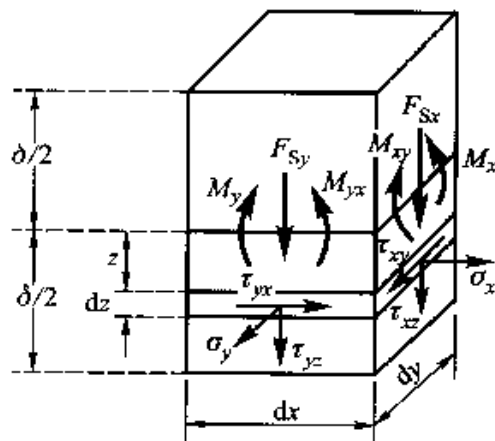


图 13-2

在 x 为常量的横截面上，作用着应力分量 σ_x 、 τ_{xy} 和 τ_{xz} 。因为 σ_x 及 τ_{xy} 都和 z 成正比，所以它们在薄板全厚度上的代数和分别等于零，只能分别合成为弯矩及扭矩。

在该横截面的每单位宽度上，应力分量 σ_x 合成为弯矩

$$M_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (\sigma_x \cdot 1 dz) z = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_x dz \quad (a)$$

将(13-7)中的第一式代入，对 z 进行积分，得

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z^2 dz \\ &= -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

与此相似，应力分量 τ_{xz} 将合成为扭矩

$$M_{xx} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \tau_{xz} dz \quad (b)$$

将(13-7)中的第三式代入,对 z 进行积分,得

$$M_{xx} = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z^2 dz = -\frac{E\delta^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

应力分量 τ_{xz} 只可能合成为横向剪力,在每单位宽度上为

$$F_{Sx} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{xz} dz \quad (c)$$

将(13-8)中的第一式代入,对 z 进行积分,得

$$\begin{aligned} F_{Sx} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left(z^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) dz \\ &= -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \end{aligned}$$

同样,在 y 为常量的横截面上,每单位宽度内的 σ_y 、 τ_{xy} 和 τ_{yx} 也分别合成为如下的弯矩、扭矩和横向剪力:

$$M_y = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_y dz = -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (d)$$

$$M_{yy} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \tau_{yx} dz = -\frac{E\delta^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = M_{xy}, \quad (e)$$

$$F_{Sy} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{yx} dz = -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (f)$$

利用公式(13-11),各个内力的表达式可以简写为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} = M_{yx} &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ F_{Sx} &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad F_{Sy} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (13-12)$$

其中的前三式也可以再改写为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D(\chi_x + \mu\chi_y), \quad M_y = D(\chi_y + \mu\chi_x), \\ M_{xy} = M_{yx} &= D(1-\mu)\chi_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (13-13)$$

利用本节中导出的公式以及(13-10)和(13-11),从(13-7)、(13-8)、(13-9)三式中消去 w ,可以得出各个应力分量与弯矩、扭矩、横向剪力或荷载之间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x}{\delta^3}z, & \sigma_y &= \frac{12M_y}{\delta^3}z, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{12M_{xy}}{\delta^3}z, \\ \tau_{xz} &= \frac{6F_{sx}}{\delta^3}\left(\frac{\delta^2}{4} - z^2\right), & \tau_{yz} &= \frac{6F_{sy}}{\delta^3}\left(\frac{\delta^2}{4} - z^2\right), \\ \sigma_z &= -2q\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{\delta}\right)^2\left(1 + \frac{z}{\delta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (13-14)$$

注意：以上所提到的内力，都是作用在薄板每单位宽度上的内力，所以弯矩和扭矩的量纲都是 LMT^{-2} ，而不是 L^2MT^{-2} ；横向剪力的量纲是 MT^{-2} ，而不是 LMT^{-2} 。

还须注意：内力 M_x 、 M_y 、 F_{sx} 、 M_y 、 M_{yx} 、 F_{sy} 的正负号决定于表达式 (a) 至 (f)，而不能另行规定（也不必另行规定）。按照坐标 z 及应力分量的正负号规定，图 13-2 中所示的内力是正的，相反的内力则是负的。

正应力 σ_x 及 σ_y 分别与弯矩 M_x 及 M_y 成正比，称为弯应力；切应力 τ_{xy} 与扭矩 M_{xy} 成正比，称为扭应力；切应力 τ_{xz} 及 τ_{yz} 分别与横向剪力 F_{sx} 及 F_{sy} 成正比，称为横向切应力；正应力 σ_z 与荷载 q 成正比，称为挤压应力。

在薄板弯曲问题中，一定荷载引起的弯应力和扭应力，在数值上最大，因而是主要的应力；横向切应力在数值上较小，是次要的应力；挤压应力在数值上更小，是更次要的应力。因此，在计算薄板的内力时，主要是计算弯矩和扭矩，横向剪力一般都无须计算。根据这个理由，在一般的工程手册中，只给出弯矩和扭矩的计算公式或计算图表，而并不提到横向剪力。又由于目前在钢筋混凝土建筑结构的设计中，大都按照两向的弯矩来配置两向的钢筋，而并不考虑扭矩的作用，因此，一般的工程手册中也就不给出扭矩的计算公式和计算图表。

弹性曲面的微分方程 (13-10)，也可以根据“内力与荷载成平衡”的条件导出如下。试考虑薄板的任一微分块，它的中面的尺寸为 dx 及 dy ，图 13-3。为简单起见，图中只画出该微分块的中面，并将荷载及横截面上的内力画在中面上。荷载及剪力用力矢表示；弯矩及扭矩，按照右手螺旋法则，用矩矢表示。

以通过微分块中心而平行于 y 轴及 x 轴的直线为矩轴，分别写出力矩的平衡方程，简化以后，略去微量，得到

$$F_{sx} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \quad F_{sy} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad (13-15)$$

再写出 z 方向的力的平衡方程，简化以后，略去微量，得到

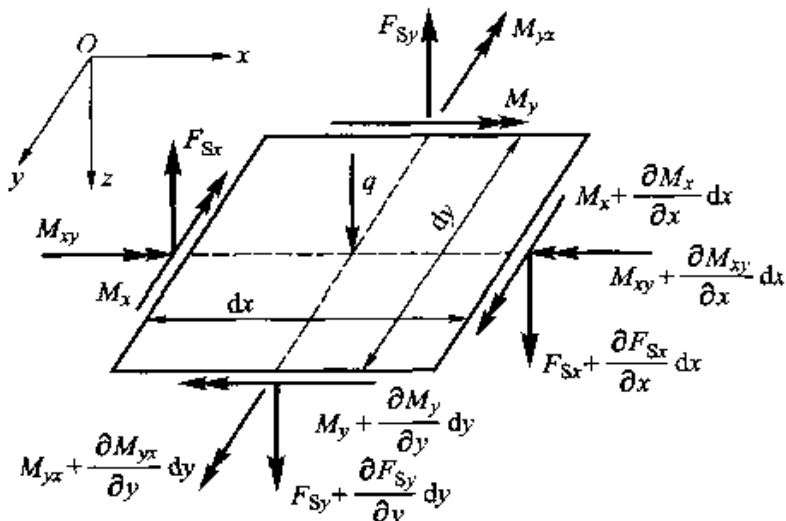


图 13-3

$$\frac{\partial F_{Sx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y} + q = 0. \quad (g)$$

将(13-15)式代入, 注意 $M_{yx} = M_{xy}$, 即得用弯矩、扭矩及荷载表示的以后要用到的平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0. \quad (13-16)$$

将上式中的弯矩及扭矩按照公式(13-12)用 w 表示, 就将又一次得出弹性曲面的微分方程(13-10), 即

$$D \nabla^4 w = q,$$

这样推导比较简单, 同时也能明确表示, 弹性曲面微分方程是薄板在横向的平衡方程, 即, 薄板每单位面积所受的弹性力(内力)与荷载(外力)成平衡。但是, 由于这样推导时没有把横向剪力用 w 表示, 所以得不出横向切应力与横向剪力之间的关系式。

§ 13-4 边界条件。扭矩的等效剪力

在 § 13-2 中已经指出, 求解薄板的小挠度弯曲问题, 首先要在板边的边界条件下由微分方程(13-10)求出挠度 w 。

本节中以矩形薄板为例, 说明各种边界处的边界条件。假定矩形薄板 $OABC$ 的 OA 边是夹支边, 图 13-4, OC 边是简支边, AB 边和 BC 边是自由边。

沿着夹支边 $OA(x=0)$, 薄板的挠度 w 等于零, 弹性曲面在 x 方向的斜率 $\frac{\partial w}{\partial x}$ (也就是绕 y 轴的转角)也等于零, 所以边界条件是

$$(w)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad (13-17)$$

注意：因为前一个边界条件已经保证 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 在该边界上

等于零，所以 $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x=0} = 0$ 并不是一个独立的条件。

如果这个夹支边由于支座沉陷而发生挠度及转角，则上列二式的右边将不等于零而分别等于已知的挠度及转角（它们一般是 y 的函数）。

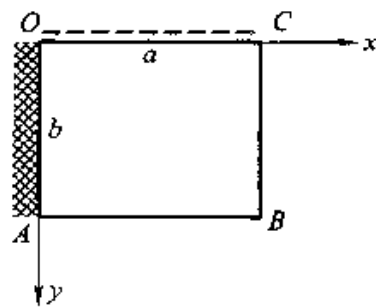


图 13-4

沿着简支边 OC ($y=0$)，薄板的挠度 w 等于零，弯矩 M_x 也等于零，所以边界条件是

$$(w)_{y=0} = 0, \quad (M_x)_{y=0} = 0 \quad (a)$$

利用(13-12)中的第二式，条件(a)可以全部用 w 表示为

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = 0 \quad (b)$$

但是，如果前一条件得到满足，即挠度 w 在整个边界上都等于零，则 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 也在整个边界上都等于零，所以简支边 OC 上的边界条件(b)可以简写为

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0 \quad (13-18)$$

如果这个简支边由于支座沉陷而发生挠度，并且还受有分布的力矩荷载（它们一般是 x 的函数），则边界条件(a)中二式的右边将不等于零，而分别等于已知挠度和已知力矩荷载。这样，式(b)及(13-18)式都不适用，但仍然可以通过(13-12)式把边界条件用 w 来表示。

沿着自由边，例如 AB 边 ($y=b$)，薄板的弯矩 M_x 和扭矩 M_{xy} 以及横向剪力 F_{sx} 都等于零，因而有三个边界条件

$$(M_x)_{y=b} = 0, \quad (M_{xy})_{y=b} = 0, \quad (F_{sx})_{y=b} = 0 \quad (c)$$

但是，如基尔霍夫所指出，薄板任一边界上的扭矩都可以变换为等效的横向剪力，和原来的横向剪力合并，因而式(c)中后二式所示的两个条件可以归并为一个条件，分析如下。

暂时假定 AB 边为任意边界（不一定是自由边），在其一段微小长度 $EF = dx$ 上面，有扭矩 $M_{xy} dx$ 作用着，图 13-5a。将这个扭矩 $M_{xy} dx$ 变换为等效的两个力 M_{xy} ，一个在 E 点，向下，另一个在 F 点，向上，图 13-5b。根据圣维南原理，这样的等效变换，只会显著影响这一小段边界近处的应力，而其余各处的应力不会受到显著的影响。同样，在相邻的微小长度 $FG = dx$ 上面，扭矩

$(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx)$ 也可以变换为两个力 $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$, 一个在 F 点, 向下, 另一个在 G 点, 向上。这样, 在 F 点的两个力合成为向下的 $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$, 从而边界 AB 上的分布扭矩就变换为等效的分布剪力 $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$ 。因此, 在边界 AB 上 ($y=b$), 总的分布剪力 (也就等于分布反力) 是

$$F_{S_y}^t = F_{S_y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}。$$

此外, 由图 13-5b 可见, 在 A 点和 B 点, 还有未被抵消的集中剪力 (也就是有集中反力)

$$F_{SAB} = (M_{yx})_A, \quad F_{SBA} = (M_{yx})_B \quad (d)$$

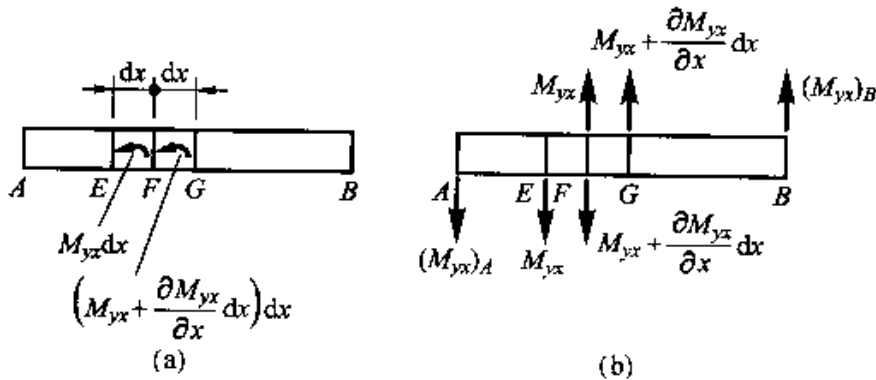


图 13-5

现在, 如果 AB 是自由边, 按照以上所述的变换, 它的边界条件 (c) 就可以改写为

$$(M_y)_{y=b} = 0, \quad (F_{S_y}^t)_{y=b} = \left(F_{S_y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right)_{y=b} = 0, \quad (e)$$

其中前一个条件仍然表示弯矩等于零, 而后一个条件则表示总的分布剪力等于零, 即分布反力等于零 (但是 F_{S_y} 和 M_{yx} 并不必分别等于零)。通过 (13-12) 式, 自由边 AB 的边界条件 (e) 可以改用 w 表示成为

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} = 0. \quad (13-19)$$

如果在这个自由边上有分布的力矩荷载 M 和分布的横向荷载 F_y (它们一般是 x 的函数), 则 (e) 中两式的右边将不等于零, 而分别等于 M 及 F_y 。这时, 边界条件 (13-19) 将不适用, 但也不难利用表达式 (13-12) 导出用 w 表示的边界条件。

同样, 沿着边界 BC ($x=a$), 扭矩 M_{xy} 也可以变换为等效的分布剪力 $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$,

而总的分布剪力为

$$F_{sx}^t = F_{sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (13-20)$$

此外, 在 C 点和 B 点, 还分别有集中剪力(即集中反力)

$$F_{sCB} = (M_{xy})_C, \quad F_{sBC} = (M_{xy})_B \quad (f)$$

因此, 如果 BC 是自由边, 则边界条件也可以变换成为

$$(M_x)_{x=a} = 0, \quad (F_{sx}^t)_{x=a} = \left(F_{sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0, \quad (g)$$

或再通过表达式(13-12)改用挠度 w 表示成为

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0. \quad (13-21)$$

当然, 如果这个自由边上有分布的力矩荷载 M 及分布的横向荷载 F_v (它们一般是 y 的函数), 则(g)中两式的右边就不等于零, 而分别等于 M 及 F_v , 边界条件(13-21)就要作相应的修改。

在两边相交的一点, 例如图 13-4 中的 B 点, 由(d)中的第二式及(f)中的第二式可见, 总的集中反力为

$$F_{SB} = F_{sBA} + F_{sBC} = (M_{xy})_B + (M_{xy})_B = 2(M_{xy})_B, \quad (h)$$

或通过(13-12)中的第三式改写为

$$F_{SB} = -2D(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B \quad (13-22)$$

注意: 由式(d)、式(f)及式(h)等可见, 集中剪力或集中反力的正负号决定于角点处的扭矩的正负号, 而不能另行规定(也不必另行规定)。据此, F_{sA} 及 F_{sC} 以沿 z 轴的正向时为正, 而 F_{sB} 及 F_{sD} 以沿 z 轴的负向时为正。

现在, 假定 B 点是自由边 AB 和自由边 BC 的交点, 而在 B 点也并没有支柱对薄板施以上述集中反力, 则在 B 点显然还应有角点条件 $F_{sB} = 0$, 即

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b} = 0. \quad (13-23)$$

读者试证: 如果在 B 点有集中荷载 F , 沿 z 轴的正方向, 则在该点将有角点条件

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b} = \frac{F}{2D(1-\mu)}.$$

假定 B 点是自由边 AB 和自由边 BC 的交点, 但在 B 点有支柱承受反力, 则在 B 点有角点条件

$$(w)_B = (w)_{x=a, y=b} = 0, \quad (13-24)$$

或者有角点条件

$$(w)_B = (w)_{x=a, y=b} = \zeta,$$

其中 ζ 为支柱上端的沉陷。在这种情况下, 解出 $w(x, y)$ 以后, 支柱反力可用 (13-22) 式求得。

绝大多数的板边, 是支承在梁上而且与梁刚连, 成为薄板的所谓弹性支承边。显然, 如果梁的弯曲刚度和扭转刚度都很大, 则板边可以当做夹支边; 如果两者都很小, 则板边可以当做自由边; 如果梁的弯曲刚度很大而扭转刚度很小, 则板边可以当做简支边。

在有些情况下, 梁的扭转刚度很小, 但弯曲刚度既不很大也不很小。这时, 板边的边界条件之一是弯矩等于零, 而第二个边界条件是: 板边的分布剪力等于梁所受分布荷载。例如, 设图 13-4 中 $x=0$ 的边界是这样一种边界, 则上述第二个边界条件是

$$(F_{sz}^t)_{x=0} = p, \quad (i)$$

其中 p 是梁所受分布荷载(薄板对梁所施的分布力), 以沿 z 轴的正向时为正。

由于板边与梁刚连, 梁的挠度就等于薄板的挠度 w , 按照材料力学中关于梁的理论, 我们有

$$EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=0} = p, \quad (j)$$

其中 EI 是梁的弯曲刚度。于是由式 (i) 及式 (j) 得到

$$\left[-F_{sz}^t + EI \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right]_{x=0} = 0。$$

将 (13-20) 式代入, 再将 F_{sz} 及 M_{xy} 用 w 表示, 即得边界条件

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{EI}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right]_{x=0} = 0。$$

与上相似, 设图 13-4 中 $x=a$ 的边界也是这样一个边界, 则得出边界条件

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{EI}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right]_{x=a} = 0。$$

读者试针对 y 为常量的边界导出与上相似的边界条件。

§ 13-5 简单例题

作为例题, 设有椭圆形薄板, 图 13-6, 其边界方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0。 \quad (a)$$

试取挠度的表达式为

$$w = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad (b)$$

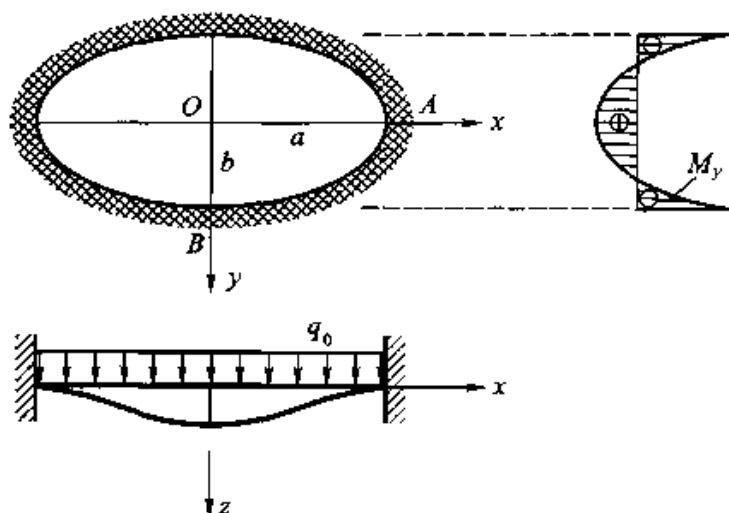


图 13-6

其中的 m 是任意常数。

由式(b)及式(a)可见, 在薄板的边界上有 $w=0$, 同时又有

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{4mx}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{4my}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0。$$

因此, 为了式(b)能满足边界条件, 薄板的边界必须是夹支边。

将式(b)代入弹性曲面的微分方程(13-10), 得

$$D \left(\frac{24m}{a^4} + \frac{16m}{a^2b^2} + \frac{24m}{b^4} \right) = q_0 \quad (c)$$

因为 m 是常数, 所以 q 必须是常数, 可见薄板所受的荷载必须是均布荷载, 即 $q=q_0$ 。由式(c)求出 m , 再代入式(b), 得

$$w = \frac{q_0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2}{8D \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{3}{b^4} \right)} \quad (d)$$

这就是夹支边椭圆薄板在均布荷载 q_0 作用下的挠度表达式, 它已经满足了基本微分方程和边界条件, 因而是正确解答。

有了挠度表达式(d), 就可以按照公式(13-12)求得内力。例如, 按照(13-12)中的前二式, 由式(d)得到弯矩

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= -\frac{q_0}{2 \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{3}{b^4} \right)} \left[\left(\frac{3x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \mu \left(\frac{3y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^2b^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right], \quad (e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 &= -\frac{q_0}{2 \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right)} \left[\left(\frac{3y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^2 b^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \mu \left(\frac{3x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^2 b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right]. \quad (f)
 \end{aligned}$$

对于 O 点及 A 点, 图 13-6, 得到

$$\begin{aligned}
 (M_x)_{x=0, y=0} &= \frac{q_0 a^2 \left(1 + \mu \frac{a^2}{b^2} \right)}{2 \left(3 + 2 \frac{a^2}{b^2} + 3 \frac{a^4}{b^4} \right)}, \\
 (M_x)_{x=a, y=0} &= -\frac{q_0 a^2}{\left(3 + 2 \frac{a^2}{b^2} + 3 \frac{a^4}{b^4} \right)}.
 \end{aligned}$$

对于 O 点及 B 点, 图 13-6, 得到

$$(M_y)_{x=0, y=0} = \frac{q_0 b^2 \left(1 + \mu \frac{b^2}{a^2} \right)}{2 \left(3 + 2 \frac{b^2}{a^2} + 3 \frac{b^4}{a^4} \right)}, \quad (g)$$

$$(M_y)_{x=0, y=b} = -\frac{q_0 b^2}{\left(3 + 2 \frac{b^2}{a^2} + 3 \frac{b^4}{a^4} \right)}. \quad (h)$$

假定 a 大于 b , 则式 (g) 及式 (h) 所示的弯矩就是薄板中最大及最小的弯矩, 而 M_y 沿 y 轴的变化大致如图 13-6 所示。

命 a 趋于无限大, 则椭圆薄板成为跨度为 $2b$ 的平面应变情况下的固端梁。在式 (f) 中命 a 趋于无限大, 即得这一固端梁的弯矩表达式

$$M_y = -\frac{q_0 b^2}{6} \left(\frac{3y^2}{b^2} - 1 \right).$$

在梁的中央及两端, 弯矩分别为

$$\begin{aligned}
 (M_y)_{y=0} &= \frac{q_0 b^2}{6} = \frac{q_0 (2b)^2}{24}, \\
 (M_y)_{y=\pm b} &= -\frac{q_0 b^2}{3} = -\frac{q_0 (2b)^2}{12},
 \end{aligned}$$

和材料力学中的解答相同。

读者试证, 在圆形薄板中 ($b = a$), 弯矩、扭矩及横向剪力的最大绝对值分别为

$$\frac{q_0 a^2}{8}, \quad \frac{(1-\mu) q_0 a^2}{16}, \quad \frac{q_0 a}{2},$$

而应力分量的最大绝对值为

$$|(\sigma_x)_{\max}| = |(\sigma_y)_{\max}| = \frac{3}{4}q_0 \frac{a^2}{\delta^2},$$

$$|(\tau_{xy})_{\max}| = |(\tau_{yx})_{\max}| = \frac{3}{8}(1-\mu)q_0 \frac{a^2}{\delta^2},$$

$$|(\tau_{xz})_{\max}| = |(\tau_{yz})_{\max}| = \frac{3}{4}q_0 \frac{a}{\delta},$$

$$|(\sigma_z)_{\max}| = q_0.$$

作为另一个例题，设有四边简支的矩形薄板，图 13-7，其角点 B 由于支承构件的沉陷而发生挠度 $w_B = \zeta$ 。不计支承构件的弯曲形变，则 BC 边及 AB 边保持为直线，而它们的挠度将为

$$(w)_{x=a} = \frac{\zeta}{b}y, \quad (w)_{y=b} = \frac{\zeta}{a}x. \quad (i)$$

这也就是薄板挠度在该二边处的边界条件。在该二边处，还有薄板弯矩的边界条件

$$(M_x)_{x=a} = 0, \quad (M_y)_{y=b} = 0. \quad (j)$$

在 OA 边及 OC 边，边界条件为

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0, & (w)_{y=0} &= 0, \\ (M_x)_{x=0} &= 0, & (M_y)_{y=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

取薄板挠度的表达式为

$$w = \frac{\zeta}{ab}xy, \quad (l)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{D(1-\mu)\zeta}{ab}, \\ F_{Sx} &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = 0, \\ F_{Sy} &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = 0, \\ F'_{Sx} &= F_{Sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0, \\ F'_{Sy} &= F_{Sy} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

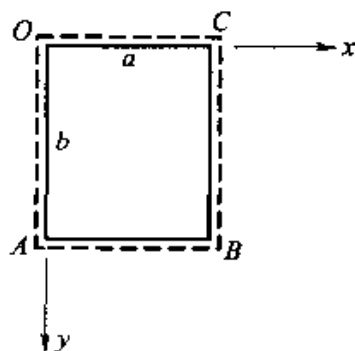


图 13-7

可见边界条件(i)、(j)、(k)都能满足。此外,由于这里有 $q=0$ (薄板不受荷载)而且 $\nabla^4 w=0$,所以薄板弹性曲面的微分方程(13-10)也能满足。于是可见,式(1)所示的挠度就是正确解答,式(m)所示的内力也就是实际内力。

注意,虽然分布反力 F_{sz}^1 及 F_{sz}^2 都等于零,但集中反力是存在的。按照(13-22)式,得到

$$F_{sz} = -2D(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_B = -\frac{2D(1-\mu)\zeta}{ab}$$

可见薄板在 B 点受有与 ζ 方向相同的反力 $2D(1-\mu)\zeta/ab$ 。同样可见,薄板还在 O 点受有同样大小的与 ζ 同向的反力,并在 A 点及 C 点还受有同样大小的与 ζ 反向的反力。

§ 13-6 简支边矩形薄板的纳维解法

四边简支的矩形薄板,图13-7,当并无支座沉陷时,其边界条件为

$$\begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} &= 0, \\ (w)_{x=a} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a} &= 0, \\ (w)_{y=0} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} &= 0, \\ (w)_{y=b} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=b} &= 0. \end{aligned}$$

纳维把挠度 w 的表达式取为如下的重三角级数:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (\text{a})$$

其中的 m 和 n 都是任意正整数。显然,上列的边界条件都能满足。将式(a)代入弹性曲面的微分方程(13-10),得到

$$\pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q. \quad (\text{b})$$

为了求出系数 A_{mn} ,须将式(b)右边的 q 展为与左边同样的重三角数,即

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (\text{c})$$

现在来求出式(c)中的系数 C_{mn} 。将式(c)的左右两边都乘以 $\sin \frac{i\pi x}{a}$ ，其中的 i 为任意正整数，然后对 x 积分，从 0 到 a ，注意

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & (m \neq i) \\ a/2, & (m = i) \end{cases}$$

就得到

$$\int_0^a q \sin \frac{i\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_{in} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

再将此式的左右两边都乘以 $\sin \frac{j\pi y}{b}$ ，其中的 j 也是任意正整数，然后对 y 积分，从 0 到 b ，注意

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0, & (n \neq j) \\ b/2, & (n = j) \end{cases}$$

就得到

$$\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} C_{ij}$$

因为 i 和 j 是任意正整数，可以分别换写为 m 和 n ，所以上式可以换写为

$$\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} C_{mn}$$

解出 C_{mn} ，代入式(c)，得到 q 的展式

$$q = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right] \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (13-25)$$

与式(b)对比，即得

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 ab D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (d)$$

当薄板受均布荷载时， q 成为常量 q_0 ，式(d)中的积分式成为

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= q_0 \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\ &= \frac{q_0 ab}{\pi^2 mn} (1 - \cos m\pi) (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

于是由式(d)得到

$$A_{mn} = \frac{4q_0 (1 - \cos m\pi) (1 - \cos n\pi)}{\pi^6 D mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

或

$$A_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^6 Dmn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots)$$

代入式(a), 即得挠度的表达式

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

由此可以用公式(13-12)求得内力。

当薄板在任意一点 (ξ, η) 受集中荷载 F 时, 可以用微分面积 $dxdy$ 上的均布荷载 $\frac{F}{dxdy}$ 来代替分布荷载 q 。于是, 式(d)中的 q 除了在 (ξ, η) 处的微分面积上等于 $\frac{F}{dxdy}$ 以外, 在其余各处都等于零。因此, 式(d)成为

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{\pi^4 abD \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \frac{F}{dxdy} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} dxdy \\ &= \frac{4F}{\pi^4 abD \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \end{aligned}$$

代入式(a), 即得挠度的表达式

$$w = \frac{4F}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (e)$$

由此可以用(13-12)式求得内力的表达式。

值得指出: 当 x 及 y 分别等于 ξ 及 η 时, 各个内力的级数表达式都不收敛(这是可以预见的, 因为在集中荷载的作用处, 应力是无限大, 从而内力也是无限大), 但挠度的级数表达式(e)仍然收敛于有限大的确定值。

显然, 如果在式(e)中命 x 和 y 等于常量而把 ξ 和 η 当做变量, 并取 $F=1$, 则该式将成为 (x, y) 点的挠度的影响函数, 它表明单位横向荷载在薄板上移动时, 该点的挠度变化规律。同样, 在由式(e)对 x 及 y 求导而得到的内力表达式中, 命 x 和 y 等于常量并取 $F=1$, 则各该表达式将成为在 (x, y) 点的各该内力的影响函数。

本节中所述的解法, 它的优点是: 不论荷载如何, 级数的运算都比较简单。它的缺点是只适用于四边简支的矩形薄板, 而且简支边不能受力矩荷载,

也不能有沉陷引起的挠度。它的另一个缺点是级数解答收敛很慢，在计算内力时，有时要计算很多项，才能达到工程上所需的精度。

§ 13-7 矩形薄板的莱维解法及一般解法

对于有两个对边被简支的矩形薄板，可以直接应用下面所述的莱维解法。

设图 13-8 所示的矩形薄板具有两个简支边 $x=0$ 及 $x=a$ ，其余两边 $y=\pm b/2$ 是任意边，承受任意横向荷载 q 。莱维把挠度 w 的表达式取为如下的单三角级数：

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (\text{a})$$

其中 Y_m 是 y 的任意函数，而 m 为任意正整数。极易看出，级数 (a) 能满足 $x=0$ 及 $x=a$ 两边的边界条件。因此，只须选择函数 Y_m ，使式 (a) 能满足弹性曲面的微分方程，即

$$\nabla^4 w = q/D, \quad (\text{b})$$

并在 $y = \pm b/2$ 的两边上满足边界条件。

将式 (a) 代入式 (b)，得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q}{D}. \quad (\text{c})$$

现在须将式 (c) 右边的 q/D 展为 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ 的级数。按照傅里叶级数展开的法则，得

$$\frac{q}{D} = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^a \frac{q}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right] \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

与式 (c) 对比，可见有

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m = \frac{2}{aD} \int_0^a q \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (\text{d})$$

这一常微分方程的解答可以写成

$$Y_m = A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + f_m(y),$$

其中 $f_m(y)$ 是任意一个特解，可以按照式 (d) 右边积分以后的结果来选择； A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 是任意常数，决定于 $y = \pm b/2$ 两边的边界条件。将上式代入式

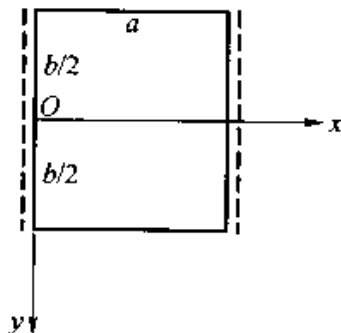


图 13-8

(a), 即得挠度 w 的表达式

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + f_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

作为例题, 设图 13-8 中的矩形薄板是四边简支的, 受有均布荷载 $q = q_0$ 。这时, 微分方程(d)的右边成为

$$\frac{2q_0}{aD} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{2q_0}{\pi Dm} (1 - \cos m\pi)。$$

于是微分方程(d)的特解可以取为

$$f_m(y) = \left(\frac{a}{m\pi} \right)^4 \frac{2q_0}{\pi Dm} (1 - \cos m\pi) = \frac{2q_0 a^4}{\pi^5 Dm^5} (1 - \cos m\pi)。$$

代入式(e), 并注意薄板的挠度 w 应当是 y 的偶函数, 因而有 $C_m = 0, D_m = 0$, 即得

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{2q_0 a^4}{\pi^5 Dm^5} (1 - \cos m\pi) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

应用边界条件

$$(w)_{y=\pm b/2} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=\pm b/2} = 0,$$

由式(f)得出决定 A_m 及 B_m 的联立方程

$$\left. \begin{aligned} \cosh \alpha_m A_m + \alpha_m \sinh \alpha_m B_m + \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 Dm^5} &= 0, \\ \cosh \alpha_m (A_m + 2B_m) + \alpha_m \sinh \alpha_m B_m &= 0, \end{aligned} \right\} (m = 1, 3, 5, \dots)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} \cosh \alpha_m A_m + \alpha_m \sinh \alpha_m B_m &= 0, \\ \cosh \alpha_m (A_m + 2B_m) + \alpha_m \sinh \alpha_m B_m &= 0, \end{aligned} \right\} (m = 2, 4, 6, \dots)$$

其中 $\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$ 。求得 A_m 及 B_m , 得出

$$A_m = -\frac{2(2 + \alpha_m \tanh \alpha_m) q_0 a^4}{\pi^5 Dm^5 \cosh \alpha_m}, \quad B_m = \frac{2q_0 a^4}{\pi^5 Dm^5 \cosh \alpha_m}; \quad (m = 1, 3, 5, \dots)$$

或者得出

$$A_m = 0, \quad B_m = 0. \quad (m = 2, 4, 6, \dots)$$

将求出的系数代入式(f), 得挠度 w 的最后表达式

$$w = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{m^5} \right) \left(1 - \frac{2 + \alpha_m \tanh \alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \right.$$

$$\frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2y}{b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (g)$$

并可以从而求得内力的表达式。

最大挠度发生在薄板的中心。将 $x = \frac{a}{2}$ 及 $y = 0$ 代入式 (g), 即得

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left(1 - \frac{2 + \alpha_m \tanh \alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \right)。$$

这个表达式中的级数收敛很快。例如, 对于正方形薄板, $b = a$, $\alpha_m = \frac{m\pi}{2}$, 得出

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} (0.314 - 0.004 + \dots) = 0.00406 \frac{q_0 a^4}{D}。$$

在级数中仅取两项, 就得到很精确的解答。但是, 在其他各点的挠度表达式中, 级数收敛就没有这样快。在内力的表达式中, 级数收敛得还要慢一些。

应用上面所述的莱维解法, 可以求得四边简支的矩形薄板在受各种横向荷载时的解答, 以及它在某一边界上受分布弯矩或发生沉陷时的解答, 此外, 在 §13-5 中已经给出这种薄板在某一角点发生沉陷时的解答。于是可以得出矩形薄板的一个一般解法, 说明如下。

采用结构力学中的力法, 位移法, 或混合法, 以四边简支的矩形薄板为基本系。对于任一夹支边, 以该边上的分布弯矩为一个未知函数 (具有待定系数的级数); 对于任一自由边, 以该边上的挠度为一个未知函数 (具有待定系数的级数); 对于两自由边相交而又无支柱的角点, 还须以该角点的沉陷为一个未知值。应用上面所述的解答, 求出夹支边上的法向斜率, 自由边上的分布反力, 以及二自由边交点处的集中反力 (当然是用上述待定系数及未知值以及已知荷载来表示)。命夹支边上的法向斜率等于零, 自由边上的分布反力等于零, 两自由边交点处的集中反力等于零, 即得足够的方程来求解各个待定系数及未知值, 从而求得薄板最后的挠度、斜率、内力和反力。当然, 求解时的运算是很繁的。在工程设计中, 一般总是利用现成的图表, 或是采用各种数值解法来进行计算。

对于在各种边界条件下承受各种横向荷载的矩形薄板, 很多专著和手册中给出了关于挠度和弯矩的表格或图线, 可供工程设计之用。为了节省篇幅, 对于只具有简支边和夹支边而不具有自由边的矩形薄板, 在弯矩的表格或图线中大都只给出泊松比等于某一指定数值时的弯矩。但是, 我们极易由此求得泊松比等于任一其他数值时的弯矩, 说明如下。

薄板的弹性曲面微分方程可以写成

$$\nabla^4(Dw) = q,$$

夹支边及简支边的边界条件不外乎如下的形式:

$$(Dw)_{x=x_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial Dw}{\partial x}\right)_{x=x_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 Dw}{\partial x^2}\right)_{x=x_1} = 0;$$

$$(Dw)_{y=y_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial Dw}{\partial y}\right)_{y=y_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 Dw}{\partial y^2}\right)_{y=y_1} = 0.$$

把 Dw 看做基本未知函数, 则显然可见, Dw 的微分方程及边界条件中都不包含泊松比, 因而 Dw 的解答不会包含泊松比, 于是 $\frac{\partial^2 Dw}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 Dw}{\partial y^2}$ 都不随泊松比而变。

现在, 根据公式(13-12), 当泊松比为 μ 时, 弯矩为

$$M_x = -\frac{\partial^2 Dw}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 Dw}{\partial y^2}, \quad M_y = -\frac{\partial^2 Dw}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 Dw}{\partial x^2}; \quad (h)$$

当泊松比为 μ' 时, 弯矩为

$$M'_x = -\frac{\partial^2 Dw}{\partial x^2} - \mu' \frac{\partial^2 Dw}{\partial y^2}, \quad M'_y = -\frac{\partial^2 Dw}{\partial y^2} - \mu' \frac{\partial^2 Dw}{\partial x^2}. \quad (i)$$

由式(h)解出 $\frac{\partial^2 Dw}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 Dw}{\partial y^2}$, 然后代入式(i), 得到关系式

$$\left. \begin{aligned} M'_x &= \frac{1}{1-\mu^2} [(1-\mu\mu')M_x + (\mu' - \mu)M_y], \\ M'_y &= \frac{1}{1-\mu^2} [(1-\mu\mu')M_y + (\mu' - \mu)M_x]. \end{aligned} \right\} \quad (13-26)$$

于是可见, 如果已知泊松比为 μ 时的弯矩 M_x 及 M_y , 就很容易求得泊松比为 μ' 时的弯矩 M'_x 及 M'_y 。在 $\mu=0$ 的情况下(表格或图线所示的 M_x 及 M_y 是取 $\mu=0$ 而算出的), 上式简化为

$$M'_x = M_x + \mu' M_y, \quad M'_y = M_y + \mu' M_x. \quad (13-27)$$

注意, 如果薄板具有自由边, 则由于自由边的边界条件方程中包含着泊松比, 因而 Dw 的解答将随泊松比而变。于是, 式(h)中的 Dw 与式(i)中的 Dw 一般并不相同, 因而就得出关系式(13-26)及(13-27)。

§ 13-8 圆形薄板的弯曲

求解圆形薄板的弯曲问题时, 和求解圆形边界的平面问题时一样, 用极坐标比较方便, 这时, 我们把挠度 w 和横向荷载 q 都看做是极坐标 ρ 和 φ 的函数, 即 $w = w(\rho, \varphi)$, $q = q(\rho, \varphi)$ 。进行与 § 4-3 中相同的运算, 可以得出下列

变换式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \\ &\quad \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \\ &\quad \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \\ &\quad \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \\ \nabla^2 w &= \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

应用式(c), 弹性曲面的微分方程(13-10)可以交换成为

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = q_0 \quad (13-28)$$

在 ρ 为常量的横截面上, 应力分量 σ_ρ 、 $\tau_{\rho\varphi}$ 和 $\tau_{\rho z}$ 分别合成为弯矩 M_ρ 、扭矩 $M_{\rho\varphi}$ 和横向剪力 $F_{S\rho}$; 在 φ 为常量的横截面上, 应力分量 σ_φ 、 $\tau_{\varphi\rho}$ 和 $\tau_{\varphi z}$ 分别合成为弯矩 M_φ 、扭矩 $M_{\varphi\rho}$ 和横向剪力 $F_{S\varphi}$ 。作用于薄板任一微分块的上述各个内力, 可用力矢和矩矢表示, 如图 13-9。

现在, 把 x 轴转到该微分块处的 ρ 方向, 使该微分块的 φ 坐标成为零, 则该微分块处的 σ_ρ 、 σ_φ 、 $\tau_{\rho\varphi}$ 、 $\tau_{\varphi\rho}$ 、 $\tau_{\rho z}$ 、 $\tau_{\varphi z}$ 分别成为该处的 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{xz} 、 τ_{yz} , 而该处的 M_ρ 、 M_φ 、 $M_{\rho\varphi}$ 、 $M_{\varphi\rho}$ 、 $F_{S\rho}$ 、 $F_{S\varphi}$ 分别成为该处的 M_x 、 M_y 、 M_{xy} 、 M_{yx} 、 F_{Sx} 、 F_{Sy} 。于是, 利用变换式(b)和(a), 命 $\varphi=0$, 即由(13-12)式得到

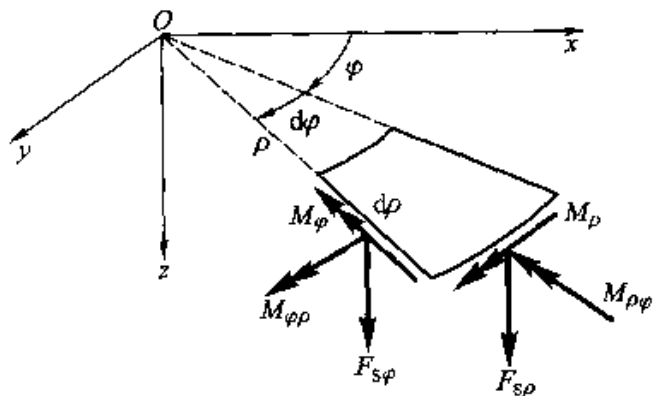


图 13-9

$$\begin{aligned}
 M_\rho &= (M_x)_{\varphi=0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\varphi=0} \\
 &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\
 M_\varphi &= (M_y)_{\varphi=0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\varphi=0} \\
 &= -D \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right], \\
 M_{\rho\varphi} &= M_{\varphi\rho} = (M_{xy})_{\varphi=0} = -D(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\varphi=0} \\
 &= -D(1-\mu) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\
 F_{s\rho} &= (F_{sx})_{\varphi=0} = -D \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \right)_{\varphi=0} = -D \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 w, \\
 F_{s\varphi} &= (F_{sy})_{\varphi=0} = -D \left(\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \right)_{\varphi=0} \\
 &= -D \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 w,
 \end{aligned} \tag{13-29}$$

其中的 $\nabla^2 w$ 如式(c)所示。

通过这样的变换，公式(13-14)就成为

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho &= \frac{12M_\rho}{\delta^3} z, & \sigma_\varphi &= \frac{12M_\varphi}{\delta^3} z, \\
 \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = \frac{12M_{\rho\varphi}}{\delta^3} z, \\
 \tau_{\rho z} &= \frac{6F_{s\rho}}{\delta^3} \left(\frac{\delta^2}{4} - z^2 \right), & \tau_{\varphi z} &= \frac{6F_{s\varphi}}{\delta^3} \left(\frac{\delta^2}{4} - z^2 \right), \\
 \sigma_z &= -2q \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{\delta} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{\delta} \right).
 \end{aligned} \tag{13-30}$$

现在来写出边界条件(坐标原点取在薄板的中心)：

设 $\rho = a$ 处有夹支边，则该处的挠度 w 等于零，薄板弹性曲面沿法向的斜率 $\frac{\partial w}{\partial \rho}$ 也等于零，即

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} = 0. \tag{13-31}$$

如果这个夹支边由于支座沉陷而发生挠度及法向斜率，则上列二式的右边将不等于零而分别等于已知的挠度及斜率(一般为 φ 的函数)。

设 $\rho = a$ 处有简支边, 则该处的挠度 w 等于零, 弯矩 M_ρ 也等于零, 即

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad (M_\rho)_{\rho=a} = 0. \quad (13-32)$$

如果这个简支边由于支座沉陷而发生挠度, 并且还受有分布的力矩荷载 M , 则上列二式的右边将不等于零, 而分别等于已知的挠度及力矩荷载 M (一般均为 φ 的函数)。

和 § 13-4 中相似, 在 ρ 为常量的截面上, 扭矩 $M_{\rho\varphi}$ 可以变换为等效的剪力 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho\varphi}}{\partial \varphi}$, 与横向剪力 $F_{s\rho}$ 合并而成为总的剪力

$$F_{s\rho}^t = F_{s\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho\varphi}}{\partial \varphi}. \quad (13-33)$$

在圆板中, 由于 ρ 为常量的截面是一个连续而不折的截面, 所以不存在集中剪力 F_s 。

这样, 设 $\rho = a$ 处有自由边, 则该处的边界条件成为

$$(M_\rho)_{\rho=a} = 0, \quad (F_{s\rho}^t)_{\rho=a} = \left(F_{s\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} \right)_{\rho=a} = 0, \quad (13-34)$$

其中前一个条件仍然表示弯矩等于零, 而后一个条件则表示总的分布剪力等于零。如果这个自由边上受有分布的力矩荷载 M 及横向荷载 F_v , 则上列二式的右边将不等于零而分别等于 M 及 F_v (一般均为 φ 的函数)。

在以上的边界条件中, 可以通过(13-29)式把内力改用 w 来表示, 从而把边界条件直接用 w 来表示。

§ 13-9 圆形薄板的轴对称弯曲

如果圆形薄板的边界情况是绕 z 轴对称的, 它所受的横向荷载也是绕 z 轴对称的(q 只是 ρ 的函数), 则该薄板的弹性曲面也将是绕 z 轴对称的(w 只是 ρ 的函数)。这时, 弹性曲面的微分方程(13-28)将简化为

$$D \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) = q, \quad (13-35)$$

这个常微分方程的解答是

$$w = C_1 \ln \rho + C_2 \rho^2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 + w_1, \quad (13-36)$$

其中的 w_1 是任意一个特解, 可以根据荷载 q 的分布按照(13-35)式的要求来选择; C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 是任意常数, 决定于边界条件。

当圆板所受的荷载系沿径向连续分布时, 可将该荷载近似地用多项式表示:

$$q = A_0 + A_1 \rho + A_2 \rho^2 + \dots \quad (a)$$

取特解为

$$w_1 = \rho^4 (B_0 + B_1 \rho + B_2 \rho^2 + \dots),$$

将 $w = w_1$ 及式(a)一并代入(13-35)式, 再将该式两边 ρ 的同幂次项的系数进行对比, 极易求得 B_0, B_1, B_2, \dots 。

如果圆板具有内外两个边界, 即, 在中心处有圆孔, 则可由两个边界处的四个边界条件来决定常数 C_1 至 C_4 。

当圆板只有一个边界时, 边界条件只有两个。所缺的两个条件可由中心处的条件来补足。第一个条件是, 不论圆板中心处的情况如何, 该处的挠度都不应为无限大, 即

$$(w)_{\rho=0} \neq \infty。$$

于是由(13-36)式可见, 必须取 $C_1 = 0$ 。第二个条件则须决定于圆板中心处的支承或荷载的情况。如果在中心处既无支座又无集中荷载, 则该处的内力应为有限大, 即

$$(M_\rho)_{\rho=0} \neq \infty, \quad (M_\varphi)_{\rho=0} \neq \infty, \quad (F_{\varphi\rho})_{\rho=0} \neq \infty,$$

而这些条件的共同要求是 $C_2 = 0$ 。如果在中心处有连杆支座, 则有中心条件

$$(w)_{\rho=0} = \zeta \text{ 或 } (w)_{\rho=0} = 0,$$

其中 ζ 为中心处的已知挠度(等于支座沉陷)。这时, 中心处的内力将为无限大。如果在中心处并无支座, 但有集中荷载, 则 $F_{\varphi\rho}$ 为已知(它可由圆板中心部分的平衡条件得来), 而这一条件可以通过(13-29)中的第四式化为 w 的条件。这时, 中心处的内力也将为无限大。

如果圆板所受的荷载沿径向并不连续, 而有间断之处, 则须将该板划分成若干区段, 使每一区段内的荷载沿径向均无间断。以图 13-10 所示的圆板为

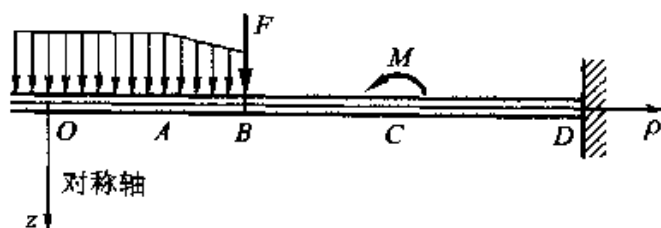


图 13-10

例, 必须将它分为 OA 、 AB 、 BC 及 CD 四个区段, 因为荷载在 A 、 B 、 C 三处是间断的。这时, 可以按照(13-36)式为四个区段写出挠度的四个表达式, 每一表达式中各有按分布荷载选取的特解项及四个任意常数。于是总共有 16 个待定的任意常数, 要求有 16 个方程来求解。

在 O 点有两个中心条件, 在 D 点有两个边界条件。在 A 、 B 、 C 三处中的每一处, 都可以有四个条件: 在 A 点, 两边的 w 、 $\frac{dw}{d\rho}$ 、 M_ρ 、 $F_{\varphi\rho}$ 都是相等的; 在 B 点, 两边的 w 、 $\frac{dw}{d\rho}$ 、 M_ρ 相等, 但两边的 $F_{\varphi\rho}$ 相差以 F (单位环向长度上的荷

载); 在 C 点, 两边的 w 、 $\frac{dw}{d\rho}$ 、 F_{sp} 相等, 但两边的 M_ρ 相差以 M (单位环向长度上的力矩荷载)。于是总共可以立出 16 个方程, 用来确定 16 个常数。当然, 如果圆板在中心处有圆孔, 则中心条件可换为孔边的边界条件。

这样来求解, 虽然总可以求得解答, 但运算工作量是相当大的。对这种问题, 宜用变分法求解, 见 § 14-5 至 § 14-8。有的手册中给出了这种问题的解答, 可供查用。

§ 13-10 轴对称弯曲问题的实例

首先分析无孔圆板受均布荷载的问题。相应于均布荷载 q_0 , 应将特解取为 $w_1 = B_0 \rho^4$ 。将 $w = w_1$ 代入 (13-35) 式, 求得 $B_0 = q_0/64D$ 。于是由 (13-36) 式得到

$$w = C_1 \ln \rho + C_2 \rho^2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 + \frac{q_0 \rho^4}{64D} \quad (a)$$

由于在薄板的中心并没有孔, 所以常数 C_1 和 C_2 就都应当等于零, 否则在薄板的中心 ($\rho = 0$), 挠度及内力将成为无限大。于是得

$$w = C_3 \rho^2 + C_4 + \frac{q_0 \rho^4}{64D}, \quad \frac{dw}{d\rho} = 2C_3 \rho + \frac{q_0 \rho^3}{16D} \quad (b)$$

并由公式 (13-29) 得

$$\left. \begin{aligned} M_\rho &= -2(1+\mu)DC_3 - \frac{3+\mu}{16}q_0\rho^2, \\ M_\varphi &= -2(1+\mu)DC_3 - \frac{1+3\mu}{16}q_0\rho^2, \\ M_{\rho\varphi} = M_{\varphi\rho} &= 0, \quad F_{sp} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

剪力 F_{sp} 可以较简单地根据平衡条件得来, 而不必利用公式 (13-29)。任意常数 C_3 和 C_4 决定于边界条件。

设半径为 a 的薄板具有夹支边, 则边界条件为

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad \left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=a} = 0。$$

于是由式 (b) 得

$$a^2 C_3 + C_4 + \frac{q_0 a^4}{64D} = 0, \quad 2a C_3 + \frac{q_0 a^3}{16D} = 0。$$

解出 C_3 及 C_4 , 即可由式 (b) 及式 (c) 得到

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q_0 a^4}{64D} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2, \\ M_\rho &= \frac{q_0 a^2}{16} \left[(1 + \mu) - (3 + \mu) \frac{\rho^2}{a^2} \right], \\ M_\varphi &= \frac{q_0 a^2}{16} \left[(1 + \mu) - (1 + 3\mu) \frac{\rho^2}{a^2} \right] \circ \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

此外, 取出半径为 ρ 的中间部分的薄板, 由平衡条件可以得到

$$2\pi\rho F_{s\rho} + q_0 \pi\rho^2 = 0,$$

从而得出

$$F_{s\rho} = -\frac{q_0 \rho}{2} \circ \quad (e)$$

在薄板的中心, 由式(d)得

$$\left. \begin{aligned} (w)_{\rho=0} &= \frac{q_0 a^4}{64D}, \\ (M_\rho)_{\rho=0} &= (M_\varphi)_{\rho=0} = \frac{(1 + \mu) q_0 a^2}{16} \circ \end{aligned} \right\} \quad (13-37)$$

在边界上, 由式(d)及式(e)得

$$(M_\rho)_{\rho=a} = -\frac{q_0 a^2}{8}, \quad (F_{s\rho})_{\rho=a} = -\frac{q_0 a}{2} \circ \quad (13-38)$$

设半径为 a 的薄板具有简支边, 则边界条件为

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad (M_\rho)_{\rho=a} = 0 \circ$$

于是由式(b)及式(c)得

$$\begin{aligned} a^2 C_3 + C_4 + \frac{q_0 a^4}{64D} &= 0, \\ -2(1 + \mu) D C_3 - \frac{(3 + \mu) q_0 a^2}{16} &= 0 \circ \end{aligned}$$

由此求出 C_3 及 C_4 , 再代回式(b)及式(c), 即得

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q_0 a^4}{64D} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} - \frac{\rho^2}{a^2} \right), \\ \frac{dw}{d\rho} &= -\frac{q_0 a^3}{16D} \left(\frac{3 + \mu}{1 + \mu} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\rho}{a}, \\ M_\rho &= \frac{(3 + \mu) q_0 a^2}{16} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right), \\ M_\varphi &= \frac{q_0 a^2}{16} \left[(3 + \mu) - (1 + 3\mu) \frac{\rho^2}{a^2} \right] \circ \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

剪力 F_{φ} , 仍然如式(e)所示。

在薄板的中心, 由式(f)得

$$\left. \begin{aligned} (w)_{\rho=0} &= \frac{(5+\mu)q_0a^4}{64(1+\mu)D}, \\ (M_\rho)_{\rho=0} &= (M_\varphi)_{\rho=0} = \frac{(3+\mu)q_0a^2}{16}. \end{aligned} \right\} \quad (13-39)$$

在边界上, 由式(f)及式(e)得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=a} &= -\frac{q_0a^3}{8(1+\mu)D}, \\ (F_{\varphi})_{\rho=a} &= -\frac{q_0a}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (13-40)$$

其次, 设有半径为 a 的简支边圆形薄板, 不受横向荷载, 但在边界上受有均布力矩荷载 M 。这时, 由于 q 等于零, 因而特解 w_1 , 可以取为等于零。假定薄板中心并没有孔, 则常数 C_1 及 C_2 仍然等于零。于是由(13-36)式得

$$w = C_3\rho^2 + C_4, \quad \frac{dw}{d\rho} = 2C_3\rho, \quad (g)$$

并由公式(13-29)得

$$M_\rho = M_\varphi = -2(1+\mu)DC_3. \quad (h)$$

边界条件是

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad (M_\rho)_{\rho=a} = M_0.$$

将(g)中的第一式及式(h)代入, 求出 C_3 及 C_4 , 即得

$$w = \frac{Ma^2}{2(1+\mu)D} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right),$$

$$\frac{dw}{d\rho} = -\frac{Ma}{(1+\mu)D} \frac{\rho}{a},$$

$$M_\rho = M_\varphi = M_0.$$

最后, 设有内半径为 a 而外半径为 b 的圆环形薄板, 内边界简支而外边界自由, 在外边界上受有均布力矩荷载 M , 如图 13-11。因为薄板不受横向荷载, 所以特解 w_1 可以取为零, 于是有

$$w = C_1 \ln \rho + C_2 \rho^2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4. \quad (i)$$

应用公式(13-29)及(13-33), 可由上式得出

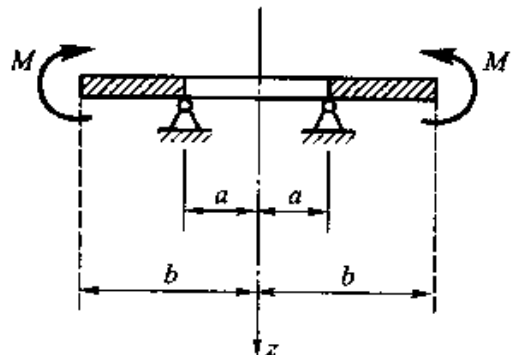


图 13-11

$$\left. \begin{aligned} M_\rho &= -D \left[-(1-\mu) \frac{C_1}{\rho^2} + (3+\mu) C_2 + 2(1+\mu) C_2 \ln \rho + 2(1+\mu) C_3 \right], \\ M_\varphi &= -D \left[(1-\mu) \frac{C_1}{\rho^2} + (1+3\mu) C_2 + 2(1+\mu) C_2 \ln \rho + 2(1+\mu) C_3 \right], \\ F_{S\rho}^1 = F_{S\varphi} &= -\frac{4DC_2}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

内外两边界处的四个边界条件为

$$\begin{aligned} (w)_{\rho=a} &= 0, & (M_\rho)_{\rho=a} &= 0, \\ (M_\rho)_{\rho=b} &= M, & (F_{S\rho}^1)_{\rho=b} &= 0. \end{aligned}$$

将式(i)及式(j)代入, 求出 C_1 至 C_4 , 再代回式(i)及式(j), 即得解答如下:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{Ma^2 \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 + 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \ln \frac{\rho}{a} \right)}{2(1+\mu)D \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)}, \\ M_\rho &= M \frac{1 - \frac{a^2}{\rho^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}}, & M_\varphi &= M \frac{1 + \frac{a^2}{\rho^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \\ F_{S\rho}^1 = F_{S\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

§ 13 - 11 圆形薄板在静水压力下的弯曲

当圆形薄板在其一面上受有静水压力时, 横向荷载总可以用图形 $ABDC$ 表示, 图 13 - 12。这个荷载总可以分解为两部分: 一部分是与薄板中心处集度相同的均布荷载 q_0 , 如图形 $ABFE$ 所示; 另一部分是反对称荷载

$$q = q_1 \frac{x}{a}, \quad (a)$$

如图形 $CEFD$ 所示。前一部分荷载所引起的内力, 已在前一节中加以讨论; 现在来讨论后一部分荷载所引起的内力。

将反对称荷载的表达式(a)用极坐标表示为

$$q = \frac{q_1}{a} \rho \cos \varphi,$$

然后代入弹性曲面的微分方程(13 - 28), 得

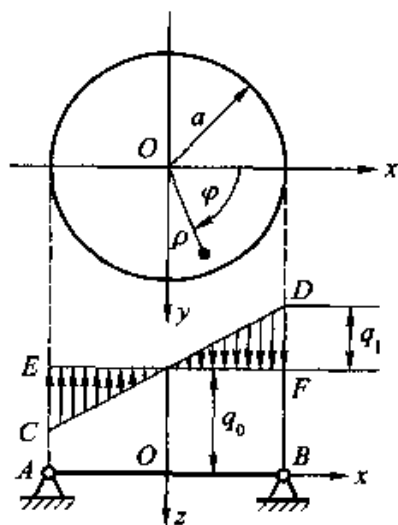


图 13 - 12

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{q_1}{aD} \rho \cos \varphi. \quad (\text{b})$$

显然, 这一微分方程的特解可以取为 $w_1 = m\rho^5 \cos \varphi$ 的形式, 其中 m 是常数。将

$w = w_1$ 代入式(b), 得 $m = \frac{q_1}{192aD}$, 从而得特解

$$w_1 = \frac{q_1}{192aD} \rho^5 \cos \varphi. \quad (\text{c})$$

为了求出补充解 w_2 , 根据特解(c)的形式, 假设

$$w_2 = f(\rho) \cos \varphi. \quad (\text{d})$$

将 $w = w_2$ 代入式(b)的齐次微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) = 0,$$

得

$$\cos \varphi \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right) \left(\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{f}{\rho^2}\right) = 0.$$

删去因子 $\cos \varphi$, 求解这一微分方程, 得

$$f(\rho) = C_1 \rho + C_2 \rho^3 + \frac{C_3}{\rho} + C_4 \rho \ln \rho. \quad (\text{e})$$

于是由式(c)、式(d)、式(e)得挠度 w 的全解

$$w = w_1 + w_2 = \frac{q_1 \rho^5 \cos \varphi}{192aD} + \left(C_1 \rho + C_2 \rho^3 + \frac{C_3}{\rho} + C_4 \rho \ln \rho\right) \cos \varphi. \quad (\text{f})$$

由于薄板的中心并没有孔, 为了薄板中心的挠度及内力不致成为无限大, 必须取 $C_3 = C_4 = 0$ 。于是式(f)简化为

$$w = \frac{q_1 \rho^5 \cos \varphi}{192aD} + (C_1 \rho + C_2 \rho^3) \cos \varphi. \quad (\text{g})$$

假定薄板的边界是夹支边, 则边界条件要求

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)_{\rho=a} = 0.$$

将式(g)代入, 求出常数 C_1 及 C_2 , 再代回式(g), 整理以后, 即得挠度的表达式

$$w = \frac{q_1 a^4}{192D} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \frac{\rho}{a} \cos \varphi,$$

从而由(13-29)式得出内力的表达式

$$M_\rho = -\frac{q_1 a^2}{48} \left[\left(5 \frac{\rho^2}{a^2} - 3\right) + \mu \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1\right) \right] \frac{\rho}{a} \cos \varphi,$$

$$M_{\varphi} = -\frac{q_1 a^2}{48} \left[\left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) + \mu \left(5 \frac{\rho^2}{a^2} - 3 \right) \right] \frac{\rho}{a} \cos \varphi,$$

$$M_{\rho\varphi} = M_{\varphi\rho} = -\frac{(1-\mu)q_1 a^2}{48} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\rho}{a} \sin \varphi,$$

$$F_{s\rho} = \frac{q_1 a}{24} \left(2 - 9 \frac{\rho^2}{a^2} \right) \cos \varphi, \quad F_{s\varphi} = \frac{q_1 a}{24} \left(3 \frac{\rho^2}{a^2} - 2 \right) \sin \varphi.$$

如果薄板的边界是简支边, 则边界条件要求

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad (M_{\rho})_{\rho=a} = 0.$$

将(13-29)中 M_{ρ} 的表达式代入, 得

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]_{\rho=a} = 0.$$

将式(g)代入, 求出常数 C_1 及 C_2 , 再代回式(g), 即得

$$w = \frac{q_1 a^4}{192D} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \left(\frac{7+\mu}{3+\mu} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\rho}{a} \cos \varphi,$$

从而得出

$$M_{\rho} = \frac{q_1 a^2}{48} (5+\mu) \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\rho}{a} \cos \varphi,$$

$$M_{\varphi} = \frac{q_1 a^2}{48} \left[\frac{(5+\mu)(1+3\mu)}{3+\mu} - (1+5\mu) \frac{\rho^2}{a^2} \right] \frac{\rho}{a} \cos \varphi,$$

$$M_{\rho\varphi} = M_{\varphi\rho} = -\frac{(1-\mu)q_1 a^2}{48} \left(\frac{5+\mu}{3+\mu} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\rho}{a} \sin \varphi,$$

$$F_{s\rho} = \frac{q_1 a}{24} \left(2 \frac{5+\mu}{3+\mu} - 9 \frac{\rho^2}{a^2} \right) \cos \varphi,$$

$$F_{s\varphi} = \frac{q_1 a}{24} \left(3 \frac{\rho^2}{a^2} - 2 \frac{5+\mu}{3+\mu} \right) \sin \varphi.$$

将本节中所得的解答与前一节中关于圆形薄板受均布荷载时的解答相叠加, 即得圆形薄板受静水压力时的解答。

§ 13-12 变厚度矩形薄板

在 § 13-3 中, 曾经针对等厚度薄板导出了用挠度表示弯矩和扭矩的表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -(1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中的弯曲刚度 D 是常量。考察上式的推导过程，可以看出，如果薄板的厚度是变化的，只要变化比较平缓，而且平分厚度的中面仍然是平面，则上式仍然成立，但必须把其中的弯曲刚度 D 看做是 x 和 y 的函数，即

$$D = D(x, y)。$$

将式(a)代入平衡方程(13-16)，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2(1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = q, \end{aligned}$$

它可以改写成

$$\nabla^2 (D \nabla^2 w) - (1-\mu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q,$$

还可以再改写成

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \nabla^2 D \nabla^2 w - \\ (1-\mu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q。 \end{aligned} \quad (13-41)$$

这是挠度 w 的变系数微分方程。随着薄板厚度的不同变化规律，该微分方程的系数取不同的函数形式，也就要求我们采用不同的方法来求解。下面将考察薄板厚度沿某一方向线性变化的情况。虽然这是一种特殊情况，但却是工程上比较常见的。

假定厚度 δ 沿 y 方向线性变化，图 13-13。命 $y = b/2$ 处的厚度为 δ_0 ，相应的弯曲刚度为

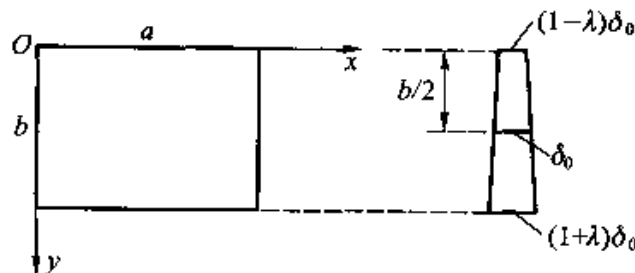


图 13-13

$$D_0 = \frac{E\delta_0^3}{12(1-\mu^2)} \quad (b)$$

于是, 在任意一点, 厚度可以表示成为

$$\delta = \left[1 + \lambda \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \right] \delta_0, \quad (c)$$

其中 $-1 \leq \lambda \leq 1$, 而弯曲刚度可以表示成为

$$\begin{aligned} D &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{E}{12(1-\mu^2)} \left[1 + \lambda \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \right]^3 \delta_0^3 \\ &= D_0 \left[1 + \lambda \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \right]^3 \end{aligned} \quad (d)$$

现在, 把挠度 w 看成是位置坐标 x 、 y 和参数 λ 的函数, 写成 λ 的多项式如下:

$$w = \sum_{n=0,1,2,\dots} w_n \lambda^n, \quad (e)$$

其中 w_n 只是 x 和 y 的函数, 不随 λ 而变。将式 (d) 及式 (e) 代入微分方程 (13-41), 可以得出 λ 的一个代数方程。因为这个方程在 λ 等于从 -1 到 1 的任意数值时都应成立, 所以在这个方程中, λ 的所有各次幂的系数都应当等于零。这样就得出如下一系列的常微分方程:

$$\nabla^4 w_0 = \frac{q}{D_0}, \quad (f)$$

$$\nabla^4 w_1 = -3 \left[\frac{4}{b} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_0 + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \nabla^4 w_0 \right], \quad (g)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_2 &= -3 \left[\frac{4}{b} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_1 + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \nabla^4 w_1 \right] - 3 \left\{ \frac{8}{b^2} \left[\nabla^2 w_0 - (1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0 \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{8}{b} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_0 + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right)^2 \nabla^4 w_0 \right\}, \end{aligned} \quad (h)$$

.....

在求解问题时, 可以首先在边界条件下由微分方程 (f) 解出 w_0 ; 然后将 w_0 代入微分方程 (g), 在边界条件下解出 w_1 ; 再将 w_0 及 w_1 代入微分方程 (h), 在边界条件下解出 w_2 , 等等。最后, 将求出的各个 w_n 一并代入式 (e), 即得所求的解答。

§ 13 - 13 变厚度圆形薄板

这里将只讨论轴对称圆形薄板受轴对称荷载时的情况。可以说, 只有在这

样的轴对称情况下，用经典方法求解才是可能的。

首先来导出用内力表示的平衡方程。图 13-14 表示薄板的一个微分块的中面，荷载及横向剪力用力矢表示，弯矩用矩矢表示。以微分块中心的切向线为矩轴，立出力矩的平衡方程，得到

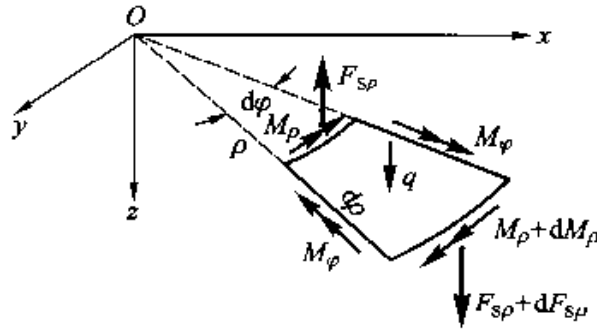


图 13-14

$$(M_\rho + dM_\rho)(\rho + d\rho)d\varphi - M_\rho\rho d\varphi - F_{s\rho}\rho d\varphi d\rho - M_\varphi d\rho d\varphi = 0。$$

简化以后，除以 $\rho d\rho d\varphi$ ，再略去微量，即得

$$\frac{dM_\rho}{d\rho} + \frac{M_\rho - M_\varphi}{\rho} = F_{s\rho}。 \quad (13-42)$$

在轴对称的情况下，(13-29)中的前两式成为

$$\left. \begin{aligned} M_\rho &= -D \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right), \\ M_\varphi &= -D \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} + \mu \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)。 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

用 θ 代表径向线段的转角冠以负号，即

$$\theta = -\frac{dw}{d\rho}, \quad (b)$$

则式(a)可以改写为

$$M_\rho = D \left(\frac{d\theta}{d\rho} + \mu \frac{\theta}{\rho} \right), \quad M_\varphi = D \left(\frac{\theta}{\rho} + \mu \frac{d\theta}{d\rho} \right), \quad (c)$$

其中的弯曲刚度 D 必须看做是 ρ 的函数，即 $D = D(\rho)$ 。

将式(c)代入(13-42)式，整理以后，得到

$$\frac{d^2 \theta}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{D} \frac{dD}{d\rho} \right) \frac{d\theta}{d\rho} + \left(\frac{\mu}{D} \frac{dD}{d\rho} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\theta}{\rho} = \frac{F_{s\rho}}{D}。 \quad (13-43)$$

这是 θ 的变系数二阶常数分方程。在边界条件下求出 θ 的解答以后，即可按照式(c)求得弯矩。

这里将考虑工程上比较常遇到的两种情况，分别如图 13-15a 及图 13-15b 所示。

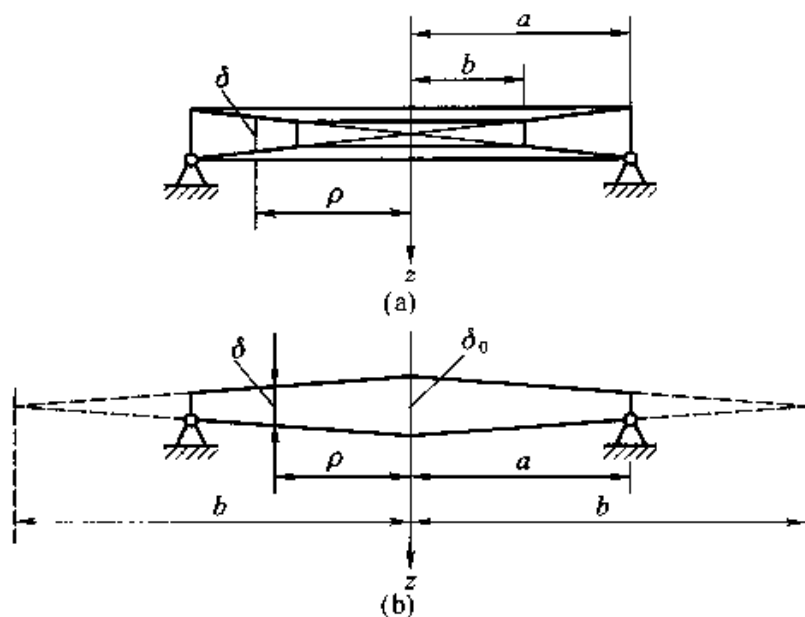


图 13-15

在图 13-15a 中，薄板的变厚度 δ 与径向坐标成正比，也就是 $\delta = c\rho$ 。于是薄板的弯曲刚度为

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{Ec^3\rho^3}{12(1-\mu^2)},$$

从而有

$$\frac{dD}{d\rho} = \frac{Ec^3\rho^2}{4(1-\mu^2)}, \quad \frac{1}{D} \frac{dD}{d\rho} = \frac{3}{\rho}.$$

代入微分方程(13-43)，整理以后，得到

$$\frac{d^2\theta}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{d\theta}{d\rho} + \frac{3\mu-1}{\rho^2} \theta = \frac{12(1-\mu^2)F_{sp}}{Ec^3\rho^3}.$$

引用量纲一的坐标 $r = \rho/a$ ，则上式成为

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d\theta}{dr} + \frac{3\mu-1}{r^2} \theta = \frac{12(1-\mu^2)F_{sp}}{Ec^3ar^3}. \quad (13-44)$$

常微分方程(13-44)的解答是

$$\theta = C_1 r^m + C_2 r^n + \theta_0. \quad (13-45)$$

式中的 θ_0 是任意一个特解，可以根据已知的 F_{sp} 来选取；指数 m 及 n 为：

$$m = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - (3\mu-1)}, \quad n = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - (3\mu-1)}. \quad (13-46)$$

任意常数 C_1 及 C_2 确定于内外两边界的边界条件。外边界的边界条件可能是 θ 为已知(夹支边)，或者是 M_ρ 为已知(简支边)，内边界的边界条件是 M_ρ 为已知(自由边)，而 M_ρ 的边界条件可以用(c)中的第一式变换成为 θ 的边界条件。

如果内外两个边界都是支承边(夹支边或简支边), 则 $F_{s\rho}$ 为未知, 读者试考虑如何处理。

在 $\mu = 1/3$ 的特殊情况下, 微分方程(13-44)简化为

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d\theta}{dr} = \frac{32F_{s\rho}}{3Ec^3ar^3},$$

而(13-46)式给出

$$m = 0, \quad n = -3.$$

于是解答(13-45)简化为

$$\theta = C_1 + \frac{C_2}{r^3} + \theta_{0c} \quad (13-47)$$

不论荷载如何, 边界条件如何, 解答都将是比较简单的。

在图 13-15b 中, 薄板的变厚度为

$$\delta = \delta_0 \left(1 - \frac{\rho}{b}\right).$$

引用量纲一的坐标 $r = \rho/b$, 则上式成为

$$\delta = \delta_0(1 - r),$$

而薄板的弯曲刚度为

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} = D_0(1-r)^3, \quad (d)$$

其中

$$D_0 = \frac{E\delta_0^3}{12(1-\mu^2)}.$$

微分方程(13-43)成为

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr}\right) \frac{d\theta}{dr} + \left(\frac{\mu}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{1}{r}\right) \frac{\theta}{r} = \frac{F_{s\rho} b^2}{D}.$$

将式(d)代入, 整理以后, 得到

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{1-r}\right) \frac{d\theta}{dr} - \left(\frac{1}{r} + \frac{3\mu}{1-r}\right) \frac{\theta}{r} = \frac{F_{s\rho} b^2}{D_0(1-r)^3}. \quad (e)$$

只有当 $\mu = 1/3$ 时, 微分方程(e)才有不太复杂的解答。这时, 该方程成为

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1-4r}{r(1-r)} \frac{d\theta}{dr} - \frac{1}{r^2(1-r)} \theta = \frac{F_{s\rho} b^2}{D_0(1-r)^3},$$

而它的解答是

$$\theta = C_1 \left(\frac{1+2r}{r}\right) + C_2 \frac{3r-2r^2}{(1-r)^2} + \theta_{0c} \quad (13-48)$$

特解 θ_0 可以根据已知的 $F_{s\rho}$ 来选取; 常数 C_1 及 C_2 确定于 $\rho = a$ 处的边界条件和

薄板中央的条件

$$(\theta)_{r=0} = 0, \quad \text{即} (\theta)_{r=0} = 0。$$

§ 13 - 14 文克勒地基上的基础板

放置在弹性地基上的薄板，在工程上是常常遇到的。当薄板承受横向荷载而发生挠度时，弹性地基将对薄板作用一定的分布反力，即所谓弹性抗力。弹性地基的最简单的计算模型是所谓文克勒地基。这种地基对薄板所施反力的集度 p ，是和薄板的挠度 w 成正比而方向相反，即

$$p = -kw, \quad (13-49)$$

其中的比例常数 k 称为基床系数或地基模量，它的量纲是 $L^{-2}MT^{-2}$ 。这样，薄板所受横向分布力的总集度将为 $q + p$ ，因而薄板弹性曲面的微分方程须改变成为

$$D\nabla^4 w = q + p = q - kw,$$

或

$$\nabla^4 w + \frac{k}{D}w = \frac{q}{D} \quad (13-50)$$

计算时需用的其他表达式和方程，则无须加以改变。

对于四边简支的矩形薄板，图 13-7，仍然可以应用纳维解法，将挠度的表达式取为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (a)$$

并将荷载 q 也展为同一形式的级数，如(13-25)式所示，即

$$q = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

将式(a)及式(b)代入微分方程(13-50)，即得

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k} \quad (c)$$

当薄板受均布荷载时， q 成为常量 q_0 ，由式(c)求出系数 A_{mn} ，然后代入式(a)，就得到解答

$$w = \frac{16q_0}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k \right]}。$$

当薄板在任意一点 (ξ, η) 受集中荷载 F 时, 可以与上相似地得到

$$w = \frac{4F}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad c$$

对于具有两个简支边 $x=0$ 及 $x=a$ 的矩形薄板, 图13-8, 仍然可以应用莱维解法, 将挠度的表达式取为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (d)$$

并将荷载 q 展为同一形式的级数, 即

$$q = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^a q \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad c \quad (e)$$

将式(d)及式(e)代入(13-50), 得到

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right) Y_m = \frac{2}{aD} \int_0^a q \sin \frac{m\pi x}{a} dx, \quad (f)$$

这一常微分方程的解答可以写成

$$Y_m = A_m \cosh \alpha_m y \cos \beta_m y + B_m \sinh \alpha_m y \sin \beta_m y + C_m \cosh \alpha_m y \sin \beta_m y + D_m \sinh \alpha_m y \cos \beta_m y + f_m(y), \quad (g)$$

其中的 $f_m(y)$ 是任意一个特解, 可以按照式(f)右边积分的结果来选择; A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 是任意常数, 而

$$\alpha_m = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D}} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \right]^{1/2},$$

$$\beta_m = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D}} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \right]^{1/2}.$$

利用 $y = \pm b/2$ 处的四个边界条件确定了 A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m , 即可由式(g)得出 Y_m , 从而由式(d)得出挠度的解答。

对于具有其他各种边界情况的矩形薄板, 也可以用四边简支的矩形薄板为基本系, 采用结构力学中的方法、位移法或混合法求解, 如§13-7中所述, 但计算工作量较大。用差分法求解则比较简便, 见§14-4。

当文克勒地基上薄板的全部边界均为自由边时, 它将具有一个重要的特性——在线性变化的横向荷载作用下, 薄板的弯曲内力全都等于零, 证明如下。

首先, 假定薄板只具有分段垂直于坐标轴的折线边界, 图13-16。薄板所受的横向荷载可以表示成为

$$q = A + Bx + Cy, \quad (h)$$

而弹性曲面的微分方程(13-50)成为

$$\nabla^4 w + \frac{k}{D} w = \frac{A + Bx + Cy}{D} \quad (i)$$

在 x 为常量的边界上, 有边界条件

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0。$$

在 y 为常量的边界上, 有边界条件

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0。$$

在分段边界的交点, 还有角点条件

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0。$$

现在, 试取挠度的表达式为

$$w = \frac{q}{k} = \frac{A + Bx + Cy}{k} \quad (j)$$

则微分方程(i)以及所有的边界条件和角点条件都能满足。因此, 式(j)所示的 w 就是正确解答, 而且由此求得的弯曲内力全都等于零。

当薄板具有任意的折线或曲线边界时, 我们总可以先用分段很短的、 x 或 y 为常量的折线边界来代替实际边界, 证明弯曲内力全都等于零, 然后命分段无限缩短而趋于实际边界, 也就可以证明弯曲内力仍然全都等于零。

§ 13 - 15 薄板的温度应力

当薄板的温度有所改变时, 就要在物理方程中考虑变温的影响。这样, 薄板中任意一点的物理方程将成为

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \alpha T, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) + \alpha T, \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy},$$

其中的 α 是线胀系数, $T = T(x, y, z)$ 是薄板中任意一点的变温。求解应力分量, 得到

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) - \frac{E\alpha T}{1 - \mu},$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) - \frac{E\alpha T}{1 - \mu},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy}。$$

将(13-5)式代入, 即得

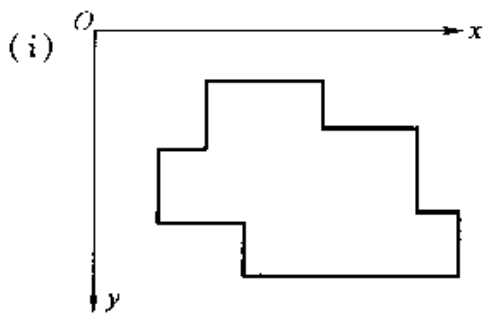


图 13 - 16

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

和 § 13-3 中同样地进行积分, 可由上式得出薄板横截面上的弯矩及扭矩的表达式如下:

$$\begin{aligned}M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{E\alpha}{1-\mu} \int_{-s/2}^{s/2} Tz dz, \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{E\alpha}{1-\mu} \int_{-s/2}^{s/2} Tz dz, \\ M_{xy} = M_{yx} &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

这些表达式可以改写成为

$$\left. \begin{aligned}M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - M_T, \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - M_T, \\ M_{xy} = M_{yx} &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\end{aligned} \right\} \quad (13-51)$$

其中的

$$M_T = \frac{E\alpha}{1-\mu} \int_{-s/2}^{s/2} Tz dz \quad (a)$$

称为变温的等效弯矩, 它是 x 和 y 的已知函数。

为了把横向剪力用 w 表示, 只须将 (13-51) 式代入平衡方程 (13-15)。这样就得到

$$\left. \begin{aligned}F_{sx} &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w - \frac{\partial M_T}{\partial x}, \\ F_{sy} &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w - \frac{\partial M_T}{\partial y}.\end{aligned} \right\} \quad (13-52)$$

据此, 又可将分布反力用 w 表示如下:

$$\left. \begin{aligned}F_{sx}^t &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] - \frac{\partial M_T}{\partial x}, \\ F_{sy}^t &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] - \frac{\partial M_T}{\partial y}.\end{aligned} \right\} \quad (13-53)$$

现在, 将(13-51)式代入平衡方程(13-16), 取 $q = 0$, 就得出薄板在变温作用下的弹性曲面微分方程

$$D \nabla^4 w = -\nabla^2 M_T。$$

这一方程可以改写成为

$$D \nabla^4 w = q_T, \quad (13-54)$$

其中的

$$q_T = -\nabla^2 M_T = -\frac{E\alpha}{1-\mu} \nabla^2 \int_{-\delta/2}^{\delta/2} Tz dz \quad (b)$$

称为变温的等效横向荷载, 它也是 x 和 y 的已知函数。

如果变温 T 沿薄板的横向没有变化, 即, T 只是 x 和 y 的函数而与 z 无关, 则有

$$\int_{-\delta/2}^{\delta/2} Tz dz = T \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z dz = 0。$$

于是由式(a)可见有 $M_T = 0$, 并由式(b)可见有 $q_T = 0$ 。这时, 把挠度的解答取为 $w = 0$, 可以满足弹性曲面微分方程(13-54)以及一切边界条件, 从而有 $M_x = M_y = M_{xy} = 0$ 。这就是说, 薄板既不发生挠度, 也没有任何弯矩或扭矩(当然也就没有横向剪力), 而只有平面应力。这种问题是第六章中讨论过的问题。

只有当变温 T 沿薄板的横向有变化时, 即当 T 随 z 变化时, 才会发生挠度和弯曲内力。在工程实际问题中, 通常都假定薄板的变温 T 沿横向是线性变化的。这样, 命薄板下面及上面的变温分别为 T' 及 T'' (它们只是 x 和 y 的函数, 但可以是不同的函数), 则有

$$T = \frac{T'' + T'}{2} - (T'' - T') \frac{z}{\delta}。$$

代入式(a), 得到等效弯矩

$$\begin{aligned} M_T &= \frac{E\alpha}{1-\mu} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left[\frac{T'' + T'}{2} - (T'' - T') \frac{z}{\delta} \right] z dz \\ &= \frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\delta^2}{12} (T' - T'') = \frac{(1+\mu) D\alpha (T' - T'')}{\delta}。 \end{aligned} \quad (13-55)$$

代入式(b), 得到等效横向荷载

$$q_T = -\frac{(1+\mu) D\alpha}{\delta} \nabla^2 (T' - T'')。 \quad (13-56)$$

由此可见, 为了求得薄板中由变温引起的弯曲内力, 可以先用(13-55)式求出 M_T , 并用(13-56)式求出 q_T , 然后在边界条件下由微分方程(13-54)求解 w 。但在这里必须注意: 在建立边界条件时, 不可忽略内力表达式中与 M_T 有关的项。有了挠度 w , 即可用(13-51)式求得弯矩及扭矩, 并用(13-52)式求得横向剪力。

习 题

13-1 矩形薄板 $OABC$, 图 13-17, 其 OA 边及 OC 边为简支边, AB 边及 BC 边为自由边。在 B 点受有沿 z 方向的集中荷载 F 。试证 $w = mxy$ 能满足一切条件, 并求出挠度、内力及反力。

$$\text{答案: } w = \frac{Fxy}{2(1-\mu)D}, \quad M_x = M_y = 0, \quad M_{xy} = -\frac{F}{2},$$

$$F_{sx}^i = F_{sy}^i = F_{sx}^o = F_{sy}^o = 0, \quad F_{sx}^o = F_{sx}^i = -F \text{ (与荷载反向)}, \quad F_{sy}^o = -F \text{ (与荷载同向)}。$$

13-2 半椭圆形薄板 $AOBC$, 图 13-18, 直线边界 AOB 为简支边, 曲线边界 ACB 为夹支边, 受有横向荷载 $q = \frac{q_1}{a}x$, 其中 q_1 为常量。试证

$$w = mx \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2$$

能满足一切条件, 并求出挠度及内力。

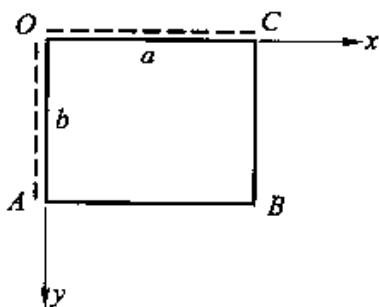


图 13-17

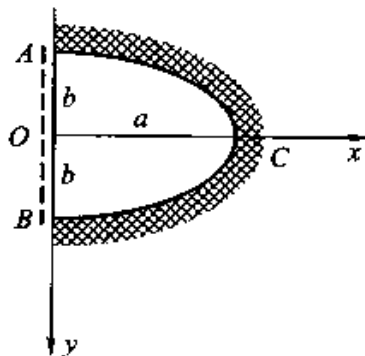


图 13-18

$$\text{答案: } w_{\max} = \frac{2\sqrt{5}q_1 a^4}{375 \left(5 + 2\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right) D}, \quad (M_x)_{x=a, y=0} = -\frac{q_1 a^2}{3 \left(5 + 2\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right)}$$

13-3 矩形薄板 $OABC$, 图 13-19, OA 边及 BC 边为简支边, OC 边及 AB 边为自由边, 不受横向荷载, 但在两个简支边上受大小相等而方向相反的均布力矩荷载 M 。试证, 为了薄板弯成柱面, 即 $w = f(x)$, 必须在自由边上施以均布力矩荷载 μM 。试求挠度、内力及反力。

$$\text{答案: } w = \frac{M}{2D}x(a-x), \quad M_x = M, \quad M_y = \mu M,$$

$$M_{xy} = M_{yx} = 0, \quad F_{sx}^i = F_{sy}^i = 0, \quad F_s = 0。$$

13-4 四边简支的矩形薄板, 图 13-20, 受有荷载

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}。$$

试证 $w = m \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ 能满足一切条件, 并求出挠度及内力。

$$\text{答案: } w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{\pi^4 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 D}, \quad M_{\max} = \frac{q_0 a^2 \left(1 + \mu \frac{a^2}{b^2} \right)}{\pi^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2}。$$

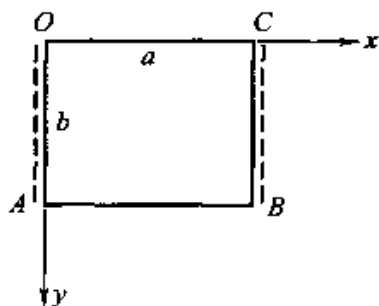


图 13-19

13-5 正方形薄板, 边长为 a , 四边简支, 在中点受集中荷载 F , 试求最大挠度。

答案: $0.0116Fa^3/D$

13-6 四边简支的正方形薄板, 边长为 a , 受均布荷载 q_0 , 试由 §13-7 中的表达式 (g) 导出弯矩、剪力、反力的表达式, 求出它们的最大值, 并求出角点处的集中反力。取 $\mu = 0.3$ 。

答案: 最大弯矩为 $0.0479q_0a^2$, 最大剪力为 $0.338q_0a$, 最大反力为 $0.420q_0a$, 集中反力为 $0.065q_0a^2$, 与荷载同向

13-7 圆形薄板, 半径为 a , 边界自由, 在一面上受锥形分布的横向荷载, 由另一面上的均布反力维持平衡, 图 13-21, 试求弯矩及剪力。

$$\text{答案: } M_\rho = \frac{13+7\mu}{360}q_0a^2 - \frac{3+\mu}{24}q_0\rho^2 + \frac{4+\mu}{45a}q_0\rho^3, \quad M_\varphi = \frac{13+7\mu}{360}q_0a^2 - \frac{1+3\mu}{24}q_0\rho^2 + \frac{1+4\mu}{45a}q_0\rho^3,$$

$$F_{\varphi\rho} = -\frac{q_0\rho}{3}\left(1 - \frac{\rho}{a}\right).$$

13-8 圆形薄板, 半径为 a , 边界夹支, 在中心受集中荷载 F , 图 13-22。试求薄板的挠度及内力。

$$\text{答案: } w = \frac{Fa^2}{16\pi D}\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} + 2\frac{\rho^2}{a^2}\ln\frac{\rho}{a}\right), \quad M_\rho = -\frac{F}{4\pi}\left[1 + (1+\mu)\ln\frac{\rho}{a}\right],$$

$$M_\varphi = -\frac{F}{4\pi}\left[\mu + (1+\mu)\ln\frac{\rho}{a}\right], \quad F_{\varphi\rho} = -\frac{F}{2\pi\rho}$$

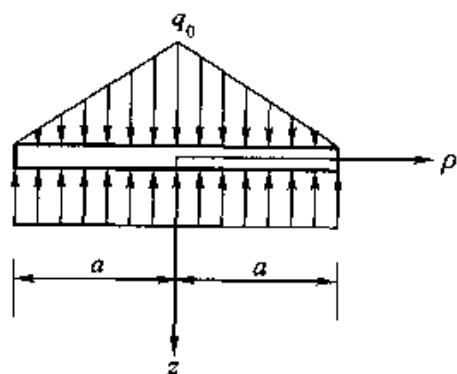


图 13-21

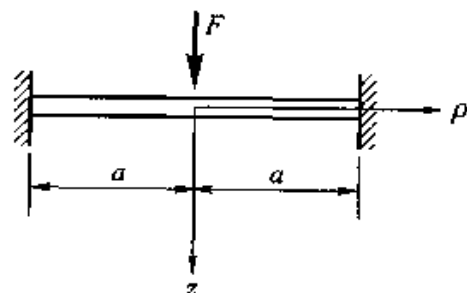


图 13-22

13-9 圆形薄板, 半径为 a , 边界夹支, 中心有连杆支座, 图 13-23。设连杆支座发

生沉陷 ζ ，试求薄板的挠度及内力。

$$\begin{aligned} \text{答案: } w &= \zeta \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} + 2 \frac{\rho^2}{a^2} \ln \frac{\rho}{a} \right), \\ M_\rho &= -\frac{4D\zeta}{a^2} \left[1 + (1 + \mu) \ln \frac{\rho}{a} \right], \\ M_\varphi &= -\frac{4D\zeta}{a^2} \left[\mu + (1 + \mu) \ln \frac{\rho}{a} \right], \\ F_{\text{sp}} &= -\frac{8D\zeta}{a^2 \rho}. \end{aligned}$$

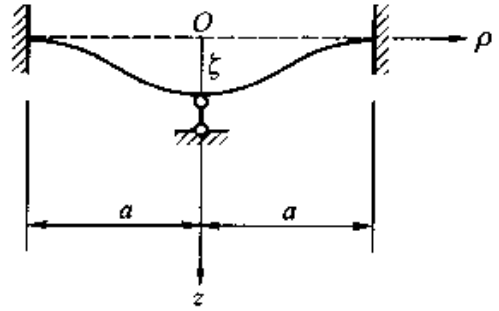


图 13-23

13-10 圆形薄板，半径为 a ，边界简支，中心有连杆支座，图 13-24。设板边受有均布力矩荷载 M ，试求挠度及内力。

$$\begin{aligned} \text{答案: } w &= \frac{M\rho^2}{(3 + \mu)D} \ln \frac{a}{\rho}, \quad M_\rho = M \left[1 + \frac{2(1 + \mu)}{3 + \mu} \ln \frac{\rho}{a} \right], \\ M_\varphi &= \frac{M}{3 + \mu} \left[(1 + 3\mu) + 2(1 + \mu) \ln \frac{\rho}{a} \right], \quad F_{\text{sp}} = \frac{4M}{(3 + \mu)\rho}. \end{aligned}$$

13-11 圆环形薄板，内半径为 a 而外半径为 b ，图 13-25，内边界简支而外边界自由，在内边界上受有均布力矩荷载 M ，试求挠度、弯矩及剪力。

$$\begin{aligned} \text{答案: } w &= \frac{Ma^2}{2(1 + \mu)D} \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 + 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{\rho}{a} \right), \\ M_\rho &= M \frac{\frac{b^2}{\rho^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1}, \quad M_\varphi = -M \frac{\frac{b^2}{\rho^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1}, \quad F_{\text{sp}} = 0. \end{aligned}$$

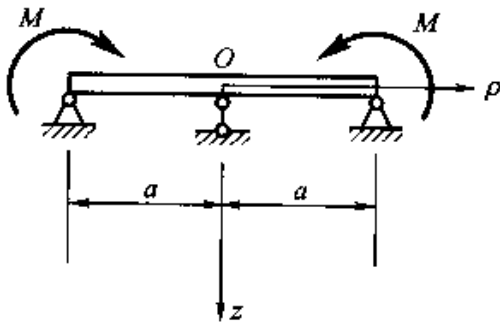


图 13-24

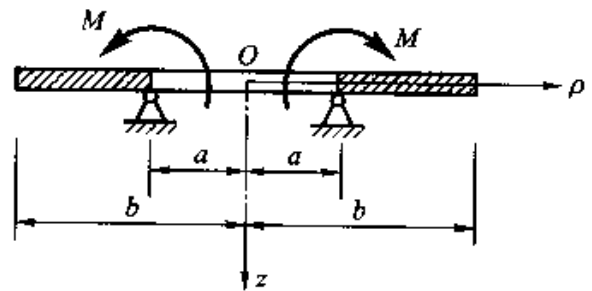


图 13-25

13-12 设图 13-15a 所示的圆板具有厚度 $\delta = c\rho$ ， $\mu = 1/3$ ，沿着 $\rho = b$ 的自由边受有均匀分布的横向荷载，而总荷载为 F ，试求板内的弯矩。

$$\text{答案: } M_\rho = \frac{5F}{12\pi} \left[\frac{\frac{\rho^2}{a^2}}{1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}} - 1 + \frac{\frac{b}{a} \left(1 + \frac{b}{a} \right)}{\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\rho}{a}} \right], \quad M_\varphi = \frac{F}{12\pi} \left(\frac{15 \frac{\rho^2}{a^2}}{1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right).$$

13-13 设图 13-15b 中所示的圆板具有 $\mu = 1/3$ ，在其边界上受有均匀分布的力矩荷

载 M ，试求板内的径向线段的转角和弯矩。

$$\text{答案: } \theta = \frac{3Mb \left(3 - 2 \frac{\rho}{b} \right) \frac{\rho}{b}}{2D_0 \left(6 - 4 \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} \right) \left(1 - \frac{\rho}{b} \right)^2},$$

$$M_\rho = M \frac{6 - 4 \frac{\rho}{b} + \frac{\rho^2}{b^2}}{6 - 4 \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2}}, \quad M_\varphi = M \frac{6 - 8 \frac{\rho}{b} + 3 \frac{\rho^2}{b^2}}{6 - 4 \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2}}.$$

参 考 教 材

- [1] 铁木辛柯，沃诺斯基著. 板壳理论[M]. 《板壳理论》翻译组译. 北京：科学出版社，1977：第三章，第五章，第六章，第九章.
- [2] 寿楠椿著. 弹性薄板弯曲[M]. 北京：高等教育出版社，1986.

第十四章 用差分法及变分法解 薄板的小挠度弯曲问题

§ 14 - 1 差分公式。内力及反力的差分表示

在求解薄板的小挠度弯曲问题时，基本未知函数是挠度 w ，而 w 只是中面内各点的 x 和 y 两个坐标的函数。因此，我们可以在薄板的中面上织成网格，根据弹性曲面微分方程和边界条件的差分形式，求出挠度在各结点处的数值，从而求得内力在各结点处的数值，以及边界上各结点处的反力数值。

对于图 14 - 1 所示的正方形网格，利用第七章中已经导出的差分公式，极易推出挠度 w 在典型结点 O 处的一阶至四阶导数的差分公式如下：

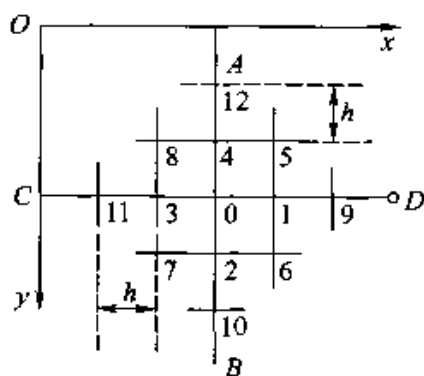


图 14 - 1

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 &= \frac{1}{2h} (w_1 - w_3), \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 &= \frac{1}{2h} (w_2 - w_4), \end{aligned} \right\} \quad (14 - 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2} (w_1 - 2w_0 + w_3), \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2} (w_2 - 2w_0 + w_4), \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0 &= \frac{1}{4h^2} (w_6 + w_8 - w_5 - w_7), \end{aligned} \right\} \quad (14 - 2)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_0 &= \frac{1}{2h^3}(w_9 - 2w_1 + 2w_3 - w_{11}), \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_0 &= \frac{1}{2h^3}(w_{10} - 2w_2 + 2w_4 - w_{12}), \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_0 &= \frac{1}{2h^3}[(w_5 + w_6 - w_7 - w_8) + 2(w_3 - w_1)], \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 &= \frac{1}{2h^3}[(w_7 + w_6 - w_5 - w_8) + 2(w_4 - w_2)], \end{aligned} \right\} \quad (14-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4}[6w_0 - 4(w_1 + w_3) + (w_9 + w_{11})], \\ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4}[6w_0 - 4(w_2 + w_4) + (w_{10} + w_{12})], \\ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^4}[4w_0 - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + \\ &\quad (w_5 + w_6 + w_7 + w_8)]_0 \end{aligned} \right\} \quad (14-4)$$

利用上面的差分公式及公式(13-12), 可将薄板在典型结点 0 处的内力用附近结点处的挠度表示如下:

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_0 &= \frac{D}{h^2}[(2 + 2\mu)w_0 - (w_1 + w_3) - \mu(w_2 + w_4)], \\ (M_y)_0 &= \frac{D}{h^2}[(2 + 2\mu)w_0 - (w_2 + w_4) - \mu(w_1 + w_3)], \end{aligned} \right\} \quad (14-5)$$

$$(M_{xy})_0 = \frac{(1 - \mu)D}{4h^2}[(w_5 + w_7) - (w_6 + w_8)], \quad (14-6)$$

$$\left. \begin{aligned} (F_{sx})_0 &= \frac{D}{2h^3}[4(w_1 - w_3) - w_5 - w_6 + w_7 + w_8 - w_9 + w_{11}], \\ (F_{sy})_0 &= \frac{D}{2h^3}[4(w_2 - w_4) + w_5 - w_6 - w_7 + w_8 - w_{10} + w_{12}]_0 \end{aligned} \right\} \quad (14-7)$$

为了计算内力时的方便, 在图 14-2 及 14-3 中示出各个内力的计算图式。

现在把薄板边界上的分布反力 F'_{sx} 及 F'_{sy} 也用结点挠度来表示。设图 14-1 中的 AB 线表示薄板的一个边界, 则对于该边界上的典型结点 0, 由公式(13-20)得分布反力为

$$(F'_{sx})_0 = \left(F_{sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_0,$$

或按照公式(13-12)改用挠度表示成为

$$(F'_{sx})_0 = -D \left[\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + (1 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_0 = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_0.$$

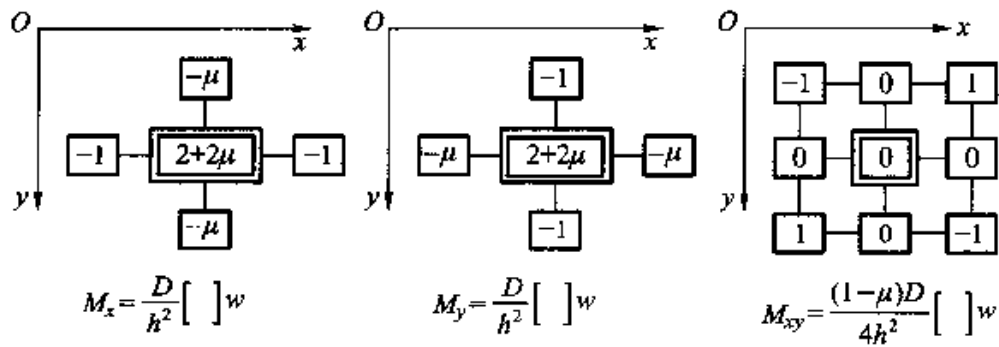


图 14-2

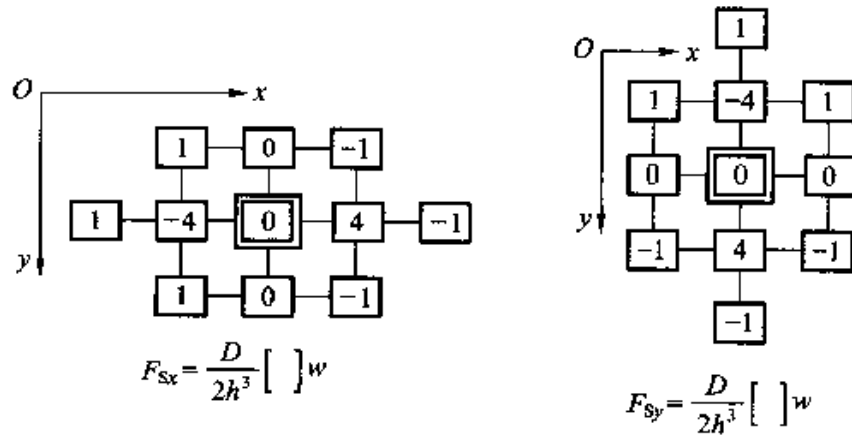


图 14-3

利用(14-3)中的第一式及第三式, 可得

$$(F_{Sx}^i)_0 = -\frac{D}{2h^3} [w_9 - 2w_1 + 2w_3 - w_{11} + (2-\mu)(w_5 + w_6 - w_7 - w_8 + 2w_3 - 2w_1)]。$$

整理以后, 即得

$$(F_{Sx}^i)_0 = \frac{D}{2h^3} [(6-2\mu)(w_1 - w_3) - (2-\mu)(w_5 + w_6 - w_7 - w_8) - w_9 + w_{11}]。 \quad (14-8)$$

对于 \$y\$ 为常量的边界, 例如图 14-1 中的 \$CD\$ 线所示, 同样可得分布反力 \$F_{Sy}^i\$ 在该边界上典型结点 0 处的差分表示:

$$(F_{Sy}^i)_0 = \frac{D}{2h^3} [(6-2\mu)(w_2 - w_4) - (2-\mu)(w_7 + w_6 - w_5 - w_8) - w_{10} + w_{12}]。 \quad (14-9)$$

分布反力的计算图式如图 14-4 所示。

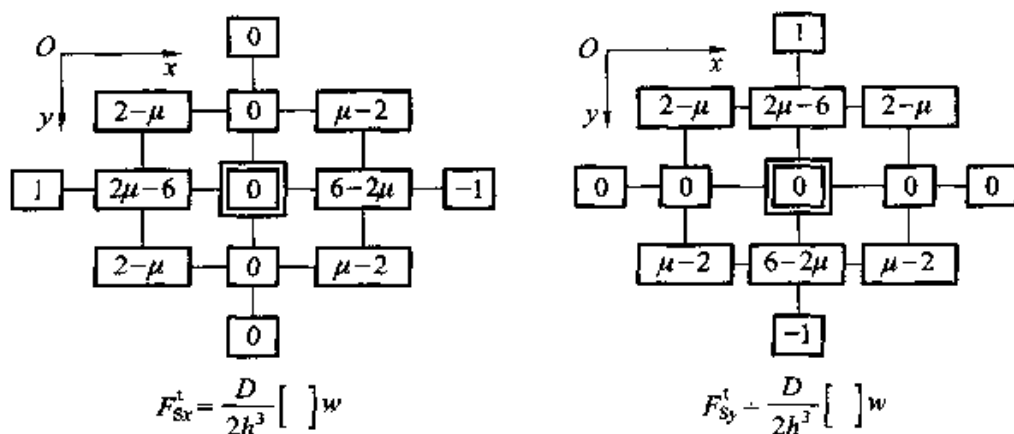


图 14-4

§ 14-2 差分方程及边界条件

薄板小挠度弯曲问题的基本微分方程是 $\nabla^4 w = q/D$ 。因此，在典型结点 0 处，图 14-1，我们有 $(\nabla^4 w)_0 = q_0/D$ ，即

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_0 = \frac{q_0}{D} \quad (a)$$

将表达式(14-4)代入，即得典型结点 0 处的差分方程

$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) = \frac{q_0 h^4}{D} \quad (14-10)$$

对于每一个具有未知挠度的结点，都可以建立这样一个差分方程，用来联立求解这些未知的结点挠度。为了便于建立差分方程，图 14-5 示出差分方程的图式。

如果薄板只有夹支边和简支边而没有自由边，则边界结点处的 w 都已知为零，而边界外一行虚结点处的 w 可用边界内一行结点处的 w 来表示。例如，设图 14-1 中的 AB 线代表一个夹支边，结点 3 在边界之内而结点 1 为边界之外的虚结点，则在边界上的结点 0 处有边界条件

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 = \frac{w_1 - w_3}{2h} = 0 \quad (b)$$

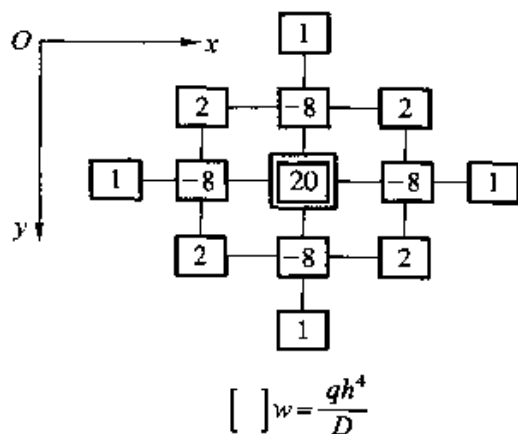


图 14-5

由此可见有简单的边界条件表达式

$$w_1 = w_3 \circ \quad (14-11)$$

同样, 如果图 14-1 中的 CD 线代表一个夹支边, 结点 4 在边界之内而结点 2 为边界之外的虚结点, 则有简单的边界条件表达式

$$w_2 = w_4 \circ \quad (14-12)$$

这就是说, 夹支边外一行虚结点处的挠度, 就等于边界内一行相对结点处的挠度。

实际计算表明, 边界条件表达式(14-11)及(14-12)的精度较低, 有时引起很大的误差。为了导出较精确的边界条件表达式, 对于夹支边 AB , 假定 w 在网线 11-3-0-1 上按三次式变化, 即

$$w = A + B\left(\frac{x}{h}\right) + C\left(\frac{x}{h}\right)^2 + D\left(\frac{x}{h}\right)^3 \circ$$

以边界结点 0 为原点, 则有已知条件

$$\begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0, & \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} &= 0, \\ (w)_{x=-h} &= w_3, & (w)_{x=-2h} &= w_{11} \circ \end{aligned}$$

由此可求得 $A=0$, $B=0$, $C=2w_3 - \frac{w_{11}}{4}$, $D=w_3 - \frac{w_{11}}{4}$, 从而得出

$$w = \left(2w_3 - \frac{w_{11}}{4}\right)\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(w_3 - \frac{w_{11}}{4}\right)\left(\frac{x}{h}\right)^3 \circ \quad (c)$$

命 $x=h$, 即得较精确的边界条件表达式

$$w_1 = 3w_3 - \frac{w_{11}}{2} \circ \quad (14-13)$$

同样, 对于夹支边 CD , 可得

$$w_2 = 3w_4 - \frac{w_{12}}{2} \circ \quad (14-14)$$

设图 14-1 中的 AB 线代表一个简支边, 则在边界结点 0 处有边界条件

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{w_1 - 2w_0 + w_3}{h^2} = 0 \circ$$

因为 $w_0=0$, 所以有边界条件表达式

$$w_1 = -w_3 \circ \quad (14-15)$$

同样, 如果图 14-1 中的 CD 线代表一个简支边, 则将有

$$w_2 = -w_4 \circ \quad (14-16)$$

这就是说, 简支边外一行虚结点处的挠度, 就等于边界内一行相对结点处的挠度, 而符号相反。

如果薄板具有自由边, 则自由边上各结点处的挠度 w 也须取为未知值, 因此就要为这些结点立出(14-10)型的差分方程。这些方程中将包含边界外两行

虚结点处的 w ，但是，利用自由边的边界条件，可以立出数目与虚结点数目相等的关系式，从而把虚结点处的 w 用边界上及边界内各结点处的 w 来表示。现在以图 14-1 中的网格来说明。设图中的 AB 线表示某一个自由边，则边界上的结点例如 0 处的挠度 w_0 ，也须取为未知值。在为结点 0 写出的差分方程中，将包含边界外两行虚结点处的挠度如 w_5 、 w_1 、 w_6 、 w_9 。但是，在边界结点 0 处，有边界条件

$$(M_y)_0 = 0, \quad (F'_{xy})_0 = 0, \quad (d)$$

利用前一条件，可将边界外一行虚结点处的挠度，例如 w_1 ，用边界上及边界内各结点处的挠度来表示；利用后一条件，又可将边界外第二行虚结点处的挠度，例如 w_9 ，用边界外第一行、边界上及边界内各结点处的挠度来表示，从而只用边界上及边界内各结点处的挠度来表示。

设图中的 AB 线和 CD 线是两个自由边，则在为角点 0 写出的差分方程中所包含的 w_6 ，无法用边界条件进行如上的处理。但是，在角点 0 处，还可以立出角点条件 $F_{xy} = 0$ ，从而有

$$(M_{xy})_0 = 0. \quad (e)$$

利用这一条件，可将 w_6 用 w_5 、 w_7 、 w_8 来表示。当然，如果在角点 0 处有支柱，则有 $w_0 = 0$ ，因而无须为角点 0 建立差分方程。这样就可以使得所有的差分方程中只包含边界上及边界内各结点处的未知 w 值，从而联立求解这些 w 值。有了各结点处的 w 值，就可以求得各结点处的内力及反力。

在建立边界条件(d)及(e)时，以及求出内力和反力时，参阅图 14-2 及图 14-4 中所示的图式来进行，是比较方便的。

§ 14-3 差分法例题

作为第一个例题，设有正方形薄板，边长为 a ，四边夹支，图 14-6，受有均布荷载 q_0 ，试用 4×4 的网格求解 ($h = a/4$)。由于对称，只有 3 个独立的未知值，即 w_1 、 w_2 、 w_3 。

利用图 14-5 中的图式，并应用较简单的边界条件表达式(14-11)及(14-12)，为内结点 1、2、3 建立差分方程如下：

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_3) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 \left(\frac{q_0}{D}\right),$$

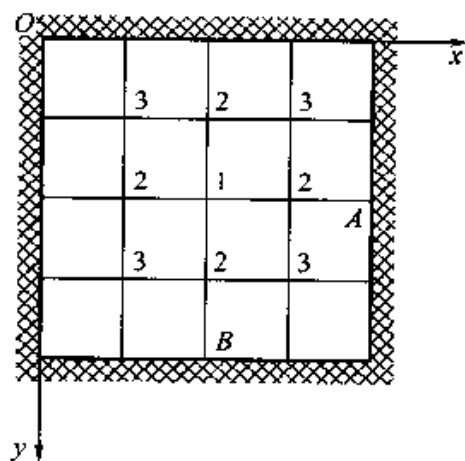


图 14-6

$$20w_2 - 8(w_1 + 2w_3) + 2(2w_2) + (w_2 + w_2) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 \left(\frac{q_0}{D}\right),$$

$$20w_3 - 8(2w_2) + 2(w_1) + (2w_3 + 2w_3) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 \left(\frac{q_0}{D}\right)。$$

简化以后，联立求解，得到

$$w_1 = 0.00180 \frac{q_0 a^4}{D}, \quad w_2 = 0.00121 \frac{q_0 a^4}{D}, \quad w_3 = 0.00082 \frac{q_0 a^4}{D},$$

其中最大的挠度 $0.00180 \frac{q_0 a^4}{D}$ 比精确值 $0.00126 \frac{q_0 a^4}{D}$ 大出了 43%。

现在，为了提高解答的精度，改用较精确的边界条件表达式(14-13)及(14-14)。于是差分方程成为

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_3) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 \left(\frac{q_0}{D}\right),$$

$$20w_2 - 8(w_1 + 2w_3) + 2(2w_2) + w_2 + \left(3w_2 - \frac{w_1}{2}\right) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 \left(\frac{q_0}{D}\right),$$

$$20w_3 - 8(2w_2) + 2w_1 + 2w_3 + 2\left(3w_3 - \frac{w_2}{2}\right) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 \left(\frac{q_0}{D}\right)。$$

简化以后，联立求解，得到

$$w_1 = 0.00140 \frac{q_0 a^4}{D}, \quad w_2 = 0.00090 \frac{q_0 a^4}{D}, \quad w_3 = 0.00059 \frac{q_0 a^4}{D},$$

其中的最大挠度 $0.00140 \frac{q_0 a^4}{D}$ 比精确值只大出 11%。

取 $\mu = 0.3$ ，利用图 14-2 计算弯矩，得到

$$\begin{aligned} (M_x)_1 = (M_y)_1 &= \frac{D}{h^2} [(2 + 2\mu)w_1 - 2w_2 - 2\mu w_2] \\ &= \frac{D}{(a/4)^2} (2 + 2\mu)(w_1 - w_2) = 0.0208 q_0 a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M_x)_A = (M_y)_R &= \frac{D}{h^2} \left[-w_2 - \left(3w_2 - \frac{w_1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{D}{(a/4)^2} \left(\frac{w_1}{2} - 4w_2 \right) = -0.0464 q_0 a^2。 \end{aligned}$$

前者与精确解答 $0.0230 q_0 a^2$ 只相差 9.6%，后者与精确解答 $-0.0513 q_0 a^2$ 也只相差 9.6%。

作为第二个例题，设有四边简支的正方形薄板，边长为 a ，承受三棱柱形的分布荷载，其最大集度为 q_0 ，图 14-7，用 4×4 的网格进行计算。由于对称，只有 4 个独立的未知挠度，即 w_1 、 w_2 、 w_3 、 w_4 。需要用到的结点荷载集

度为

$$q_1 = q_2 = q_0, \quad q_3 = q_4 = \frac{1}{2}q_0$$

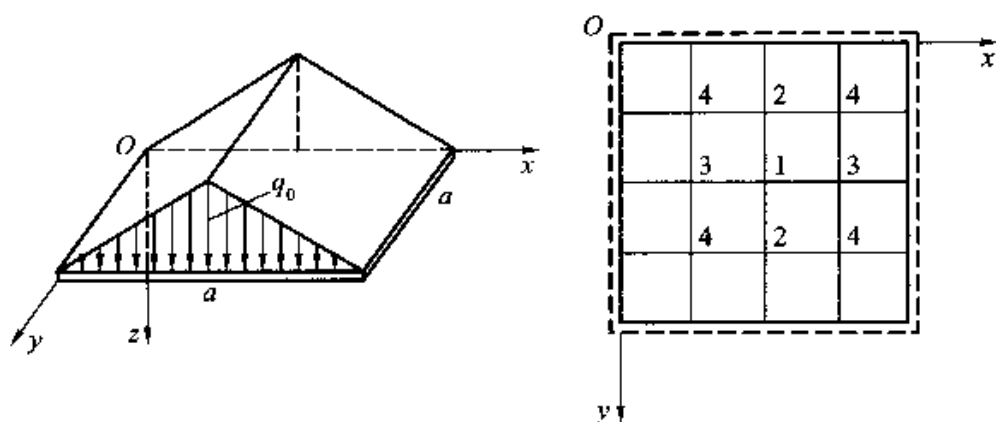


图 14-7

利用图 14-5，并应用边界条件(14-15)及(14-16)，为结点 1、2、3、4 建立差分方程如下：

$$20w_1 - 8(2w_2 + 2w_3) + 2(4w_4) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 \frac{q_0}{D},$$

$$20w_2 - 8(w_1 + 2w_4) + 2(2w_3) + (w_2 - w_2) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 \frac{q_0}{D},$$

$$20w_3 - 8(w_1 + 2w_4) + 2(2w_2) + (w_3 - w_3) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 \frac{q_0}{2D},$$

$$20w_4 - 8(w_2 + w_3) + 2(w_1) + (2w_4 - 2w_4) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 \frac{q_0}{2D}.$$

由此得到该 4 个结点处的挠度为

$$w_1 = 0.002\,928 \frac{q_0 a^4}{D}, \quad w_2 = 0.002\,135 \frac{q_0 a^4}{D},$$

$$w_3 = 0.002\,013 \frac{q_0 a^4}{D}, \quad w_4 = 0.001\,464 \frac{q_0 a^4}{D}.$$

其中的最大挠度 $w_{\max} = w_1 = 0.002\,928 \frac{q_0 a^4}{D}$ 比精确解答 $0.002\,627 \frac{q_0 a^4}{D}$ 大出 11.5%。

作为第三个例题，设有矩形薄板，上边自由，其余三边夹支，受有静水压力，其最大集度为 q_0 ，图 14-8。用 2×3 的网格进行计算，取 $\mu = 0.2$ 。首先利用图 14-5，并应用边界条件(14-13)及(14-14)，得出相应于 w_1 、 w_2 、 w_3 差分方程如下：

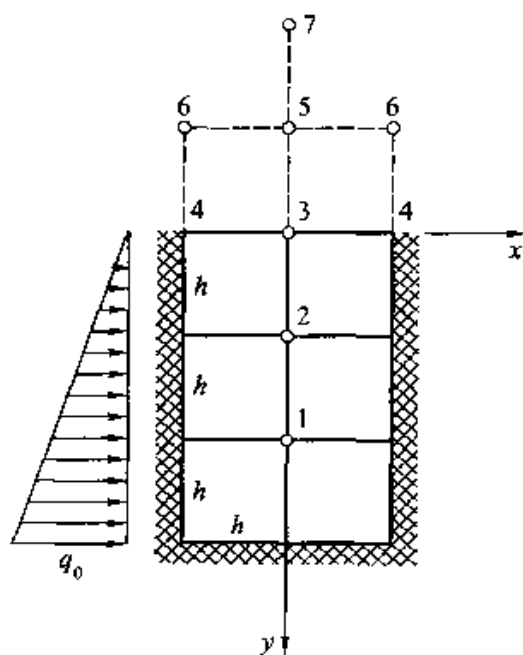


图 14-8

$$\left. \begin{aligned} 20w_1 - 8w_2 + w_3 + 3(3w_1) - \frac{w_2}{2} &= \frac{2}{3}q_0 \frac{h^4}{D}, \\ 20w_2 - 8(w_1 + w_3) + w_5 + 2(3w_2) &= \frac{1}{3}q_0 \frac{h^4}{D}, \\ 20w_3 - 8(w_2 + w_5) + 2(2w_6) + w_1 + w_7 + 2(3w_3) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

下面把方程(a)中的虚结点挠度 w_5 、 w_6 、 w_7 ，通过自由边的边界条件，用 w_1 、 w_2 、 w_3 来表示。

由边界条件 $(M_y)_3 = 0$ ，利用图 14-2 中 M_y 的图式，得到

$$(2 + 2 \times 0.2)w_3 - w_2 - w_5 = 0,$$

从而得

$$w_5 = 2.4w_3 - w_2. \quad (\text{b})$$

由边界条件 $(M_y)_4 = 0$ ，利用图 14-2 中 M_y 的图式，并利用边界条件(14-13)，得到

$$-w_6 - 0.2w_3 - 0.2(3w_3) = 0,$$

从而得

$$w_6 = -0.8w_3. \quad (\text{c})$$

由边界条件 $(F'_{xy})_3 = 0$ ，利用图 14-4 中 F'_{xy} 的图式，得到

$$(6 - 2 \times 0.2)w_2 - w_1 + (2 \times 0.2 - 6)w_5 + 2(2 - 0.2)w_6 + w_7 = 0,$$

从而得

$$w_7 = w_1 - 5.6w_2 + 5.6w_5 - 3.6w_6.$$

再将式(b)及式(c)代入，即得

$$w_7 = w_1 - 11.2w_2 + 16.32w_3 \quad (d)$$

最后将(b)、(c)、(d)三式一并代入差分方程(a),即可求解 w_1 、 w_2 、 w_3 ,从而求得内力。当然,如果要求得到足够精确的解答,则须改用较密的网络。

§ 14-4 差分法中对若干问题的处理

(一) 关于集中荷载的问题

当某一结点0受有集中荷载 F_0 时,通常就把该荷载作为均匀分布在 h^2 的面积上,于是该结点处的荷载集度为 $q_0 = F_0/h^2$ 。这样,差分方程(14-10)就成为

$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) = \frac{h^2}{D} F_0 \quad (14-17)$$

对于自由边上结点0处的集中荷载 F_0 ,则须取 $q_0 = F_0/0.5h^2 = 2F_0/h^2$;对于二自由边交点处的集中荷载 F_0 (假定无柱),则须取 $q_0 = F_0/0.25h^2 = 4F_0/h^2$ 。

当集中荷载不在某一结点时,图14-9,可先将该荷载 F 向网线上的A点及B点分解,得到 $F_A = \frac{d}{h}F$, $F_B = \frac{c}{h}F$,然后再将 F_A 向结点1及2分解, F_B 向结点3及4分解,得出

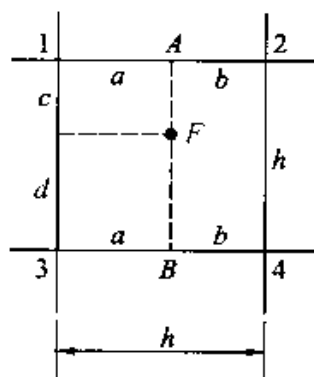


图 14-9

$$F_1 = \frac{bd}{h^2}F, \quad F_2 = \frac{ad}{h^2}F, \quad F_3 = \frac{bc}{h^2}F, \quad F_4 = \frac{ac}{h^2}F \quad (14-18)$$

如上所述的处理方法,当然要对挠度及内力引起一定的误差。但是,对于集中荷载的附近,本来就不可能求得较精确的解答,而且,根据实际计算的结果,这样的处理只是在荷载附近引起显著的误差。在离开荷载较远之处,误差是可以不计的。同时也显然可见,此项误差将随着网格的加密而逐渐减小。

(二) 关于变集度的分布荷载

在荷载集度为连续变化而且变化不大之处,只须将差分方程(14-10)中的 q_0 取为荷载在结点0处的集度,如以上所述。但在集度变化较大或甚至并不连续之处,为了减小计算误差,就要对荷载集度加以适当的处理。一种处理方法

是加权平均法：设分布荷载在图 14-10a 中结点 a, b, c, \dots, j 等处的集度为 $p_a, p_b, p_c, \dots, p_j$ 等，就取

$$q_a = \frac{1}{n^2 + 4n + 4} [n^2 p_a + n(p_b + p_c + p_d + p_e) + (p_f + p_g + p_i + p_j)], \quad (14-19)$$

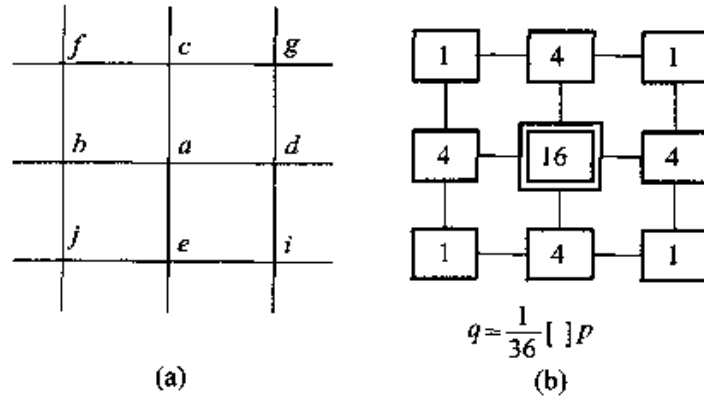


图 14-10

其中的 n 为正整数，它反映加权的大小。当 $n=1$ 时，上式给出的 q_a 就是分布荷载在 9 个结点处的集度的算术平均值； n 的数值越大， p_a 的加权就越大；当 n 值很大时， q_a 就趋近于 p_a 。根据大量的计算结果，最好的数值为 $n=4$ 。这样，公式(14-19)就成为

$$q_a = \frac{1}{36} [16p_a + 4(p_b + p_c + p_d + p_e) + (p_f + p_g + p_i + p_j)], \quad (14-20)$$

其计算图式如图 14-10b 所示。

现在以 § 14-3 中的第二个例题为例。按照图 14-10b，结点荷载集度应取为

$$q_1 = q_2 = \frac{1}{36} \left[(4 + 16 + 4) q_0 + 2(1 + 4 + 1) \frac{q_0}{2} \right] = \frac{5}{6} q_0,$$

$$q_3 = q_4 = \frac{1}{36} \left[(4 + 16 + 4) \frac{q_0}{2} + (1 + 4 + 1) q_0 \right] = \frac{1}{2} q_0.$$

立出差分方程，求解以后，得到

$$w_{\max} = w_1 = 0.002626 \frac{q_0 a^4}{D},$$

与精确解答几乎完全一致。

此外还有一个简单的处理方法，那就是，把结点领域内的全部荷载除以领域面积，作为该结点处的荷载集度（这一处理方法显然也适用于自由边上的结点，以及二自由边相交处的结点）。仍以 § 14-3 中的第二个例题为例，则有

$$q_1 = q_2 = \frac{\frac{1}{2} \left(q_0 + \frac{3}{4} q_0 \right) h^2}{h^2} = \frac{7}{8} q_0,$$

$$q_3 = q_4 = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} q_0 + \frac{1}{4} q_0 \right) h^2}{h^2} = \frac{1}{2} q_0.$$

立出差分方程，求解以后，得到

$$w_{\max} = w_1 = 0.00270 \frac{q_0 a^4}{D},$$

比精确解答也只大出 2.7%。

(三) 关于文克勒地基上的基础板

在 § 13-14 中，已经针对文克勒地基上的基础板导出弹性曲面的微分方程如下：

$$\nabla^4 w + \frac{k}{D} w = \frac{q}{D}.$$

据此，在典型结点 0 处，图 14-1，我们有

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_0 + 2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_0 + \frac{k}{D} w_0 = \frac{q_0}{D}.$$

将差分公式(14-4)代入，即得差分方程

$$\left(20 + \frac{kh^4}{D} \right) w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) +$$

$$(w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) = \frac{q_0 h^4}{D}. \quad (14-21)$$

计算时需用的其他表达式及方程，都无须加以改变。

(四) 关于连续板的问题

对于多节间的连续板，也可以应用 § 13-7 中所述关于矩形板的一般解法，但运算很繁，不如用差分法。

进行计算时，宜在薄板与支承梁的接触面中线上布置一根网线，如图 14-11a 中的 2-0-4。将支承梁以左的部分薄板切开，图 14-11b，并布置虚结点 a 。结点 3 处的差分方程中将含有 w_a 。为了将 w_a 用实际结点处的挠度表示，我们建立关系式

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 = \frac{w_a - w_3}{2h}, \quad (a)$$

$$(M_x)_0 = -D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 \right]. \quad (b)$$

假定支承梁的弯曲刚度很大，它的挠度可以不计，则有

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 = 0, \quad w_0 = 0。$$

于是式(b)简化为

$$\begin{aligned} (M_x)_0 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 = -D \frac{w_a + w_3 - 2w_0}{h^2} \\ &= -\frac{D}{h^2} (w_a + w_3)。 \end{aligned} \quad (c)$$

同样，将支承梁以右的部分薄板切开，图 14-11c，并布置虚结点 b ，亦可得关系式

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \frac{w_1 - w_b}{2h}, \quad (d)$$

$$(M_x)'_0 = -\frac{D}{h^2} (w_b + w_1)。 \quad (e)$$

由于薄板在支承梁之上是连续的，所以有

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)'_0, \quad (M_x)_0 = (M_x)'_0。$$

将(a)、(c)、(d)、(e)四式代入，整理以后，将得到

$$w_a + w_b = w_1 + w_3,$$

$$w_a - w_b = w_1 - w_3。$$

联立求解 w_a 及 w_b ，即得极为简单的结果

$$w_a = w_1, \quad w_b = w_3。$$

这就是说，实际结点 1 及 3 可以分别代替虚结点 a 及 b 。这也就是说，我们完全可以在结点 1 及 3 和通常一样地建立差分方程，只要取 $w_0 = w_2 = w_4 = 0$ 。

(五) 关于变厚度板的问题

用差分法计算变厚度薄板时，可以利用相应于微分方程(13-41)的差分方程，但因这种差分方程形式非常复杂，因而计算工作量较大。如果薄板厚度的变化并不剧烈，就可以采用一个简易的计算方案：在某一点建立差分方程时，用该结点处的弯曲刚度，而不计弯曲刚度的改变率。据此，在微分方程(13-41)中略去 D 对于坐标的导数，利用差分公式(14-4)，则差分方程简化为

$$\begin{aligned} 20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + \\ (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) = \frac{q_0}{D_0} h^4。 \end{aligned} \quad (f)$$

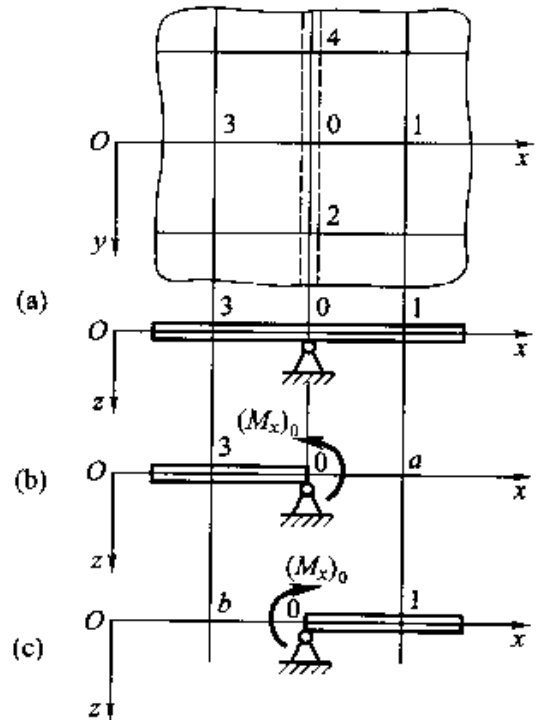


图 14-11

图 14-5 所示的图式仍然适用。

作为例题，设有四边简支的正方形薄板，图 14-12，其在结点 1 处的弯曲刚度为 D_1 ，而 $D_2 = 0.75D_1$ ， $D_3 = 0.60D_1$ ，荷载为均匀分布的 q_0 ，取 $\mu = 0.3$ 。

按照式 (f)，利用图 14-5，立出差分方程如下：

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_3) = \frac{q_0}{D_1}h^4,$$

$$20w_2 - 8(w_1 + 2w_3) + 2(2w_2) = \frac{q_0}{0.75D_1}h^4,$$

$$20w_3 - 8(2w_2) + 2w_1 = \frac{q_0}{0.60D_1}h^4.$$

求解以后，得出 $w_{\max} = w_1 = 1.407q_0h^4/D_1$ ，

$$w_2 = 1.042q_0h^4/D_1, \quad w_3 = 0.776q_0h^4/D_1,$$

$$M_{\max} = (M_x)_1 = \frac{D_1}{h^2}[(2 + 2 \times 0.3)w_1 - 2w_2 - 2(0.3)w_3] = 0.949q_0h^2.$$

与精确的差分解答相比， w_{\max} 小了 4%， M_{\max} 大出了 8%。

(六) 关于温度应力的问题

在求解薄板的温度应力问题时，由于弯矩及分布反力的表达式中含有 M_T 的项，如 (13-51) 及 (13-53) 所示，因而内力边界条件与 M_T 有关。这就使得一些经典解法不能适用。

例如，对 $x = a$ 的简支边说来，即使该边界并没有因为支座沉陷而发生的挠度，也不受有分布的力矩荷载，由边界条件有

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left(-D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_T \right)_{x=a} = 0,$$

但是并不能由此得到

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0.$$

这就使得纳维解法和莱维解法都不适用。

如果用差分法求解，则弹性曲面的微分方程 (13-54) 以及一切边界条件，化为差分形式以后，仍然很容易处理。因此，对于薄板的温度应力问题，总是宜用差分法求解。

(七) 关于曲线边界的问题

对于具有曲线边界或斜交边界的薄板，最方便的办法是将边界改换成为分

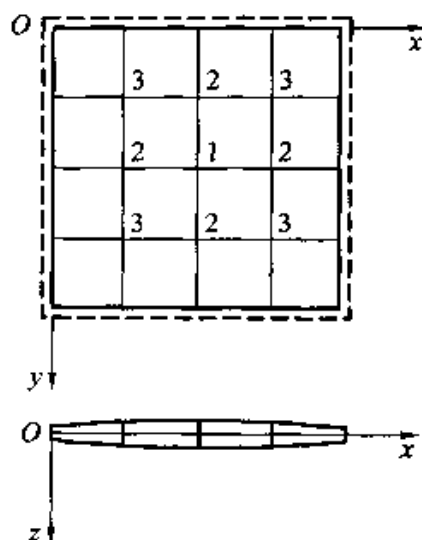


图 14-12

段垂直于坐标轴的折线边界，然后再进行计算。这样，边界附近的挠度和内力可能有较大的误差，因而要求采用较密的网格。但是，对于距边界稍远之处说来，即使网格不密，误差也是不会很大的。以图 14-13 所示的夹支边圆板受均布荷载 q_0 时的问题为例。取网格间距为圆板半径的三分之一，即 $h = a/3$ ，计算圆板的四分之一，而将圆边界改换成为折线边界 $ABCDEFG$ 。按照图 14-5 为结点 1、2、3、4、5 立出差分方程，应用边界条件 (14-13) 及 (14-14)，得到

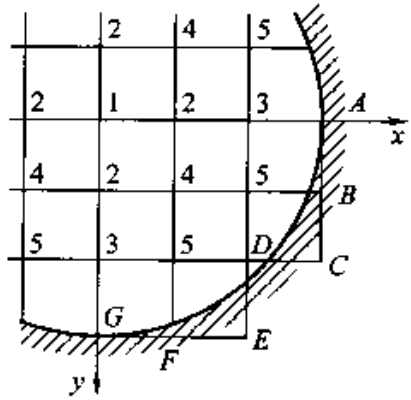


图 14-13

$$20w_1 - 32w_2 + 8w_4 + 4w_3 = \frac{q_0}{D} \left(\frac{a}{3} \right)^4,$$

$$20w_2 - 8w_1 - 8w_3 - 16w_4 + 4w_2 + 4w_5 + w_2 + 2w_5 = \frac{q_0}{D} \left(\frac{a}{3} \right)^4,$$

$$20w_3 - 8w_2 - 16w_5 + 4w_4 + w_1 + \left(3w_3 - \frac{w_2}{2} \right) = \frac{q_0}{D} \left(\frac{a}{4} \right)^4,$$

$$20w_4 - 16w_2 - 16w_5 + 2w_1 + 4w_3 + 2w_4 = \frac{q_0}{D} \left(\frac{a}{4} \right)^4,$$

$$20w_5 - 8w_3 - 8w_4 + 2w_2 + 2w_5 + w_2 + w_5 + \left(3w_5 - \frac{w_4}{2} \right) + \left(3w_5 - \frac{w_3}{2} \right) = \frac{q_0}{D} \left(\frac{a}{4} \right)^4.$$

简化以后，联立求解，得到（以 $q_0 a^4 / D$ 为单位）：

$$\begin{aligned} w_1 &= 0.01737, & w_2 &= 0.01389, & w_3 &= 0.00570, \\ w_4 &= 0.01084, & w_5 &= 0.00384. \end{aligned}$$

其中的最大挠度比公式 (13-37) 给出的精确数值大出 11.2%。

取 $\mu = 0.3$ ，应用图 14-2，可以得出

$$(M_x)_1 = 0.0814 q_0 a^2, \quad (M_x)_4 = -0.1427 q_0 a^2.$$

与 § 13-10 中的精确解答相比，前者相当精确，后者的误差为 14%。

§ 14-5 里茨法的应用

本节中将说明，如何把 § 11-3 中所述的里茨法应用于薄板的小挠度弯曲问题。

在薄板的小挠度弯曲问题中，按照计算假定，是不计形变分量 ϵ_x 、 γ_{yx} 、 γ_{xz} 的，于是形变势能的表达式简化为

$$V_e = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (a)$$

上式中的应力分量和形变分量，已在 § 13-2 中用挠度 w 表示如下：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), & \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

代入式(a)，整理以后，得

$$V_e = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iiint z^2 \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz.$$

注意上式右边波纹括号中的各项都不随 z 而变，对 z 进行积分，从 $-\delta/2$ 到 $\delta/2$ ，并应用公式(13-11)，即得

$$V_e = \frac{1}{2} \iint D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (b)$$

式中的弯曲刚度 D ，在变厚度板的情况下，将是 x 和 y 的函数，因为 δ 将是 x 和 y 的函数。

在等厚度的薄板中， D 是常量，式(b)可以改写为

$$V_e = \frac{D}{2} \iint \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (14-22)$$

或再改写为

$$V_e = \frac{D}{2} \iint (\nabla^2 w)^2 dx dy - (1-\mu) D \iint \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (c)$$

式(c)中的第二个积分可以变换成为

$$\iint \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy.$$

按照格林定理，我们有

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial x} P(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y) \right] dx dy = \int [Q(x, y) dx + P(x, y) dy].$$

于是可由上式得

$$\iint \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = \int \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right], \quad (d)$$

其中右边的线积分是沿薄板的边界进行的。

如果薄板的全部边界都是夹支边，则不论边界的形状如何，在边界上都有 $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ 。于是式(d)的右边成为零，左边也就等于零，而式(c)简化为

$$V_e = \frac{D}{2} \iint (\nabla^2 w)^2 dx dy. \quad (14-23)$$

如果一个矩形薄板没有自由边，而只有夹支边和简支边，则在 x 为常量的边界上有 $dx=0$ 及 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ ，在 y 为常量的边界上有 $dy=0$ 及 $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ ，于是式(d)的右边成为零，左边也就等于零，而式(c)仍然简化为(14-23)式。

按照薄板小挠度弯曲问题中的计算假定及几何方程，位移分量 u 和 v 可以用挠度 w 表示，不必取为基本未知函数，因而只有 w 这唯一的基本未知函数。现在，把 w 的表达式设定为

$$w = \sum_m C_m w_m, \quad (14-24)$$

其中的 C_m 为互不依赖的 m 个待定系数； w_m 为满足薄板位移边界条件(即约束条件)的设定函数。这样，不论 C_m 如何取值，上式所示的挠度 w 总能满足位移边界条件。注意，挠度 w 的变分只是由系数 C_m 的变分来实现；至于设定的函数 w_m ，则仅随坐标而变，与上述变分完全无关。

为了决定系数 C_m ，须应用(11-10)中的第三式，即

$$\frac{\partial V_e}{\partial C_m} = \iiint f_z w_m dx dy dz + \iint \bar{f}_z w_m dS. \quad (e)$$

注意，在薄板的弯曲问题中，体力及面力都归入荷载 q ，再注意在板面上有 $dS = dx dy$ ，可见式(e)成为

$$\frac{\partial V_e}{\partial C_m} = \iint q w_m dx dy. \quad (14-25)$$

由此可以得出 C_m 的 m 个线性方程，用来确定 C_m ，从而由(14-24)式得出挠度 w ，再从而求得薄板的内力。

对于圆形薄板，须将上列公式改用极坐标表示。为此，除了把微分面积 $dx dy$ 改用 $\rho d\varphi d\rho$ 表示以外，再用 § 13-8 中的方法将 w 的各个二阶导数向极坐标中变换。这样，式(b)将变换成为

$$V_e = \frac{1}{2} \iint D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} \rho d\rho d\varphi, \quad (f)$$

其中

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}.$$

关于等厚度薄板的形变势能公式(14-22)，将变换成为

$$V_e = \frac{D}{2} \iint \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} \rho d\rho d\varphi.$$

$$\left. \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} \rho d\rho d\varphi. \quad (14-26)$$

表达式(14-24)保持不变, 但 w_m 应表示成为 ρ 和 φ 的函数, 而方程(14-25)变换成为

$$\frac{\partial V_s}{\partial C_m} = \iint q w_m \rho d\rho d\varphi. \quad (14-27)$$

注意: (14-25)式及(14-27)式右边的积分式, 都表示荷载在位移 w_m 上所做的功。因此, 有时可以不必进行积分而直接由功的计算得到该积分式的值。

在轴对称问题中, 横向荷载及挠度都只是 ρ 的函数, 即

$$q = q(\rho), \quad w = w(\rho).$$

于是形变势能的表达式(14-26)简化为

$$V_s = \frac{D}{2} \iint \left[\rho \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 + 2\mu \frac{dw}{d\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right] d\rho d\varphi.$$

注意 $w = w(\rho)$ 而 $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$, 则上式可以再简化为

$$V_s = \pi D \int \left[\rho \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 + 2\mu \frac{dw}{d\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right] d\rho, \quad (14-28)$$

方程(14-27)则简化为

$$\frac{\partial V_s}{\partial C_m} = 2\pi \int q w_m \rho d\rho. \quad (14-29)$$

当圆板的全部边界均为夹支边时, 对于外半径为 a 而内半径为 b 的圆板, 我们有

$$\int \frac{dw}{d\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int d \left[\left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dw}{d\rho} \right)_{\rho=a}^2 - \left(\frac{dw}{d\rho} \right)_{\rho=b}^2 \right] = 0;$$

对于无孔的圆板, 我们也将得到同样的结果, 因为这时有 $\left(\frac{dw}{d\rho} \right)_{\rho=0} = 0$ 。于是公式(14-28)简化为

$$V_s = \pi D \int \left[\rho \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right] d\rho. \quad (14-30)$$

在用里茨法计算薄板问题时, 必须把边界条件明确区分为位移边界条件和内力边界条件。夹支边上已知挠度的条件和已知法向斜率的条件, 两者都是位移边界条件。自由边上已知弯矩的条件和已知分布剪力的条件, 两者都是内力边界条件。在简支边上, 已知挠度的条件是位移边界条件, 但已知弯矩的条件则是内力边界条件。应用里茨法时, 只要求设定的挠度表达式满足位移边界条件, 而不一定要满足内力边界条件。但是, 如果也能满足一部分

或全部内力边界条件，则往往可以提高计算成果的精度。同时也应指出：在设定挠度表达式时，应当尽可能不要使它在任一边界上满足某种实际上不存在的边界条件。例如，不要使得夹支边上的弯矩或反力等于零，不要使得简支边上的法向斜率或反力等于零，也不要使得自由边上的挠度或法向斜率等于零。如果这种条例在某一边界上没有被遵守，则该边界附近的位移和内力将有较大的误差。

§ 14-6 里茨法应用举例

作为第一个例题，设有矩形薄板，边长为 a 及 b ，图 14-14，上下两边简支，左边夹支，右边自由，受有均布荷载 q_0 ，取坐标轴如图所示，则位移边界条件为

$$\begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0, & \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} &= 0, \\ (w)_{y=0} &= 0, & (w)_{y=b} &= 0. \end{aligned}$$

将挠度的表达式取为

$$w = C_1 w_1 = C_1 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (\text{a})$$

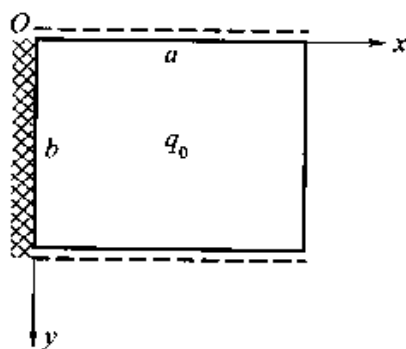


图 14-14

则上列位移边界条件都能满足。同时，式(a)在薄板的上下两边还满足了内力边界条件，即弯矩等于零。可是，式(a)在薄板的左边满足了实际上不存在的边界条件，即分布剪力等于零，这将在该边界附近引起较大的误差。

按照式(a)求挠度 w 对于坐标的二阶导数，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{2}{a^2} C_1 \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{\pi^2}{a^2 b^2} C_1 x^2 \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{2\pi}{a^2 b} C_1 x \cos \frac{\pi y}{b}. \end{aligned}$$

代入(14-22)式，注意对 x 积分的极限是从 0 到 a ，对 y 积分的极限是从 0 到 b ，得到

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{2}{a^2} C_1 \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{\pi^2}{a^2 b^2} C_1 x^2 \sin \frac{\pi y}{b} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. 2(1-\mu) \left(-\frac{2\pi^2}{a^4 b^2} C_1^2 x^2 \sin^2 \frac{\pi y}{b} - \frac{4\pi^2}{a^4 b^2} C_1^2 x^2 \cos^2 \frac{\pi y}{b} \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

$$= \frac{DC_1^2}{2} \left[2 + \left(\frac{4}{3} - 2\mu \right) \left(\frac{\pi a}{b} \right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{\pi a}{b} \right)^4 \right] \frac{b}{a^3},$$

从而得到

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial C_1} = C_1 D \left[2 + \left(\frac{4}{3} - 2\mu \right) \left(\frac{\pi a}{b} \right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{\pi a}{b} \right)^4 \right] \frac{b}{a^3}, \quad (\text{b})$$

另一方面, 由式(a)得到

$$\iint q w_m dx dy = \int_0^a \int_0^b q_0 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{2}{3\pi} q_0 ab. \quad (\text{c})$$

将式(b)及式(c)代入(14-25)式, 求出 C_1 , 再代入式(a), 即得

$$w = \frac{2q_0 a^2 x^2 \sin \frac{\pi y}{b}}{3\pi D \left[2 + \left(\frac{4}{3} - 2\mu \right) \left(\frac{\pi a}{b} \right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{\pi a}{b} \right)^4 \right]} \quad (\text{c})$$

当 $b = a$ 而 $\mu = 0.3$ 时, 自由边中点 $(a, b/2)$ 处的挠度为

$$w = 0.0112 \frac{q_0 a^4}{D}. \quad (\text{d})$$

与精确解答相比, 只有 1% 的误差。

如果该薄板所受的荷载不是分布荷载, 而是在坐标为 ξ 及 η 的一点处的集中荷载 F , 则可计算该荷载在 w_m 上所做的功, 以代替 $\iint q w_m dx dy$ 。这个功的数量等于

$$F(w_1)_{x=\xi, y=\eta} = F \left(\frac{\xi}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi \eta}{b}.$$

于是有

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial C_1} = F \left(\frac{\xi}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi \eta}{b}.$$

将式(b)代入, 求出 C_1 , 再代入式(a), 即得

$$w = \frac{F \xi^2 \sin \frac{\pi \eta}{b} x^2 \sin \frac{\pi y}{b}}{abD \left[2 + \left(\frac{4}{3} - 2\mu \right) \left(\frac{\pi a}{b} \right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{\pi a}{b} \right)^4 \right]} \quad (\text{c})$$

作为另一个例题, 设有半径为 a 的夹支边圆板, 在半径为 b 的中心圆面积上受均布荷载 q_0 , 图 14-15。这是一个轴对称问题。取挠度的表达式为

$$w = \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2 \left[C_1 + C_2 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) + C_3 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2 + \dots \right], \quad (\text{e})$$

可以满足位移边界条件

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad \left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=a} = 0,$$

并且反映了位移的轴对称条件

$$\left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=0} = 0。$$

现在, 试在式(e)中只取一个待定系数, 也就是取

$$w = C_1 w_1 = C_1 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2, \quad (f)$$

求出 w 的一阶及二阶导数:

$$\frac{dw}{d\rho} = -\frac{4C_1}{a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \rho, \quad \frac{d^2w}{d\rho^2} = -\frac{4C_1}{a^2} \left(1 - 3\frac{\rho^2}{a^2}\right)。$$

代入(14-30)式, 注意积分的极限是从 0 到 a , 得到

$$V_e = \pi D \int_0^a \left\{ \rho \left[\frac{4C_1}{a^2} \left(1 - 3\frac{\rho^2}{a^2}\right) \right]^2 + \frac{1}{\rho} \left[\frac{4C_1}{a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \rho \right]^2 \right\} d\rho = \frac{32\pi DC_1^2}{3a^2},$$

从而得出

$$\frac{\partial V_e}{\partial C_m} = \frac{\partial V_e}{\partial C_1} = \frac{64\pi DC_1}{3a^2}。 \quad (g)$$

另一方面, 由式(f)得

$$2\pi \int q w_m \rho d\rho = 2\pi \int_0^b q_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \rho d\rho = \frac{\pi q_0 b^2}{3} \left(3 - 3\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right)。 \quad (h)$$

将式(g)及式(h)代入(14-29)式, 求出 C_1 , 再将求得的 C_1 代入式(f), 即得挠度的解答:

$$w = \frac{q_0 a^4}{64D} \left(3 - 3\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right) \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2。$$

当整个薄板受均布荷载 q_0 时, $b/a = 1$, 由上式得

$$w = \frac{q_0 a^4}{64D} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2,$$

与 § 13-9 中的精确解答完全相同。

当圆板的边界为简支边时, 对于轴对称问题, 取挠度的表达式为

$$w = \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \left[C_1 + C_2 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) + C_3 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 + \dots \right], \quad (i)$$

可以满足位移边界条件

$$(w)_{\rho=a} = 0,$$

并反映了位移的轴对称条件

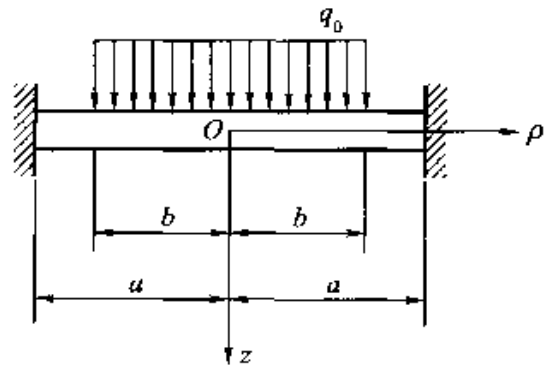


图 14-15

$$\left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=0} = 0,$$

但是, 由于式(i)不能满足内力边界条件

$$(M_\rho)_{\rho=a} = 0,$$

为了求得工程上可用的解答, 在式(i)中至少要取两个待定系数 C_1 及 C_2 。

§ 14-7 伽辽金法的应用

本节中将说明, 如何将 § 11-3 中所述的伽辽金法应用于薄板的小挠度弯曲问题。

在伽辽金法中, 仍然把薄板的挠度表达式设定为

$$w = \sum_m C_m w_m. \quad (\text{a})$$

但是, 现在的 w_m 必须同时满足位移边界条件和内力边界条件, 也就是必须满足薄板的全部边界条件。同时还应当注意, 设定式(a)时, 应当尽可能不要使其在任何边界上满足实际上不存在的位移边界条件或内力边界条件, 以免得出不精确甚至不合理的结果。

为了导出决定系数 C_m 的方程, 须应用 § 11-3 中的方程

$$\iiint \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z \right) w_m dx dy dz = 0, \quad (\text{b})$$

在薄板的弯曲问题中, 体力是归入横向荷载 q 的, 因此, 在式(b)中应当取 $f_z = 0$ 。此外, 再注意 w_m 只是 x 和 y 的函数, 不随 z 而变, 则式(b)可以写成

$$\iint \left[\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz \right] w_m dx dy = 0, \quad (\text{c})$$

现在来进行上式中 z 的积分。首先, 我们有

$$\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dz = \sigma_z \Big|_{z=-\delta/2}^{z=\delta/2} = 0 - (-q) = q. \quad (\text{d})$$

其次, 利用(13-8)式, 得到

$$\begin{aligned} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(z^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) \nabla^4 w dz \\ &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \nabla^4 w \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left(z^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) dz \\ &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \nabla^4 w \left(-\frac{\delta^3}{6} \right) = -D \nabla^4 w. \end{aligned} \quad (\text{e})$$

将式(d)及式(e)代入式(c), 得到

$$\iint (q - D \nabla^4 w) w_m dx dy = 0,$$

也就是

$$\iint D (\nabla^4 w) w_m dx dy = \iint q w_m dx dy, \quad (14-31)$$

其中的弯曲刚度 D 可以是 x 和 y 的函数。由此可得 m 个方程, 用来求解系数 C_m 。

用极坐标求解问题时, 要把方程(14-31)改用极坐标表示。这样就得到

$$\iint D (\nabla^4 w) w_m \rho d\rho d\varphi = \iint q w_m \rho d\rho d\varphi, \quad (14-32)$$

其中 D 可以是 ρ 和 φ 的函数, 而

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 w。$$

对于轴对称问题, 方程(14-32)简化为

$$\int D (\nabla^4 w) w_m \rho d\rho = \int q w_m \rho d\rho, \quad (14-33)$$

其中 D 可以是 ρ 的函数, 而

$$\nabla^4 w = \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^2 w。 \quad (14-34)$$

§ 14-8 伽辽金法应用举例

作为第一个例题, 设有等厚度矩形薄板, 四边夹支, 图 14-16, 受有均布荷载 q_0 。取坐标轴如图所示, 则边界条件为

$$(w)_{x=\pm a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=\pm a} = 0,$$

$$(w)_{y=\pm b} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm b} = 0。$$

注意问题的对称性, 将挠度的表达式取为

$$w = \sum_m C_m w_m = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (C_1 + C_2 x^2 + C_3 y^2 + \dots) \quad (a)$$

可见, 不论系数 C_m 取任何值, 都能满足全部边界条件。

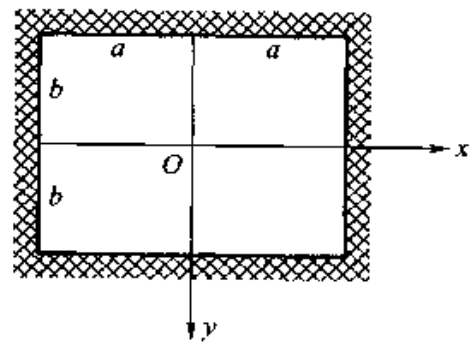


图 14-16

假定在式(a)中只取一个系数,也就是取

$$w = C_1 w_1 = C_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2. \quad (b)$$

于是得

$$\begin{aligned} w_m &= w_1 = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2, \\ \nabla^4 w &= \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &= 8[3(y^2 - b^2)^2 + 3(x^2 - a^2)^2 + 4(3x^2 - a^2)(3y^2 - b^2)] C_1. \end{aligned}$$

代入方程(14-31), 注意 $q = q_0$, 并注意问题的对称性, 得到

$$\begin{aligned} 4D \int_0^a \int_0^b 8[3(y^2 - b^2)^2 + 3(x^2 - a^2)^2 + 4(3x^2 - a^2)(3y^2 - b^2)] \times \\ C_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 dx dy = 4q_0 \int_0^a \int_0^b (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 dx dy. \end{aligned}$$

积分以后, 求解 C_1 , 再代回式(b), 即得

$$w = \frac{7q_0 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2}{128 \left(a^4 + b^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 \right) D}. \quad (c)$$

对于正方形薄板, 命 $b = a$, 得到

$$w = \frac{49q_0 a^4}{2 \cdot 304D} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right)^2.$$

最大挠度为

$$w_{\max} = (w)_{x=y=0} = \frac{49q_0 a^4}{2 \cdot 304D} = 0.0213 \frac{q_0 a^4}{D},$$

比精确值 $0.0202 q_0 a^4 / D$ 大出 5%。

也可以不用多项式而用三角级数, 把挠度设定为

$$\begin{aligned} w = \sum_m \sum_n C_{mn} \left(1 + \cos \frac{m\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{n\pi y}{b} \right). \quad (d) \\ (m = 1, 3, 5, \dots, \quad n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

这也可以满足全部边界条件。假定在式(d)中只取一个系数 C_{11} , 也就是取

$$w = C_{11} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right),$$

进行与上相同的运算, 则得

$$w = \frac{4q_0 a^4 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right)}{\pi^4 D \left(3 + 2 \frac{a^2}{b^2} + 3 \frac{a^4}{b^4} \right)}.$$

对于正方形薄板, 命 $b = a$, 得到

$$w = \frac{q_0 a^4}{2\pi^4 D} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right),$$

最大挠度为

$$w_{\max} = (w)_{x=y=0} = \frac{2q_0 a^4}{\pi^4 D} = 0.0205 \frac{q_0 a^4}{D},$$

比精确值 $0.0202 q_0 a^4 / D$ 只大出 1.5%。

作为第二个例题，试考察图 14-15 中的等厚度圆形薄板。把挠度表达式仍然取为

$$w = C_1 w_1 = C_1 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \quad (e)$$

求出

$$\nabla^4 w = \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\right)^2 w = \frac{64C_1}{a^4},$$

连同 $w_m = w_1 = \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2$ 代入方程 (14-33)，即得

$$D \int_0^a \frac{64C_1}{a^4} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \rho d\rho = \int_0^b q_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \rho d\rho.$$

积分以后，求出 C_1 ，再代入式 (e)，得到

$$w = \frac{q_0 a^4}{64D} \left(3 - 3 \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right) \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2,$$

和用里茨法求出的解答完全相同。

§ 14-9 主应力与主弯矩

对于薄板的任何一个小挠度弯曲问题，不论用什么方法求得横截面上的弯矩和扭矩以后，都同样可以用 (13-14) 式求得应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{12M_x}{\delta^3} z, & \sigma_y &= -\frac{12M_y}{\delta^3} z, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{12M_{xy}}{\delta^3} z. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

现在就可以用 § 2-3 中的公式 (2-7) 求得主应力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (b)$$

并用公式(2-8)求得主应力 σ_1 与 x 轴所成的角度

$$\alpha_1 = \arctan \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \quad (c)$$

各个应力分量和主应力 σ_1 如图 14-17 所示。

主应力在薄板全厚度上的合成称为主弯矩:

$$M_1 = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_1 z dz, \quad M_2 = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_2 z dz. \quad (d)$$

注意, 式(d)所示的 M_1 、 M_2 与 σ_1 、 σ_2 之间的关系, 完全等同于 M_x 、 M_y 与 σ_x 、 σ_y 之间的关系。因此, 套用(a)的前二式, 可将主应力用主弯矩表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{12M_1}{\delta^3} z, \\ \sigma_2 &= \frac{12M_2}{\delta^3} z. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

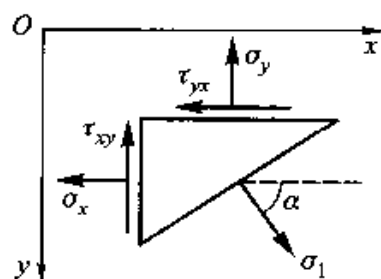


图 14-17

将式(e)及式(a)分别代入式(b)的左右两边, 约简以后, 即得

$$\left. \begin{aligned} M_1 \\ M_2 \end{aligned} \right\} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} \quad (14-35)$$

再将式(e)中的 σ_1 以及式(a)中的 σ_x 和 τ_{xy} 代入式(c), 约简以后, 又可得

$$\alpha_1 = \arctan \frac{M_1 - M_x}{M_{xy}} \quad (14-36)$$

利用(14-35)式及(14-36)式, 可以不必计算应力而直接由 M_x 、 M_y 、 M_{xy} 求得主弯矩的大小以及主弯矩作用面的法线方向。

如果在解题时用的是极坐标, 则显然可见, 由 M_ρ 、 M_φ 、 $M_{\rho\varphi}$ 求 M_1 、 M_2 、 α_1 时可以套用式(14-35)及式(14-36), 即

$$\left. \begin{aligned} M_1 \\ M_2 \end{aligned} \right\} = \frac{M_\rho + M_\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_\rho - M_\varphi}{2}\right)^2 + M_{\rho\varphi}^2}, \quad (14-37)$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{M_1 - M_\rho}{M_{\rho\varphi}},$$

但其中的 α_1 应为 M_1 作用面的法线方向与 ρ 方向所成的角度。顺便指出: 在轴对称问题中, 由于 $M_{\rho\varphi} = 0$, 所以由(14-37)中的第一式可见, M_ρ 和 M_φ 就是主弯矩, 而主应力就是由 M_ρ 和 M_φ 算出的弯应力。

严格说来, 对于均质薄板, 应当按照主应力来校核强度; 对于钢筋混凝土薄板, 应当按照主弯矩来配置钢筋。但是, 在一般的工程设计中, 为了简便, 往往就按照应力分量来校核均质薄板的强度; 对于钢筋混凝土薄板, 则按照矩形薄板中的 M_x 和 M_y 来配置 x 及 y 方向的钢筋, 或者按照圆形薄板中的 M_ρ 和

M_x 来配置 ρ 及 φ 方向的钢筋。但是，在某些比较特殊的情况下，这样简单处理的结果可能是很不合理的。

例如，设有矩形混凝土薄板 $OABC$ ，图 14-18a，其 AB 边及 BC 边为自由边， OA 边及 OC 边为简支边，在 B 点近处受有沿 z 方向的集中载荷 F 。由习题 13-1 已知，弯矩及扭矩分别为 $M_x = M_y = 0$ ， $M_{xy} = -F/2$ 。由于这些内力都是常量，因此，该薄板的任何一个沿坐标方向的矩形小块，其受力情况都相同，如图中左上方的矩形小块所示。应用(14-35)式及(14-36)式，得到

$$M_1 = F/2, \quad M_2 = -F/2,$$

$$\alpha_1 = \arctan(-1) = -45^\circ \text{ 或 } 135^\circ.$$

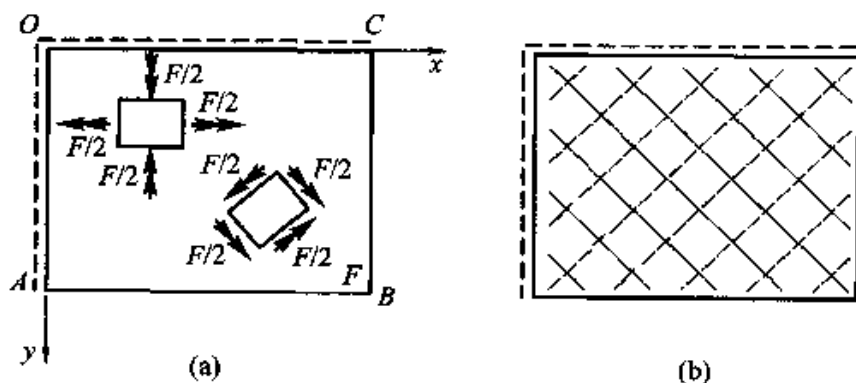


图 14-18

可见，该薄板的任何一个与坐标轴成 45° 的矩形小块，其受力情况如图中右下方的矩形小块所示。

根据以上的分析，应在薄板中配置如图 14-18b 所示的钢筋。图中实线表示上层钢筋，虚线表示下层钢筋。每单位宽度内的钢筋数量都相同，决定于 $F/2$ 的数值。但是，如果按照 M_x 及 M_y 配置钢筋，则将得出“无需受力钢筋”的结论，这显然是不正确的。

习 题

14-1 正方形薄板，边长为 a ，四边简支，图 14-19，受有均布荷载 q_0 。试用差分法求出最大挠度及最大弯矩，并与习题 13-6 中的精确解答进行对比。采用 4×4 的网格，即 $h = a/4$ 。取 $\mu = 0.3$ 。

答案： $w_{\max} = \frac{33q_0a^4}{8192D} = 0.00403 \frac{q_0a^4}{D}$,

$$(M_x)_{\max} = (M_y)_{\max} = \frac{9(1+\mu)}{256} q_0a^2 \approx 0.0457 q_0a^2.$$

14-2 正方形薄板，边长为 a ，二对边夹支，另二对边简支，图 14-20，受有均布荷载 q_0 。试用差分法求解，算出最大挠度。采用 4×4 的网格，即 $h = a/4$ 。

答案：对夹支边采用简单的边界条件时， $w_{max} = 0.00247 \frac{q_0 a^4}{D}$ ；

对夹支边采用较精确的边界条件时， $w_{max} = 0.00205 \frac{q_0 a^4}{D}$ 。

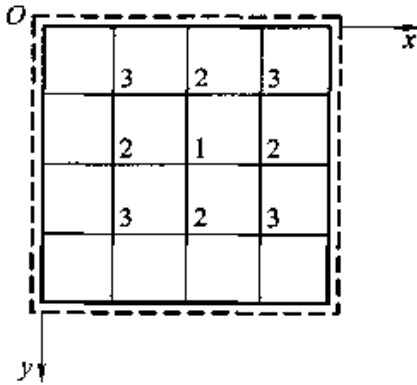


图 14-19

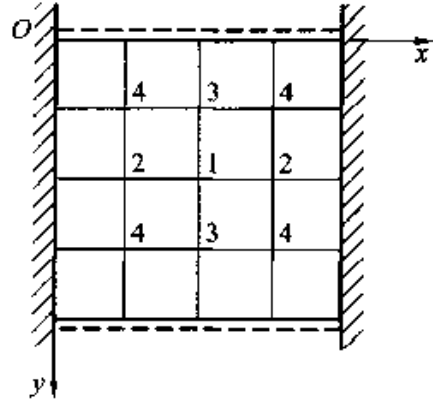


图 14-20

14-3 设有两跨连续板，板宽与跨度均为 a ，图 14-21，左右两边简支，上下两边夹支，在左边一跨上受均布荷载 q_0 ，试用图示的网格求解。对夹支边用较精确的边界条件。

答案： $w_1 = 0.00159 \frac{q_0 a^4}{D}$ ， $w_2 = 0.00152 \frac{q_0 a^4}{D}$ ，

$w_3 = -0.00013 \frac{q_0 a^4}{D}$ ， $w_4 = -0.00006 \frac{q_0 a^4}{D}$ 。

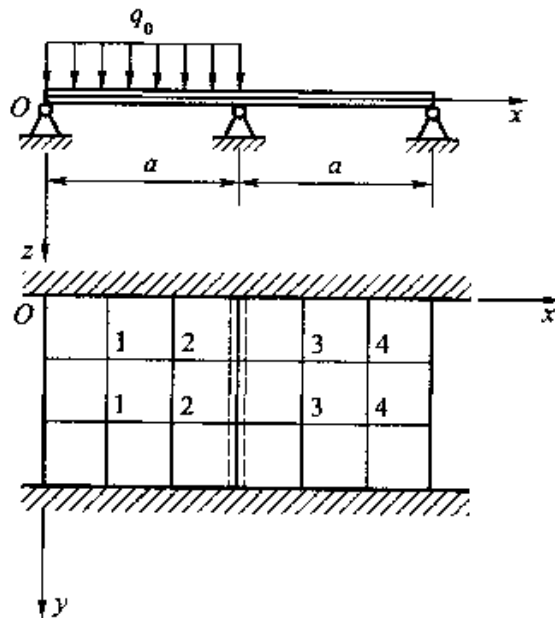


图 14-21

14-4 试用里茨法计算 § 14-8 中的矩形薄板问题。

14-5 试分别用里茨法及伽辽金法计算 § 14-3 中的第二个例题，设定挠度的表达式为

$$w = C_1 w_1 = C_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}。$$

答案: $w_{\max} = \frac{8q_0 a^4}{\pi^7 D} = 0.00265 \frac{q_0 a^4}{D}。$

14-6 圆形薄板, 半径为 a , 边界夹支, 受横向荷载 $q = q_0 \rho/a$, 图 14-22。试取挠度的表达式为

$$w = C_1 w_1 = C_1 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2,$$

用伽辽金法求出最大挠度, 与精确解答 $\frac{q_0 a^4}{150D}$ 进行对比。

答案: $w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{140D}。$

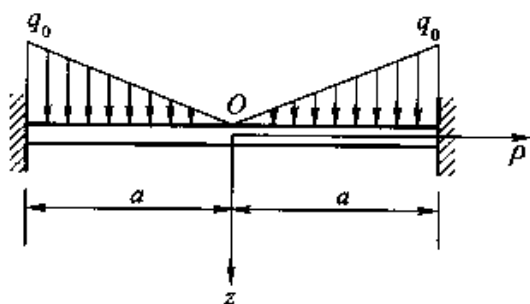


图 14-22

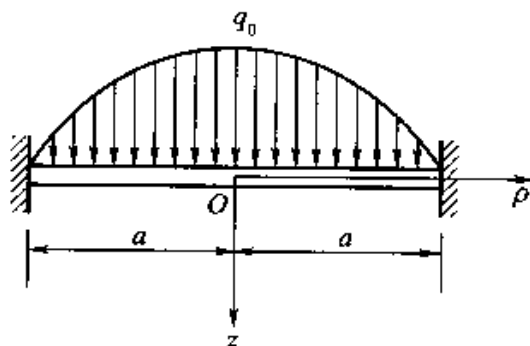


图 14-23

14-7 圆形薄板, 半径为 a , 边界夹支, 受横向荷载 $q = q_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)$, 图 14-23。试取

挠度表达式如上题所示, 用伽辽金法求解, 求出最大挠度, 并与精确解答 $\frac{7q_0 a^4}{576D}$ 进行对比

答案: $w_{\max} = \frac{3q_0 a^4}{256D} = 0.0117 \frac{q_0 a^4}{D}。$

参 考 教 材

- [1] 徐芝纶著. 弹性力学中的差分方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989: 第三章, 第四章中的 §4.5 及 §4.6.
- [2] 王磊, 李家宝著. 结构分析的有限差分法[M]. 北京: 人民交通出版社, 1982.
- [3] Л. С. 列宾逊著. 弹性力学问题的变分法[M]. 叶开沅, 卢文达译. 北京: 科学出版社, 1958: 第五章.

第十五章 薄板的振动问题

§ 15 - 1 薄板的自由振动

关于薄板的振动问题，这里将只讨论薄板在垂直于中面方向的所谓横向振动，因为这是工程实际中的重要问题。至于薄板在平行于中面方向的所谓纵向振动，由于它在工程实际中无关重要，而且在数学上也难以处理，所以不加讨论。我们首先来讨论薄板的自由振动。

薄板自由振动的一般问题是这样提出的：在一定的横向荷载作用下处于平衡位置的薄板，受到干扰力的作用而偏离这一位置，当干扰力被除去以后，在该平衡位置附近作微幅振动。(1)试求薄板振动的频率，特别是最低频率。(2)设已知薄板的初始条件，即已知初挠度及初速度，试求薄板在任一瞬时的挠度。当然，如果求得薄板在任一瞬时的挠度，就极易求得薄板在该瞬时的内力。

设薄板在平衡位置的挠度为 $w_0 = w_0(x, y)$ ，这时，薄板所受的横向静荷载为 $q = q(x, y)$ 。按照薄板的弹性曲面微分方程，我们有：

$$D\nabla^4 w_0 = q_0 \quad (\text{a})$$

式(a)表示：薄板每单位面积上所受的弹性力 $D\nabla^4 w_0$ 和它所受的横向荷载 q 成平衡。

设薄板在振动过程中的任一瞬时 t 的挠度为 $w_t = w_t(x, y, t)$ ，则薄板每单位面积上在该瞬时所受的弹性力 $D\nabla^4 w_t$ ，将与横向荷载 q 及惯性力 q_i 成平衡，即

$$D\nabla^4 w_t = q + q_i \quad (\text{b})$$

注意薄板的加速度是 $\frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2}$ ，因而每单位面积上的惯性力是

$$q_i = -\bar{m} \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2}$$

其中 \bar{m} 为薄板每单位面积内的质量(包括薄板本身的质量和随同薄板振动的质量)，则式(b)可以改写为

$$D\nabla^4 w_t = q - \bar{m} \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} \quad (c)$$

将式(c)与式(a)相减, 得到

$$D\nabla^4 (w_t - w_s) = -\bar{m} \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2}$$

由于 w_s 不随时间改变, $\frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} = 0$, 所以上式可以改写成为

$$D\nabla^4 (w_t - w_s) = -\bar{m} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w_t - w_s) \quad (d)$$

在以下的分析中, 为了简便, 我们把薄板的挠度不从平面位置量起, 而从平衡位置量起。于是薄板在任一瞬时的挠度为 $w = w_t - w_s$, 而式(d)成为

$$D\nabla^4 w = -\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

或

$$\nabla^4 w + \frac{\bar{m}}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (15-1)$$

这就是薄板自由振动的微分方程。

现在来试求微分方程(15-1)的如下形式的解答:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t) W_m(x, y) \quad (15-2)$$

在这里, 薄板上每一点 (x, y) 的挠度, 被表示成为无数多个简谐振动下的挠度相叠加, 而每一个简谐振动的频率是 ω_m 。另一方面, 薄板在每一瞬时 t 的挠度, 则被表示成为无数多种振形下的挠度相叠加, 而每一种振形下的挠度是由振形函数 $W_m(x, y)$ 表示的。

为了求出各种振形下的振形函数 W_m , 以及与之相应的频率 ω_m , 我们取

$$w = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) W(x, y),$$

代入自由振动微分方程(15-1), 然后消去因子 $(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$, 得出所谓振形微分方程

$$\nabla^4 W - \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} W = 0 \quad (15-3)$$

如果可以由这一微分方程求得 W 的满足边界条件的非零解, 即可由关系式

$$\omega^2 = \frac{D \nabla^4 W}{\bar{m} W} \quad (e)$$

求得相应的频率 ω 。自由振动的频率, 称为自然频率或固有频率, 它们完全决定于薄板的固有特性, 而与外来因素无关。

实际上, 只有当薄板每单位面积内的振动质量 \bar{m} 为常量时, 才有可能求得

函数形式的解答。这时，命

$$\frac{\omega^2 \bar{m}}{D} = \gamma^4, \quad (15-4)$$

则振形微分方程(15-3)简化为常系数微分方程

$$\nabla^4 W - \gamma^4 W = 0. \quad (15-5)$$

现在就可能比较简便地求得 W 的满足边界条件的、函数形式的非零解，从而求得相应的 γ 值，然后再用(15-4)式求出相应的频率。将求出的那些振形函数及相应的频率取为 W_m 及 ω_m ，代入表达式(15-2)，就有可能利用初始条件求得该表达式中的系数 A_m 及 B_m 。

设初始条件为

$$\begin{aligned} (w)_{t=0} &= w_0(x, y), \\ \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} &= v_0(x, y), \end{aligned}$$

则由(15-2)式得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} A_m W_m(x, y) &= w_0(x, y), \\ \sum_{m=1}^{\infty} B_m \omega_m W_m(x, y) &= v_0(x, y). \end{aligned}$$

于是可见，为了求得 A_m 及 B_m ，须将已知的初挠度 w_0 及初速度 v_0 展为 W_m 的级数，这在数学处理上是比较困难的。因此，只有在特殊简单的情况下，才有可能求得薄板自由振动的完整解答，即任一瞬时的挠度。在绝大多数的情况下，只可能求得各种振形的振形函数及相应的频率。但是，这也就可以解决工程上的主要问题了。

§ 15-2 四边简支的矩形薄板的自由振动

当矩形薄板的四边均为简支边时，图 15-1a，可以较简单地得出自由振动的完整解答。取振形函数为

$$W = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (a)$$

其中 m 及 n 为整数，可以满足边界条件。代入振形微分方程(15-5)，得到

$$\left[\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \gamma^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

为了这一条件在薄板中面上的所有各点都能满足，也就是在 x 和 y 取任意值时都能满足，必须有

$$\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \gamma^4 = 0,$$

由此得

$$\gamma^4 = \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2, \quad (\text{b})$$

将式(b)代入(15-4)式, 得出求自然频率的公式

$$\omega^2 = \frac{D\gamma^4}{m} = \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \frac{D}{m}. \quad (\text{c})$$

命 m 及 n 取不同的整数值, 可以求得相应于不同振形的自然频率

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (15-6)$$

当薄板以这一频率振动时, 振形函数为

$$W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

而薄板的挠度为

$$w = (A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (\text{d})$$

当 $m = n = 1$ 时, 由(15-6)式得到薄板的最低自然频率

$$\omega_{11} = \omega_{\min} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}}$$

与此相应, 薄板振动的振形函数为

$$W_{11} = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

而薄板在 x 方向和 y 方向都只有一个正弦半波。最大挠度发生在薄板的中央 ($x = a/2, y = b/2$)。

当 $m = 2$ 而 $n = 1$ 时, 自然频率为

$$\omega_{21} = \pi^2 \left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}}$$

相应的振形函数为

$$W_{21} = \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

薄板在 x 方向有两个正弦半波, 而在 y 方向只有一个正弦半波。对称轴 $x = a/2$ 是一根节线(挠度为零的线, 亦即在薄板振动时保持静止的线)。振形如图 15-1b 所示, 图中的有阴线部分及空白部分表示相反方向的挠度。

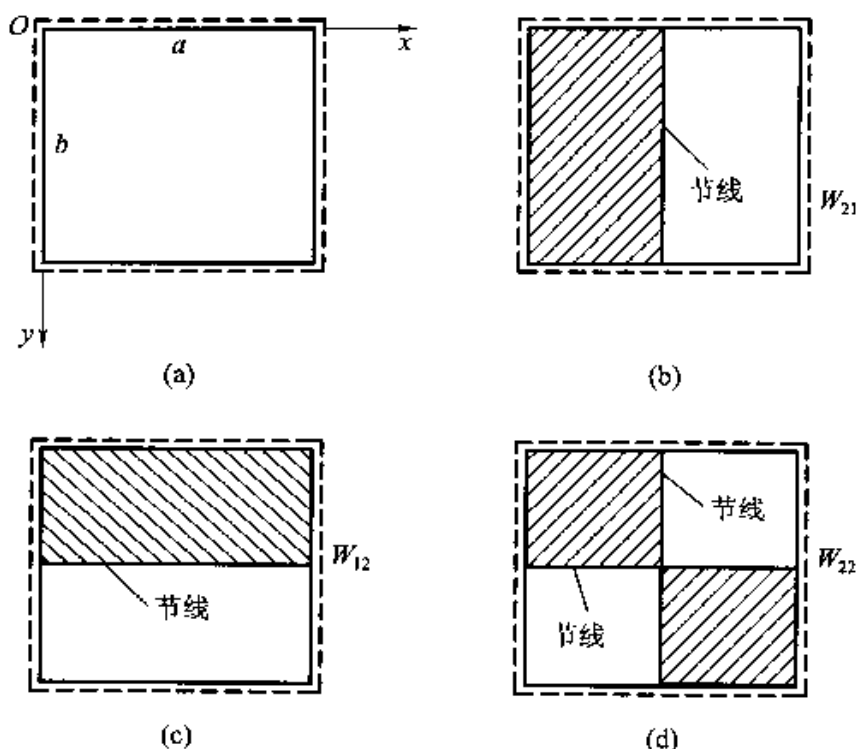


图 15-1

当 $m = 1$ 而 $n = 2$ 时, 得到

$$\omega_{12} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad W_{12} = \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{2\pi y}{b},$$

振形如图 15-1c 所示。当 $m = n = 2$ 时, 得到

$$\omega_{22} = \pi^2 \left(\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad W_{22} = \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b},$$

振形如图 15-1d 所示。余类推。

薄板在自由振动中任一瞬时的总挠度, 可以写成 (d) 型挠度表达式的总和, 即

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (e)$$

为了把式 (e) 中的系数 A_{mn} 及 B_{mn} 用已知的初挠度 w_0 及初速度 v_0 来表示, 首先要将 w_0 及 v_0 表示成为振形函数的级数:

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} W_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} W_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

按照级数展开的公式 (13-25), 我们有

$$\left. \begin{aligned} C_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b w_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \\ D_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b v_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (15-7)$$

另一方面, 根据初始条件

$$(w)_{t=0} = w_0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = v_0,$$

由式(e)及式(f)得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}$$

由此得

$$A_{mn} = C_{mn}, \quad B_{mn} = \frac{D_{mn}}{\omega_{mn}},$$

代入式(e), 即得完整的解答如下:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{D_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (15-8)$$

其中的系数 C_{mn} 及 D_{mn} 如公式(15-7)所示。

如果矩形薄板的边界并非全为简支边, 就不可能求得自由振动的完整解答。

§ 15-3 两对边简支的矩形薄板的自由振动

当矩形薄板有两对边为简支边时(其余两边可以是任意边), 虽然不可能求得自由振动的完整解答, 但是可以求得振形微分方程的函数形式的非零解, 从而求得薄板自然频率的精确值。

设薄板的 $x=0$ 及 $x=a$ 的两边为简支边, 图 15-2。取振形函数为

$$W = Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (a)$$

其中 Y_m 只是 y 的函数, 可以满足该两简支边的边界条件。将式(a)代入振形微分方程(15-5), 得出常微分方程

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - \frac{2m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \gamma^2 \right) Y_m = 0, \quad (b)$$

它的特征方程是

$$r^4 - \frac{2m^2\pi^2}{a^2}r^2 + \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} - \gamma^4\right) = 0,$$

而这个代数方程的四个根是

$$\pm \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \gamma^2}, \quad \pm \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} - \gamma^2}. \quad (c)$$

在大多数的情况下, $\gamma^2 > m^2\pi^2/a^2$, 而式(c)所示的四个根是两实两虚, 可以写做

$$\pm \sqrt{\gamma^2 + \frac{m^2\pi^2}{a^2}}, \quad \pm i \sqrt{\gamma^2 - \frac{m^2\pi^2}{a^2}}.$$

注意 $\gamma^2 = \omega \sqrt{m/D}$, 取正实数

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\gamma^2 + \frac{m^2\pi^2}{a^2}} = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{m}{D}} + \frac{m^2\pi^2}{a^2}}, \\ \beta &= \sqrt{\gamma^2 - \frac{m^2\pi^2}{a^2}} = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{m}{D}} - \frac{m^2\pi^2}{a^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

则上述四个根成为 $\pm \alpha$ 及 $\pm i\beta$, 而微分方程(b)的解答可以写成

$$Y_m = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y,$$

从而得振形函数的表达式

$$W = (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (15-9)$$

在少数情况下, $\gamma^2 < m^2\pi^2/a^2$, 而式(c)所示的四个根都是实根。这时, 取正实数

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \gamma^2} = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \omega \sqrt{\frac{m}{D}}}, \\ \beta' &= \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} - \gamma^2} = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} - \omega \sqrt{\frac{m}{D}}}, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

则振形函数的表达式成为

$$W = (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 \cosh \beta' y + C_4 \sinh \beta' y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (15-10)$$

不论在哪一种情况下, 都可由 $y=0$ 及 $y=b$ 处的四个边界条件得出 C_1 至 C_4 的一组四个齐次线性方程。相应于薄板的任何振动, 振形函数 W 必须具有某一个非零解, 因而系数 C_1 至 C_4 不能都等于零。于是可以命上述齐次线性方程组的系数行列式等于零, 从而得到一个计算自然频率的方程。

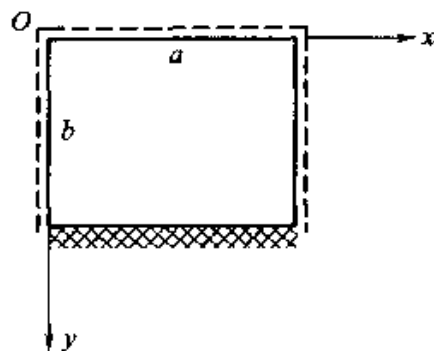


图 15-2

例如, 设 $y=0$ 的一边为简支边而 $y=b$ 的一边为夹支边, 图 15-2, 则有如下的四个边界条件:

$$\begin{aligned} (W)_{y=0} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{y=0} &= 0, \\ (W)_{y=b} &= 0, & \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=b} &= 0. \end{aligned}$$

将(15-9)式代入, 得到 C_1 至 C_4 的齐次线性方程组

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0, \\ \alpha^2 C_1 - \beta^2 C_3 &= 0, \\ \cosh \alpha b C_1 + \sinh \alpha b C_2 + \cos \beta b C_3 + \sin \beta b C_4 &= 0, \\ \alpha \sinh \alpha b C_1 + \alpha \cosh \alpha b C_2 - \beta \sin \beta b C_3 + \beta \cos \beta b C_4 &= 0. \end{aligned}$$

命这一方程组的系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & -\beta^2 & 0 \\ \cosh \alpha b & \sinh \alpha b & \cos \beta b & \sin \beta b \\ \alpha \sinh \alpha b & \alpha \cosh \alpha b & -\beta \sin \beta b & \beta \cos \beta b \end{vmatrix} = 0.$$

展开以后, 进行一些简化, 最后可得出 $\beta \tanh \alpha b - \alpha \tan \beta b = 0$, 或

$$\frac{\tanh \alpha b}{\alpha b} - \frac{\tan \beta b}{\beta b} = 0.$$

利用式(d), 上列方程可以改写为

$$\frac{\tanh \sqrt{\omega b^2 \sqrt{m/D} + m^2 \pi^2 b^2 / a^2}}{\sqrt{\omega b^2 \sqrt{m/D} + m^2 \pi^2 b^2 / a^2}} - \frac{\tan \sqrt{\omega b^2 \sqrt{m/D} - m^2 \pi^2 b^2 / a^2}}{\sqrt{\omega b^2 \sqrt{m/D} - m^2 \pi^2 b^2 / a^2}} = 0. \quad (f)$$

对于一定的边长 a 和 b , 可取 $m = 1, 2, 3, \dots$, 用试算法求得 $\omega b^2 \sqrt{m/D}$ 的实根, 即可求得自然频率 ω 。

用如上所述方法求得的最低自然频率, 可以表示成为

$$\omega_{\min} = \frac{k}{b^2} \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad (g)$$

其中 k 为量纲一的系数, 它依赖于边长比值 a/b 。算得的 k 值如下表所示。

a/b	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	2.0	3.0
k	51.67	30.67	23.65	20.53	18.90	17.33	16.25

这样进行计算，虽然可以求得自然频率的精确值，但代数运算和数值计算都是比较繁的。因此，在工程实践中计算矩形板的自然频率，特别是最低自然频率，不论边界条件如何，都宜用差分法或能量法，分别见 § 15-5 及 § 15-6。

§ 15-4 圆形薄板的自由振动

对于圆形薄板的自由振动，也可以与上相同地进行分析，但须将用到的各个方程向极坐标中变换。在极坐标中，薄板的自由振动微分方程仍然是 (15-1)，即

$$\nabla^4 w + \frac{\bar{m}}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{a})$$

但其中 $w = w(\rho, \varphi, t)$ ，而

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2。$$

现在，仍然把微分方程 (a) 的解答取为无数多简谐振动的叠加，即

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t) W_m(\rho, \varphi), \quad (\text{b})$$

其中 ω_m 为各个简谐振动的频率，而 W_m 为相应的振形函数。

为了求出各种振形的振形函数 W_m ，以及与之相应的频率 ω_m ，我们取

$$w = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) W(\rho, \varphi)。 \quad (\text{c})$$

代入微分方程 (a)，仍然将得出振形微分方程

$$\nabla^4 W - \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} W = 0,$$

或

$$\nabla^4 W - \gamma^4 W = 0。 \quad (\text{d})$$

微分方程 (d) 可以改写为

$$(\nabla^2 + \gamma^2)(\nabla^2 - \gamma^2)W = 0,$$

也就是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \gamma^2 \right) W = 0。 \quad (\text{e})$$

显然，微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \pm \gamma^2 \right) W = 0 \quad (\text{f})$$

的解，都将是微分方程 (e) 的解，因而也是微分方程 (d) 的解。

取振形函数为如下的形式：

$$W = F(\rho) \cos n\varphi, \quad (g)$$

其中 $n=0, 1, 2, \dots$ 。相应于 $n=0$ ，振形是轴对称的。相应于 $n=1$ 及 $n=2$ ，薄板的环向围线将分别具有一个及两个波，也就是，薄板的中面将分别具有一根或两根径向节线，余类推。将式(g)代入式(f)，得常微分方程

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{d\rho} + \left(\pm \gamma^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) F = 0,$$

或引用量纲一的变量 $x = \gamma\rho$ 而得

$$x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + x \frac{dF}{dx} + (\pm x^2 - n^2) F = 0。$$

这一微分方程的解答是

$$F = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x) + C_3 I_n(x) + C_4 K_n(x), \quad (h)$$

其中 $J_n(x)$ 及 $N_n(x)$ 分别为实宗量的、 n 阶的第一种及第二种贝塞尔函数， $I_n(x)$ 及 $K_n(x)$ 分别为虚宗量的、 n 阶的第一种及第二种贝塞尔函数。将式(h)代入式(g)，即得振形函数如下：

$$W = [C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x) + C_3 I_n(x) + C_4 K_n(x)] \cos n\varphi。 \quad (15-11)$$

如果薄板具有圆孔，则在外边界及孔边各有两个边界条件。利用这四个边界条件，可得出 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 的一组四个齐次线性方程。命这一方程组的系数行列式等于零，可以得出计算频率的方程，从而求得各阶的自然频率。

如果薄板无孔，则在薄板的中心 ($x = \gamma\rho = 0$)， $N_n(x)$ 及 $K_n(x)$ 成为无限大。为了使 W 不致成为无限大，须在(15-11)式中取 $C_2 = C_4 = 0$ 。于是式(15-11)简化为

$$W = [C_1 J_n(x) + C_3 I_n(x)] \cos n\varphi。 \quad (15-12)$$

利用板边的两个边界条件，可以得出 C_1 及 C_3 的一组两个齐次线性方程。命方程组的系数行列式等于零，也就得出计算自然频率的方程。

§ 15-5 用差分法求自然频率

只有在前两节中提到的那几种简单情况下，才可能求得振形微分方程的函数形式的非零解，从而求得薄板自然频率的精确值。在其他的情况下，振形微分方程可以用差分法进行处理，从而求得自然频率的近似值。不须采用很密的网格，就可以求得满足工程上精度要求的自然频率，特别是最低的自然频率。

按照振形微分方程(15-3)，在任一典型结点 0 ，图 14-1，有

$$(\nabla^4 W)_0 - \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} W_0 = 0。$$

利用 § 14-1 中的差分公式, 可得上列方程的差分形式

$$20W_0 - 8(W_1 + W_2 + W_3 + W_4) + 2(W_5 + W_6 + W_7 + W_8) + (W_9 + W_{10} + W_{11} + W_{12}) - \frac{\omega^2 \bar{m}h^4}{D}W_0 = 0,$$

其中 h 是网格间距。引用量纲一的常数

$$\lambda = \frac{\omega^2 \bar{m}h^4}{D}, \quad (15-13)$$

则上列差分方程成为

$$(20 - \lambda)W_0 - 8(W_1 + W_2 + W_3 + W_4) + 2(W_5 + W_6 + W_7 + W_8) + (W_9 + W_{10} + W_{11} + W_{12}) = 0. \quad (15-14)$$

应用边界条件以后, 这些齐次线性方程中的未知 W 值的数目将等于方程的数目。为了薄板可能发生自由振动, 必须这些 W 值具有非零解, 因而上述齐次线性方程的系数行列式必须等于零。这样就得出一个以 λ 为未知值的方程。由这个方程求出 λ , 即可用 (15-13) 式求得自然频率 ω 。

例如, 对于图 15-3a 所示的简支边正方形薄板, 首先用 2×2 的网格, 即 $h = a/2$, 为结点 a 立出 (15-14) 型的差分方程, 并应用简支边的边界条件, 得

$$(20 - \lambda)W_a - 8(0) + 2(0) + (-4W_a) = 0,$$

即

$$(16 - \lambda)W_a = 0.$$

命系数的行列式等于零, 也就是命唯一的系数等于零, 即 $16 - \lambda = 0$, 得到 $\lambda = 16$ 。于是由 (15-13) 式得

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda D}{\bar{m}h^4}} = \sqrt{\frac{16D}{\bar{m}h^4}} = \frac{4}{h^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}} = \frac{16}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}}. \quad (a)$$

其次, 用 3×3 的网格, 即 $h = a/3$, 图 15-3b。假定振形为两向对称, 因而四个内结点处的挠度相同, 均为 W_a 。为任一内结点立出 (15-14) 型的差分方程, 并应用简支边的边界条件, 得

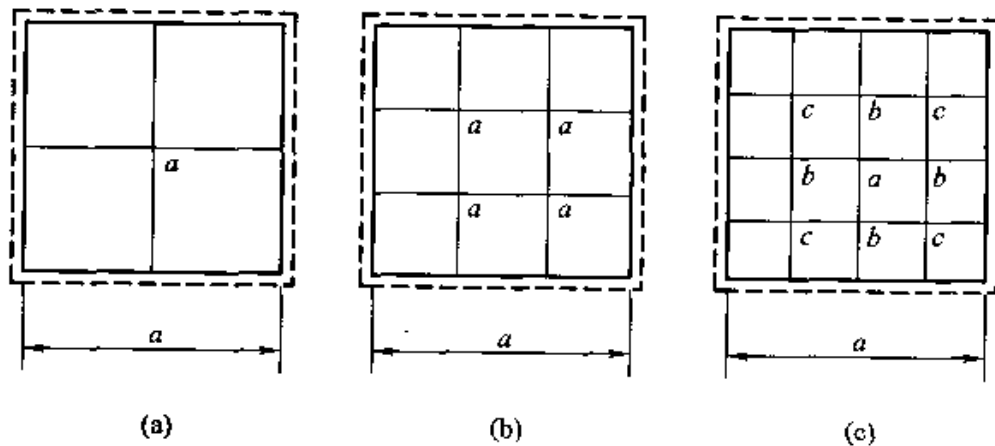


图 15-3

$$(20 - \lambda)W_a - 8(2W_a) + 2(W_a) + 2(-W_a) = 0。$$

归项以后得

$$(4 - \lambda)W_a = 0。$$

命 W_a 的系数等于零，得 $\lambda = 4$ ，从而由(15-13)式得

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda D}{mh^4}} = \sqrt{\frac{4D}{mh^4}} = \frac{2}{h^2} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{18}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}。 \quad (b)$$

如果不假定振形为对称，则将有四个独立的未知 W 值，得出 λ 的四次方程，但这个方程的最小根仍然是 $\lambda = 4$ ，得出的最低自然频率与上相同。

再其次，用 4×4 的网格，即 $h = a/4$ ，图 15-3c。假定振形为四向对称，则仅有三个独立的未知 W 值，即 W_a 、 W_b 、 W_c 。为 a 、 b 、 c 三结点立出(15-14)型的差分方程，并应用简支边的边界条件，得

$$\begin{aligned} (20 - \lambda)W_a - 8(4W_b) + 2(4W_c) &= 0, \\ (20 - \lambda)W_b - 8(W_a + 2W_c) + 2(2W_b) &= 0, \\ (20 - \lambda)W_c - 8(2W_b) + 2(W_a) &= 0。 \end{aligned}$$

简化以后，得

$$\left. \begin{aligned} (20 - \lambda)W_a - 32W_b + 8W_c &= 0, \\ -8W_a + (24 - \lambda)W_b - 16W_c &= 0, \\ 2W_a - 16W_b + (20 - \lambda)W_c &= 0。 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

命这一方程组的系数行列式等于零，得

$$\begin{vmatrix} 20 - \lambda & -32 & 8 \\ -8 & 24 - \lambda & -16 \\ 2 & -16 & 20 - \lambda \end{vmatrix} = 0。$$

展开以后，得 λ 的三次方程

$$\lambda^3 - 64\lambda^2 + 832\lambda - 1024 = 0，$$

它的最小实根是 1.373。于是得最低自然频率

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{\lambda D}{mh^4}} = \sqrt{\frac{1.373D}{mh^4}} = \frac{18.75}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}。 \quad (d)$$

在公式(15-6)中命 $m = n = 1$ ， $b = a$ ，得简支边正方形薄板的最低自然频率的精确值

$$\omega_{\min} = \frac{2\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{19.74}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}。$$

可见式(a)、式(b)及(d)给出的最低自然频率分别比精确值小了 19%、9% 及 5%。

为了明确与式(d)所示频率相应的振形，将相应的 λ 值即 1.373 代入(c)中的任何两个方程，例如前两个方程，得到

$$\begin{aligned} 18.627W_a - 32W_b + 8W_c &= 0, \\ -8W_a + 22.627W_b - 16W_c &= 0. \end{aligned}$$

求解 W_b 及 W_c , 用 W_a 表示, 得

$$W_b = 0.707W_a, \quad W_c = 0.500W_a.$$

如果将这个解答和 $\lambda = 1.373$ 代入(c)中的第三个方程, 当然也会满足。于是, 与式(d)所示频率相应的振形, 可由如下的比值反映出来:

$$W_a : W_b : W_c = 1 : 0.707 : 0.500.$$

§ 15-6 用能量法求自然频率

瑞利曾经提出一个计算薄板最低自然频率的近似法, 即所谓能量法, 其原理如下:

在 § 15-1 中已经说明, 当薄板以某一频率 ω 及振形 $W(x, y)$ 进行自由振动时, 它的瞬时挠度可以表示成为

$$w = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) W(x, y). \quad (\text{a})$$

如果以薄板经过平衡位置的瞬时作为初瞬时 ($t=0$), 则有

$$(w)_{t=0} = A W(x, y) = 0.$$

由此可见 $A=0$ 。将常数 B 归入 $W(x, y)$, 则式(a)简化为

$$w = W(x, y) \sin \omega t. \quad (\text{b})$$

速度的表达式则成为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = W(x, y) \omega \cos \omega t. \quad (\text{c})$$

为了计算能量时比较简便, 假定薄板并不受有静荷载, 于是静挠度 w_0 等于零, 而薄板的平衡位置就相应于无挠度时的平面状态。这样, 由式(b)及式(c)可见, 当薄板距平衡位置最远时, 即 w 为最大或最小时, 我们有 $\sin \omega t = \pm 1$, $w = \pm W$, $\cos \omega t = 0$, 从而有 $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ 。这时, 薄板的动能为零而形变势能达到最大值。按照(14-22)式或(14-23)式, 这个最大形变势能是

$$V_{s, \max} = \frac{D}{2} \iint \left\{ (\nabla^2 W)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (15-15)$$

或者在薄板只有夹支边和简支边的情况下, 上式简化为

$$V_{s, \max} = \frac{D}{2} \iint (\nabla^2 W)^2 dx dy. \quad (15-16)$$

当薄板经过平衡位置时, 我们有 $w=0$, $\sin \omega t=0$, $\cos \omega t = \pm 1$, 速度达到最大

值 $\pm \omega W$ 。这时，薄板的形变势能为零，而动能达到最大值。按照式(c)，这个最大动能是

$$E_{k,\max} = \iint \frac{1}{2} \bar{m} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy = \frac{\omega^2}{2} \iint \bar{m} W^2 dx dy. \quad (15-17)$$

根据能量守恒定理，薄板在距平衡位置最远时的形变势能应等于它在平衡位置时的动能：

$$V_{e,\max} = E_{k,\max}, \quad \text{即} \quad V_{e,\max} - E_{k,\max} = 0.$$

于是，如果设定薄板的振形函数 W ，使其满足边界条件，并且尽可能地符合频率最低的振形，根据这个 W 求出 $V_{e,\max}$ 及 $E_{k,\max}$ ，命 $V_{e,\max} = E_{k,\max}$ ，即可求得最低自然频率。

由于设定的振形函数 W 未必能相应于最低频率的振形，所以这样求得的最低频率可能不够精确。为了求得较精确的最低自然频率，里茨建议把振形函数取为

$$W = \sum_m C_m W_m, \quad (15-18)$$

其中 W_m 是满足边界条件的设定函数， C_m 是互不依赖的待定系数，然后选择系数 C_m ，使得 $V_{e,\max} - E_{k,\max}$ 为最小，即

$$\frac{\partial}{\partial C_m} (V_{e,\max} - E_{k,\max}) = 0. \quad (15-19)$$

这是 C_m 的一组 m 个齐次线性方程。为了 W 具有非零解，必须 C_m 具有非零解，因而该线性方程组的系数行列式必须等于零。这样就得出求解自然频率 ω 的方程。

方程(15-19)可以导出如下：命

$$Q = \frac{1}{2} \iint \bar{m} W^2 dx dy,$$

则由公式(15-17)及 $E_{k,\max} = V_{e,\max}$ 可得

$$Q = E_{k,\max} / \omega^2, \quad (d)$$

$$\omega^2 = V_{e,\max} / Q. \quad (e)$$

为了求得最低频率，按照式(e)命 $\frac{\partial \omega^2}{\partial C_m} = 0$ ，得出

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial V_{e,\max}}{\partial C_m} - \frac{V_{e,\max}}{Q} \frac{\partial Q}{\partial C_m} \right) = 0.$$

将由式(d)得来的 $\frac{\partial Q}{\partial C_m} = \frac{\partial E_{k,\max}}{\partial C_m} / \omega^2$ 代入，并按照式(e)将 $V_{e,\max} / Q$ 用 ω^2 代替，然后删去因子 $1/Q$ ，即得方程(15-19)。

在理论上，设定的振形函数只须满足位移边界条件，而不一定要满足内力

边界条件，因为内力边界条件是平衡条件，而在能量法中，已经用能量关系代替了平衡条件。但是，如果能够同时满足一部分或全部内力边界条件，则求得的最低频率可以具有较好的精度。

对于圆形薄板，宜用极坐标进行分析。为此，振形函数须改用极坐标表示，即

$$W = W(\rho, \varphi)。 \quad (15-20)$$

与此相应， $V_{e, \max}$ 也须改用极坐标表示。参阅公式(14-26)，可得

$$V_{e, \max} = \frac{D}{2} \iint \left\{ (\nabla^2 W)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} \rho d\rho d\varphi。 \quad (15-21)$$

当全部边界为夹支边时，参阅公式(14-23)，可得

$$V_{e, \max} = \frac{D}{2} \iint (\nabla^2 W)^2 \rho d\rho d\varphi。 \quad (15-22)$$

同样 $E_{k, \max}$ 也须改用极坐标表示，成为

$$E_{k, \max} = \frac{\omega^2}{2} \iint \bar{m} W^2 \rho d\rho d\varphi， \quad (15-23)$$

对于圆形薄板的轴对称自由振动，参阅公式(14-28)，可得

$$V_{e, \max} = \pi D \int \left[\rho \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{dW}{d\rho} \right)^2 + 2\mu \frac{dW}{d\rho} \frac{d^2 W}{d\rho^2} \right] d\rho。 \quad (15-24)$$

当全部边界为夹支边时，参阅公式(14-30)，可得

$$V_{e, \max} = \pi D \int \left[\rho \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{dW}{d\rho} \right)^2 \right] d\rho。 \quad (15-25)$$

最大动能的公式(15-23)则简化为

$$E_{k, \max} = \pi \omega^2 \int \bar{m} W^2 \rho d\rho。 \quad (15-26)$$

当薄板上尚有集中质量随同薄板振动时，还须按照设定的振形函数 W ，求出集中质量的最大动能，计入 $E_{k, \max}$ ，然后进行计算。

对于用肋条加强了薄板，即所谓加肋板，仍然可以用能量法求得最低自然频率。计算的步骤同上，但须按照肋条的弯曲刚度和设定的振形函数 W ，求出各个肋条的最大形变势能，计入 $V_{e, \max}$ ，还须按照肋条的质量分布和设定的 W ，求出各个肋条的最大动能，计入 $E_{k, \max}$ ，然后进行计算。

读者试证：如果在(15-18)式中只取一项，则由(15-19)式可以得到 $V_{e, \max} = E_{k, \max}$ 。

§ 15-7 用能量法求自然频率举例

作为第一个例题,试考虑图 15-4 中所示的夹支边矩形薄板,用瑞利法求最低自然频率。把振形函数取为

$$W = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2, \quad (\text{a})$$

可以满足位移边界条件。代入公式(15-16),得

$$\begin{aligned} V_{e,\max} &= \frac{D}{2} 2 \int_0^a 2 \int_0^b (\nabla^2 W)^2 dx dy \\ &= \frac{2^{14} D}{3^2 \times 5^2 \times 7} \left(a^4 + b^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 \right) a^5 b^5. \end{aligned}$$

将式(a)代入公式(15-17),假定 \bar{m} 为常量,得

$$E_{k,\max} = \frac{\omega^2}{2} \bar{m} 2 \int_0^a 2 \int_0^b W^2 dx dy = \frac{2^{15} \omega^2 \bar{m}}{3^4 \times 5^2 \times 7^2} a^9 b^9.$$

于是由 $V_{e,\max} = E_{k,\max}$ 得出

$$\omega^2 = \frac{63D}{2a^4 b^4 \bar{m}} \left(a^4 + b^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 \right),$$

从而得到

$$\omega = \frac{\sqrt{\frac{63}{2} \left(1 + \frac{4}{7} \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right)}}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}}. \quad (\text{b})$$

对于正方形薄板, $b = a$, 我们得到

$$\omega = \frac{9.000}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}}.$$

与精确解答 $\frac{8.996}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}}$ 几乎一致。

作为第二个例题,再次考虑四边简支的矩形薄板,图 15-5,用里茨法求最低自然频率。取振形函数为

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} W_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (\text{c})$$

可以满足位移边界条件(同时也能满足内力边界条件)。代入公式(15-16),得

$$V_{e,\max} = \frac{\pi^4 abD}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2.$$

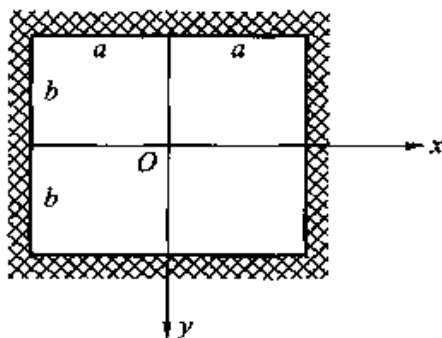


图 15-4

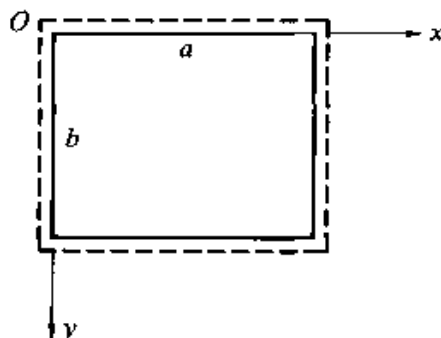


图 15-5

将式(c)代入公式(15-17), 假定 \bar{m} 为常量, 得

$$\begin{aligned} E_{k,\max} &= \frac{\omega^2 \bar{m}}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dx dy \\ &= \frac{\omega^2 \bar{m} ab}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2. \end{aligned}$$

于是由 $\frac{\partial}{\partial C_{mn}}(V_{e,\max} - E_{k,\max}) = 0$ 得出

$$\frac{\pi^4 ab D}{8} 2C_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\omega^2 \bar{m} ab}{8} 2C_{mn} = 0.$$

命方程的系数行列式等于零(即该系数等于零), 得到

$$\omega = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}},$$

与 § 15-2 中的精确解答(15-6)相同。

作为第三个例题, 试考虑半径为 a 的夹支边圆板, 用瑞利法求最低自然频率。取振形函数为

$$W = \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2, \quad (d)$$

可以满足边界条件。代入公式(15-25), 得

$$V_{e,\max} = \pi D \int_0^a \left[\rho \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{dW}{d\rho} \right)^2 \right] d\rho = \frac{32}{3a^2} \pi D.$$

将式(d)代入公式(15-26), 假定 \bar{m} 为常量, 得

$$E_{k,\max} = \pi \omega^2 \bar{m} \int_0^a W^2 \rho d\rho = \frac{\pi}{10} \omega^2 \bar{m} a^2.$$

命 $V_{e,\max} = E_{k,\max}$, 即得

$$\omega = \frac{8 \sqrt{15}}{3a^2} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{10.33}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

比精确解答 $\frac{10.22}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$ 只大出 1%。

§ 15-8 薄板的受迫振动

现在来讨论薄板在动力荷载作用下进行的振动，即所谓受迫振动。薄板的受迫振动微分方程，可以和自由振动微分方程同样地导出如下。

设薄板只受横向静荷载 $q = q(x, y)$ 而不受任何动力荷载，在发生静挠度 $w_e = w_e(x, y)$ 以后处于平衡状态，则薄板每单位面积上所受的弹性力 $D\nabla^4 w_e$ 与静荷载成平衡，即

$$D\nabla^4 w_e = q_0 \quad (\text{a})$$

设薄板在动力荷载 $q_t = q_t(x, y, t)$ 的作用下进行振动，而在振动过程中任一瞬时的挠度为 $w_t = w_t(x, y, t)$ ，则薄板每单位面积上所受的弹性力 $D\nabla^4 w_t$ 将与静荷载 q 、动力荷载 q_t 及惯性力 q_i 成平衡，即

$$D\nabla^4 w_t = q + q_t + q_i \quad (\text{b})$$

将惯性力 $q_i = -\bar{m}\frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2}$ 代入式(b)以后，得

$$D\nabla^4 w_t = q + q_t - \bar{m}\frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} \quad (\text{c})$$

将式(c)与式(a)相减，得

$$D\nabla^4 (w_t - w_e) = q_t - \bar{m}\frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2}$$

由于 w_e 不随时间而变， $\frac{\partial^2 w_e}{\partial t^2} = 0$ ，所以上式可以改写为

$$D\nabla^4 (w_t - w_e) = q_t - \bar{m}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(w_t - w_e) \quad (\text{d})$$

注意 $w_t - w_e$ 就是薄板在任一瞬时的、从平衡位置量起的 w ，即可由式(d)得

$$D\nabla^4 w = q_t - \bar{m}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

或

$$\nabla^4 w + \frac{\bar{m}}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q_t}{D} \quad (15-27)$$

这就是薄板的受迫振动微分方程。

为了求解薄板的受迫振动问题，必须首先求解该薄板的自由振动问题，求

出它的各种振形的振形函数以及相应的自然频率，然后将它所受的动力荷载展为振形函数的级数，即

$$q_i(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(t) W_m(x, y) \quad (15-28)$$

现在，把微分方程(15-27)的解答取为如下的形式：

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) W_m(x, y) \quad (15-29)$$

将(15-28)及(15-29)两式代入(15-27)式，得

$$\sum_{m=1}^{\infty} T_m \nabla^4 W_m + \frac{\bar{m}}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2 T_m}{dt^2} W_m = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} F_m W_m \quad (e)$$

另一方面，由(15-5)及(15-4)两式可得

$$\nabla^4 W_m = \gamma^4 W_m = \frac{\omega_m^2 \bar{m}}{D} W_m \quad (f)$$

再将式(f)代入式(e)的左边，然后比较两边 W_m 的系数，得

$$\bar{m} \omega_m^2 T_m + \bar{m} \frac{d^2 T_m}{dt^2} = F_m,$$

即

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \omega_m^2 T_m = \frac{1}{\bar{m}} F_m \quad (g)$$

常微分方程(g)的解答可以表示成为

$$T_m = A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t + \tau_m(t), \quad (h)$$

其中的 $\tau_m(t)$ 是任一特解。系数 A_m 及 B_m 则须由初始条件来确定，与自由振动的情况下相同。将式(h)代入(15-29)式，即得薄板在任一瞬时的挠度：

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t + \tau_m(t)] W_m(x, y) \quad (15-30)$$

作为例题，设简支边矩形薄板受有动力荷载

$$q_i = q_0(x, y) \cos \omega t \quad (i)$$

这表示：动力荷载的分布形式保持不变，但它的数量却以频率 ω 周期性地随时间变化。

已知简支边矩形薄板的振形函数为

$$W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (j)$$

首先把动力荷载 q_i 的表达式(i)展为振形函数的级数：

$$q_t = q_0(x, y) \cos \omega t = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos \omega t \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (\text{k})$$

即

$$q_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

按照重三角级数的展开公式(13-25), 我们有

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (1)$$

现在, 将式(k)及式(j)一并代入(15-28)式, 即可见

$$F_{mn} = C_{mn} \cos \omega t,$$

而常微分方程(g)成为

$$\frac{d^2 T_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 T_{mn} = \frac{1}{m} C_{mn} \cos \omega t.$$

这一微分方程的特解可以取为

$$T_{mn} = \frac{C_{mn} \cos \omega t}{\bar{m}(\omega_{mn}^2 - \omega^2)}.$$

于是由(15-30)式得挠度的表达式

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t + \frac{C_{mn}}{\bar{m}(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos \omega t \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (\text{m})$$

并从而得到速度的表达式

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega_{mn} (B_{mn} \cos \omega_{mn} t - A_{mn} \sin \omega_{mn} t) - \frac{C_{mn}}{\bar{m}(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \omega \sin \omega t \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (\text{n})$$

设动力荷载 q_t 开始作用时, 薄板是静止地处于平衡位置, 则初始条件为

$$w_0 = (w)_{t=0} = 0, \quad v_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=0} = 0.$$

由后一条件得 $B_{mn} = 0$, 从而由前一条件得

$$A_{mn} = -\frac{C_{mn}}{\bar{m}(\omega_{mn}^2 - \omega^2)}$$

代入式(m), 即得挠度的最后解答

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{m(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (o)$$

其中的系数 C_{mn} 如式(1)所示。

当动力荷载 q_t 的频率 ω 趋于薄板的某一个自然频率 ω_{mn} 时, 解答(o)中相应的一项 w_{mn} 将具有 $0/0$ 的形式, 不便讨论。因此, 利用关系式

$$\cos \omega t - \cos \omega_{mn} t = 2 \sin \frac{(\omega_{mn} + \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_{mn} - \omega)t}{2},$$

将上述一项变换为

$$w_{mn} = \frac{C_{mn}}{m(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} 2 \sin \frac{(\omega_{mn} + \omega)t}{2} \times \sin \frac{(\omega_{mn} - \omega)t}{2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}。$$

当 ω 趋于 ω_{mn} 时, 这一项成为

$$w_{mn} = \frac{C_{mn}}{2m\omega_{mn}} t \sin(\omega_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

它具有因子 t , 因而随着时间的经过而无限增大, 表示共振现象将发生。当然, 由于阻尼力的存在, 此项振动不会无限增大, 但可能增大到一定的数值而使薄板破坏。因此, 当设计薄板构件时, 和设计其他种构件时一样, 必须使薄板的各阶自然频率不会接近动力荷载的频率, 通常是使薄板构件的最低自然频率远大于该构件所可能受到的动力荷载的频率。这就说明, 在薄板的振动问题中, 最低自然频率的计算是重要的问题。

习 题

15-1 四边简支的矩形薄板, 边长为 a 及 b , 图 15-1a, 设其初速度 v_0 为零而初挠度为

$$w_0 = \zeta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

试导出该薄板自由振动的完整解答。

答案: $w = \zeta \cos \left[\pi^2 \sqrt{\frac{D}{m}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) t \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}。$

15-2 矩形薄板, 长度为 a 的两边夹支, 长度为 b 的两边简支, 图 15-6。试导出求解自然频率的方程, 并求出 $b=a$ 时的最低自然频率。

提示: 注意问题的对称性。

答案: $\alpha \tanh \frac{\alpha b}{2} + \beta \tan \frac{\beta b}{2} = 0, \quad \omega_{mn} = \frac{28.9}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}。$

15-3 设有圆形薄板, 半径为 a , 边界夹支, 图 15-7, 作轴对称自由振动, 试导出求解自然频率的方程, 并求出最低自然频率。

答案: $J_0(\gamma a)I_1(\gamma a) + J_1(\gamma a)I_0(\gamma a) = 0$, $\omega_{\min} = \frac{10.22}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$

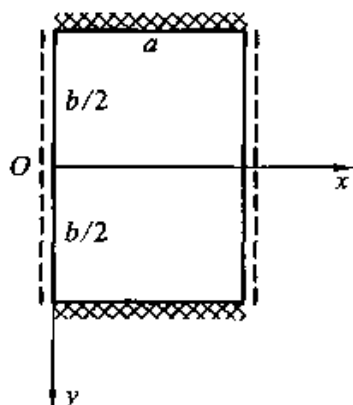


图 15-6

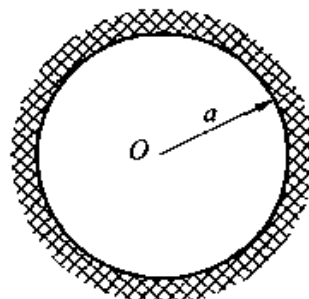
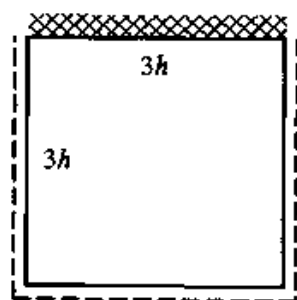


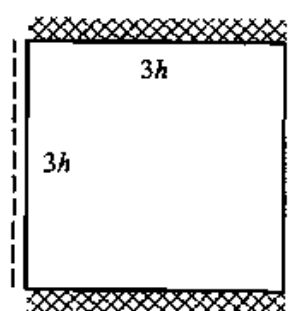
图 15-7

15-4 正方形薄板, 边长为 $3h$, 图 15-8, 试针对四种不同的边界情况, 用 3×3 的网格, 计算最低自然频率。对夹支边采用较精确的边界条件。

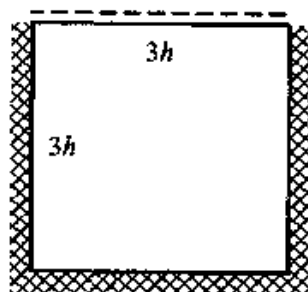
答案: (a) $\omega_{\min} = \frac{2.33}{h^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$, (b) $\omega_{\min} = \frac{2.74}{h^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$,
 (c) $\omega_{\min} = \frac{2.99}{h^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$, (d) $\omega_{\min} = \frac{3.32}{h^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$



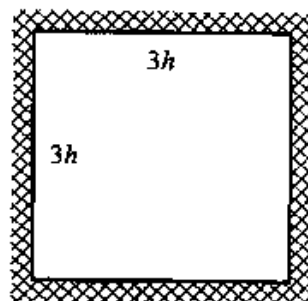
(a)



(b)



(c)



(d)

图 15-8

15-5 矩形薄板, 两对边简支, 两对边夹支, 图 15-9。试取振形函数为

$$W = \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

用能量法求最低自然频率。

$$\text{答案: } \omega_{\min} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{1 + \frac{8a^2}{3b^2} + \frac{16a^4}{3b^4}} \sqrt{\frac{D}{m}}。$$

15-6 矩形薄板，三边简支，一边自由，图 15-10。试取振形函数为

$$W = y \sin \frac{\pi x}{a},$$

用能量法求最低自然频率。

$$\text{答案: } \omega_{\min} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{1 + \frac{6(1-\mu)a^2}{\pi^2 b^2}} \sqrt{\frac{D}{m}}。$$

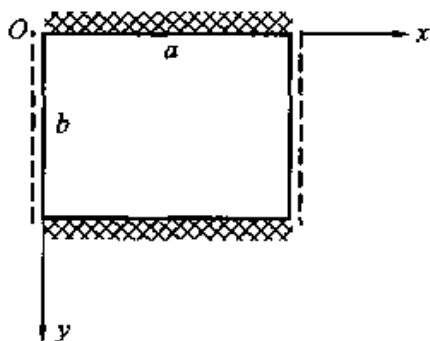


图 15-9

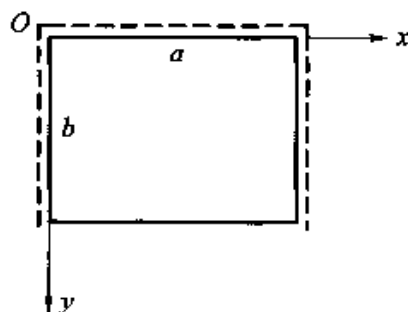


图 15-10

15-7 在习题 15-6 中，假定在自由边的中点还有一个集中质量 M 随着薄板振动，试求最低自然频率。

$$\text{答案: } \omega_{\min} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{1 + \frac{6(1-\mu)a^2}{\pi^2 b^2}} \sqrt{\frac{D}{\bar{m} + \frac{6M}{ab}}}$$

15-8 在 § 15-7 的夹支边圆板例题中，假定在薄板中心还有一个集中质量 M 随着薄板振动，试求最低自然频率。

$$\text{答案: } \omega_{\min} = \frac{8\sqrt{15}}{3a^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{m} + \frac{5M}{\pi a^2}}}$$

参 考 教 材

- [1] 菲利波夫著. 弹性系统的振动[M]. 俞忽等译. 北京: 建筑工程出版社, 1959: 第十一章.
- [2] D. J. Gorman 著. *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates*[M]. Elsevier, 1982: Chapter 2.

第十六章 薄板的稳定问题

§ 16-1 薄板受纵横荷载的共同作用

在薄板的小挠度弯曲问题中，我们假定薄板只受有横向荷载，而且假定薄板的挠度很小，可以不计中面内各点平行于中面的位移。这时，薄板的弹性曲面是中和面，不发生伸缩和切应变，因而也不受平行于中面的应力。

当薄板在边界上受有纵向荷载时，由于板很薄，我们可以假定只发生平行于中面的应力，而且这些应力不沿薄板的厚度变化。这是薄板在纵向荷载作用下的平面应力问题。这时，薄板每单位宽度上的平面应力将合成为如下的所谓中面内力或薄膜内力：

$$\left. \begin{aligned} F_{Tx} &= \delta \sigma_x, & F_{Ty} &= \delta \sigma_y, \\ F_{Txy} &= \delta \tau_{xy}, & F_{Tyx} &= \delta \tau_{yx}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中 δ 是薄板的厚度， F_{Tx} 和 F_{Ty} 是拉压力， F_{Txy} 和 F_{Tyx} 称为平错力或纵向剪力，又称为顺剪力。

当薄板同时受有横向荷载及纵向荷载时，如果纵向荷载很小，因而中面内力也很小，它对于薄板弯曲的影响可以不计，那么，我们就可以分别计算两向荷载引起的应力，然后叠加。但是，如果中面内力并非很小，那就必须考虑中面内力对弯曲的影响。下面来导出薄板在这种情况下的弹性曲面微分方程。

试考虑薄板任一微分块的平衡，图 16-1。为简明起见，只画出该微分块的中面，并将横向荷载以及薄板横截面上的内力用力矢和矩矢表示在中面上。首先，以通过微分块中心面平行于 z 轴的直线为矩轴，写出力矩的平衡方程，略去微量以后，将得出

$$F_{Tyx} = F_{Txy} \circ \quad (b)$$

这也可以根据切应力的互等关系 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ 和式 (a) 直接导出的。其次，将所有各力投影到 x 轴和 y 轴上，立出投影的平衡方程，将得出

$$\frac{\partial F_{Tx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{Tyx}}{\partial y} = 0,$$

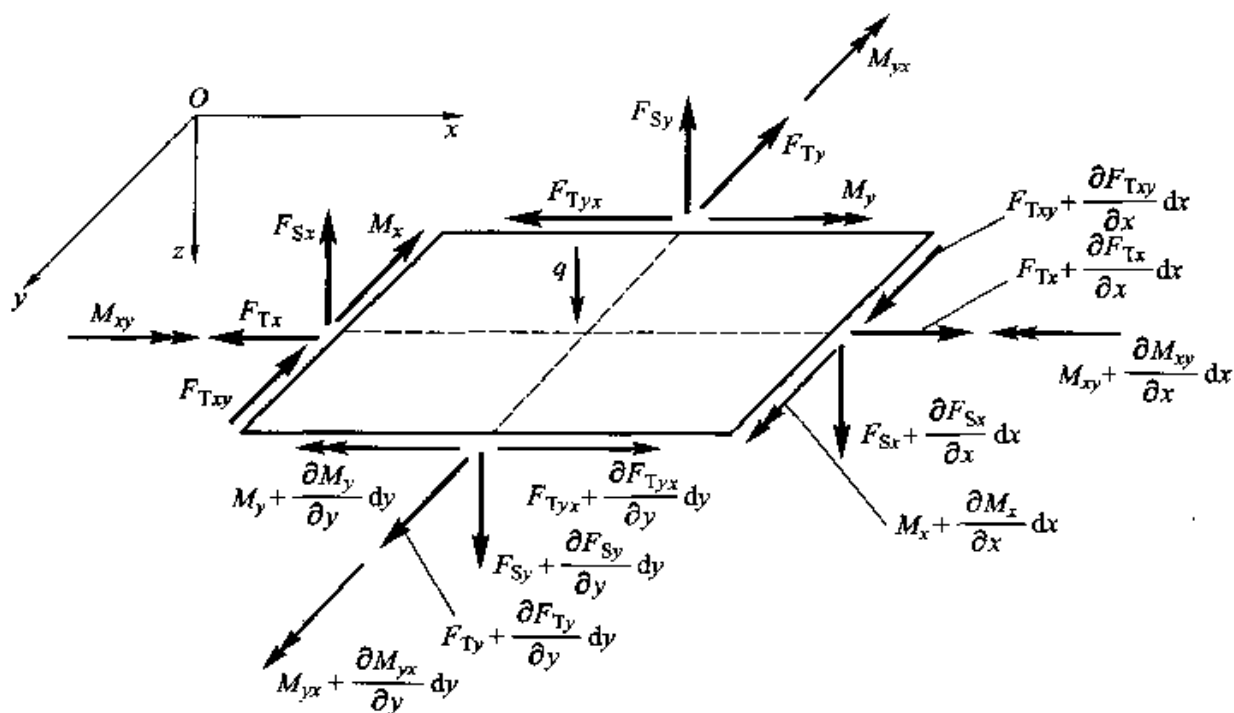


图 16-1

$$\frac{\partial F_{Ty}}{\partial y} + \frac{\partial F_{Txy}}{\partial x} = 0 \quad (16-1)$$

这是也可以由平面问题的平衡微分方程和式(a)直接导出的。

现在, 试将所有各力投影到 z 轴上。横向荷载的投影是

$$q dx dy \quad (c)$$

横向剪力的投影是

$$\begin{aligned} & \left(F_{Sx} + \frac{\partial F_{Sx}}{\partial x} dx \right) dy - F_{Sx} dy + \left(F_{Sy} + \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y} dy \right) dx - F_{Sy} dx \\ & = \left(\frac{\partial F_{Sx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (d)$$

由图 16-2a 可见, 左右两边上拉压力的投影是

$$\begin{aligned} & -F_{Tx} dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(F_{Tx} + \frac{\partial F_{Tx}}{\partial x} dx \right) dy \frac{\partial}{\partial x} \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) \\ & = \left(F_{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{Tx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial F_{Tx}}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dx dy, \end{aligned}$$

在略去三阶微量以后就得到投影

$$\left(F_{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{Tx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy \quad (e)$$

同样, 由前后两边上的拉压力将得到投影

$$\left(F_{Ty} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial F_{Ty}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy \quad (f)$$

又由图 16-2b 可见, 左右两边上平错力的投影是

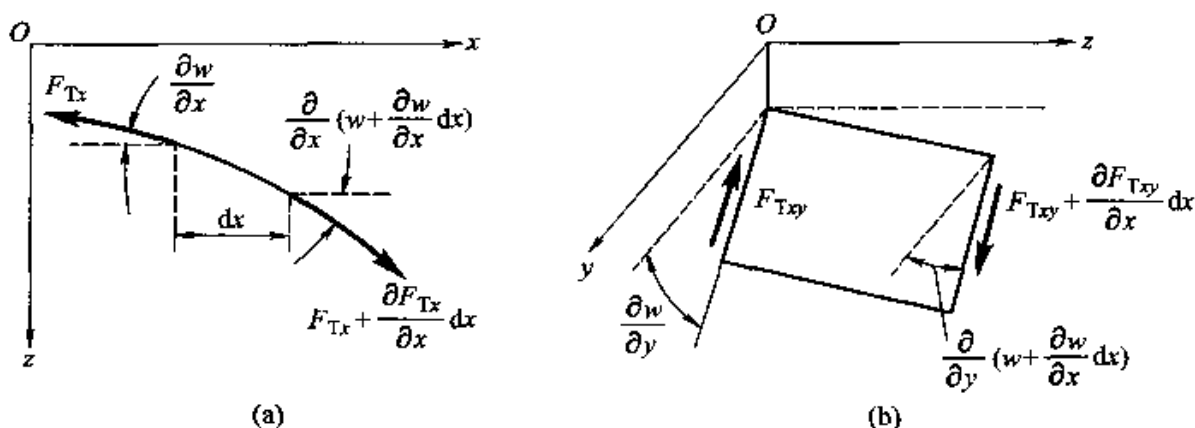


图 16-2

$$\begin{aligned}
 & -F_{Txy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + \left(F_{Txy} + \frac{\partial F_{Txy}}{\partial x} dx \right) dy \frac{\partial}{\partial y} \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) \\
 & = \left(F_{Txy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F_{Txy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial F_{Txy}}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) dx dy,
 \end{aligned}$$

在略去三阶微量以后就得到投影

$$\left(F_{Txy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F_{Txy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy. \quad (g)$$

同样, 由前后两边上的平错力将得到投影

$$\left(F_{Tyx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F_{Tyx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy. \quad (h)$$

将式(c)至式(h)所示的各项投影相加, 命其总和等于零, 然后除以 $dx dy$, 即得

$$\begin{aligned}
 & q + \frac{\partial F_{Sx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y} + F_{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{Tx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 & F_{Ty} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial F_{Ty}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + F_{Txy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\
 & \frac{\partial F_{Txy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + F_{Tyx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F_{Tyx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} = 0,
 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
 & q + \frac{\partial F_{Sx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y} + F_{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_{Ty} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 & (F_{Txy} + F_{Tyx}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F_{Tx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{Tyx}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 & \left(\frac{\partial F_{Ty}}{\partial y} + \frac{\partial F_{Txy}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0.
 \end{aligned}$$

利用式(b)及(16-1)式, 上式可以简化成为

$$q + \frac{\partial F_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{sy}}{\partial y} + F_{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2F_{Txy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + F_{Ty} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (i)$$

再利用由(13-12)中最后二式得来的

$$\frac{\partial F_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{sy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 w = -D \nabla^4 w,$$

式(i)即可再度简化为

$$D \nabla^4 w - \left(F_{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2F_{Txy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + F_{Ty} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q, \quad (16-2)$$

当薄板受有已知横向荷载并在边界上受有已知纵向荷载时, 可以首先按照平面应力问题由已知纵向荷载求出平面应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} , 从而用式(a)求出中面内力 F_{Tx} 、 F_{Ty} 、 F_{Txy} , 然后根据已知的横向荷载 q 和薄板弯曲问题的边界条件, 由微分方程(16-2)求解挠度 w , 从而求出薄板的弯曲内力, 即弯矩、扭矩、横向剪力。在一般情况下, 这种问题的求解是比较繁难的。这里导出微分方程(16-2), 主要的目的是将它应用于薄板的压曲问题, 如以下几节中所述。

§ 16-2 薄板的压曲

当薄板在边界上受有纵向荷载时, 板内将发生一定的中面内力。如果这个中面内力在各个部位、各个方向都不是压力(是拉力, 或等于零), 则薄板的平面平衡状态是稳定的。这就是说, 要使得薄板进入任何弯曲状态, 就必须施以横向的干扰力, 而且, 在这个干扰力被除去以后, 薄板将经过一个振动过程而恢复原来的平面平衡状态。

但是, 如果纵向荷载所引起的中面内力在某些部位、某些方向是压力, 则当纵向荷载超过某一数值(即所谓临界荷载)时, 薄板的平面平衡状态将成为不稳定的。这就是说, 在薄板受到横向干扰力而弯曲以后, 即使干扰力被除去, 薄板也不再恢复原来的平面平衡状态, 它将经过振动过程而进入某一个弯曲的平衡状态。这个弯曲的平衡状态却是稳定的, 也就是说, 如果薄板再度受到横向干扰力而离开这个平衡状态, 则当干扰力被除去以后, 它将经过一个振动过程而恢复这个弯曲的平衡状态。薄板在纵向荷载作用下处于弯曲的平衡状态, 这种现象称为纵弯曲或压曲, 又称为屈曲。

在下面的各节中, 我们将只讨论如何求得薄板的临界荷载, 而不讨论薄板在超临界荷载下的位移和内力。这是因为, 当纵向荷载到达临界值以后, 荷载

的稍许增大将使得位移和内力增大很多，不但有损于薄板的使用性能，而且可能导致薄板的破坏。同时，在这种情况下，由于小挠度弯曲理论不再适用，进行分析也是比较繁难的。

在分析薄板的压曲问题从而求出临界荷载时，我们总是假定纵向荷载的分布规律（即各个荷载之间的比值）是指定的，（但它们的大小是未知的）。这就可以用求解平面问题的任何方法求出平面应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} ，从而求得中面内力 F_{Tx} 、 F_{Ty} 、 F_{Txy} ，用上述未知大小的纵向荷载来表示。然后我们来考察，为了薄板可能发生压曲，上述纵向荷载的最小数值是多大，而这个最小数值就是临界荷载的数值。在进行此项考察时，可以利用前一节中导出的微分方程(16-2)。因为这里只须考虑纵向荷载所引起的内力，并没有任何横向荷载牵涉在内，所以在该微分方程中命 $q=0$ ，得出如下的薄板压曲微分方程：

$$D\nabla^4 w - \left(F_{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2F_{Txy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + F_{Ty} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (16-3)$$

这是挠度 w 的齐次微分方程，其中的系数 F_{Tx} 、 F_{Ty} 、 F_{Txy} 是用已知分布而未知大小的纵向荷载表示的，而所谓“薄板可能发生压曲”，是以这一微分方程具有“满足边界条件的非零解”表示的。于是求临界荷载的问题就成为：为了压曲微分方程(16-3)具有满足边界条件的非零解，纵向荷载的最小数值是多大？这种分析方法称为静力法或平衡法，因为压曲微分方程在本质上是一个静力平衡方程。

§ 16-3 四边简支的矩形薄板在均布压力下的压曲

设有四边简支的矩形薄板，它的两对边受有均布压力，在板边的每单位长度上为 F_x ，图 16-3。由以前对平面问题的分析极易得知，平面应力为

$$\sigma_x = -\frac{F_x}{\delta}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0。$$

于是得中面内力

$$F_{Tx} = -F_x, \quad F_{Ty} = 0, \quad F_{Txy} = 0。$$

代入压曲微分方程(16-3)，得出

$$D\nabla^4 w + F_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0。 \quad (a)$$

和在薄板的小挠度弯曲问题中一样，取挠度的表达式为

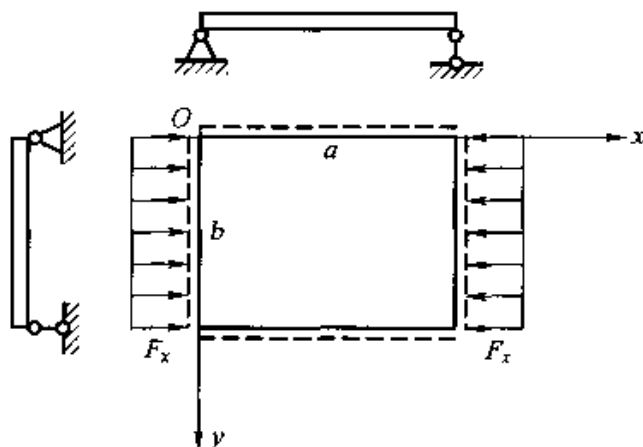


图 16-3

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (b)$$

这是满足所有四边的边界条件的。代入式(a)，除以 π^4 ，得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - F_x \frac{m^2}{\pi^2 a^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (c)$$

由式(c)可见，如果纵向荷载 F_x 很小，则不论 m 及 n 取任何整数值，方括号内的数值总是大于零，因而所有系数 A_{mn} 都必须等于零。这就表示，式(b)所示的挠度等于零，对应于薄板的平面平衡状态。但当 F_x 增大，使某一个方括号内的数值成为零，因而某一系数 A_{mn} 可以不等于零而式(c)仍能满足时，则薄板可能压曲，而它的挠度将是

$$w = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

其中 m 及 n 分别表示薄板压曲以后沿 x 及 y 方向的正弦半波数目。由此可见，纵向荷载 F_x 的临界值一定满足如下的压曲条件：

$$D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - F_x \frac{m^2}{\pi^2 a^2} = 0,$$

即

$$F_x = \frac{\pi^2 a^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{m^2} \quad (16-4)$$

现在来进一步考察，在一切满足这种条件的纵向荷载中间，哪一个数值最小，也就是，哪一个是临界荷载。由(16-4)式可见，当 n 增大时， F_x 增大，所以求临界荷载时，应当取 $n=1$ 。这就表示压曲后的薄板沿 y 方向只有一个正弦半波。于是，在(16-4)式中命 $n=1$ ，得临界荷载

$$(F_x)_c = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{1}{\frac{mb}{a}} \right)^2, \quad (d)$$

或

$$(F_x)_c = k \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (16-5)$$

其中

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{1}{\frac{mb}{a}} \right)^2. \quad (16-6)$$

依次命 $m=1, 2, 3, \dots$, 针对 m 的每一数值, 由(16-6)式算出 a/b 取不同数值时的 k 值, 得出如图 16-4 所示的一组曲线。每根曲线起决定性作用的部分用实线表示(对于一定的 a/b 值, 这部分曲线所给出的 k 值小于其他曲线所给出的 k 值)。邻近两曲线的交点极易求出。例如, 相应于 $m=1$ 及 $m=2$, 我们有

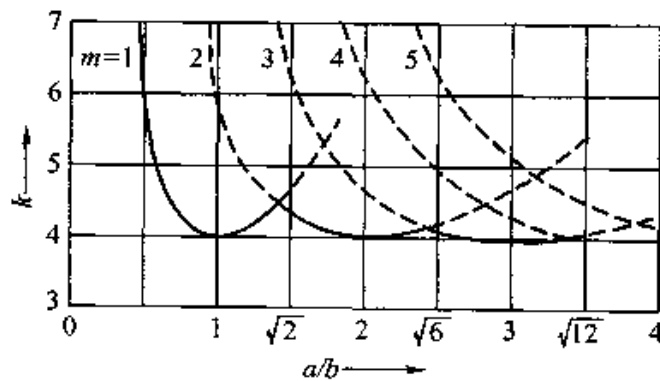


图 16-4

$$\frac{b}{a} + \frac{1}{\frac{b}{a}} = 2 \frac{b}{a} + \frac{1}{2 \frac{b}{a}},$$

由此得出 $a/b = \sqrt{2}$ 。同样, 相应于 $m=2$ 及 $m=3$, 将得出 $a/b = \sqrt{6}$; 相应于 $m=3$ 及 $m=4$, 将得出 $a/b = \sqrt{12}$; 等等。

由图可见, 在 $a/b \leq \sqrt{2}$ 的范围内, 最小临界荷载总是相应于 $m=1$, 并由式 (d) 得其数值为

$$(F_x)_c = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2. \quad (16-7)$$

在 $a/b \geq \sqrt{2}$ 的情况下, 起决定性作用的部分曲线都在 $k=4.0$ 至 $k=4.5$ 的范围内, 也就是说, 临界荷载总是在 $4.0\pi^2 D/b^2$ 和 $4.5\pi^2 D/b^2$ 之间。

现在, 设矩形薄板在双向受有均布压力, 在板边的每单位宽度上分别为 F_x

及 $F_y = \alpha F_x$, 图 16-5。这时的中面内力将为

$$F_{Tx} = -F_x, \quad F_{Ty} = -\alpha F_x, \quad F_{Txy} = 0。$$

代入压曲微分方程(16-3), 得出

$$D\nabla^4 w + F_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0。 \quad (e)$$

仍然取挠度的表达式如式(b)所示, 则与上相似地由式(e)得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{F_x}{\pi^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \alpha \frac{n^2}{b^2} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0,$$

从而得压曲条件

$$F_x = \frac{\pi^2 D \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2}{a^2 \left(m^2 + \alpha n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad (16-8)$$

对于任何已知的比值 a/b 及 $\alpha = F_y/F_x$, 都可以在(16-8)式中命 m 及 n 取不同的整数, 求出不同的 F_x 值, 从而得到最小的 F_x 值, 即临界荷载 $(F_x)_c$ 。当 F_y 为拉力时, α 取负值, 公式(16-8)仍然适用。

§ 16-4 两对边简支的矩形薄板在均布压力下的压曲

设矩形薄板有两对边为简支边, 另两对边为任意边, 在简支边上受均布压力, 图 16-6。压曲微分方程(16-3)依然成为

$$D\nabla^4 w + F_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (a)$$

取挠度的表达式为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (b)$$

其中 Y_m 只是 y 的函数, 可以满足左右两边的边界条件。

将式(b)代入式(a), 通过与前一节中相同的论证, 可得出常系数常微分方程

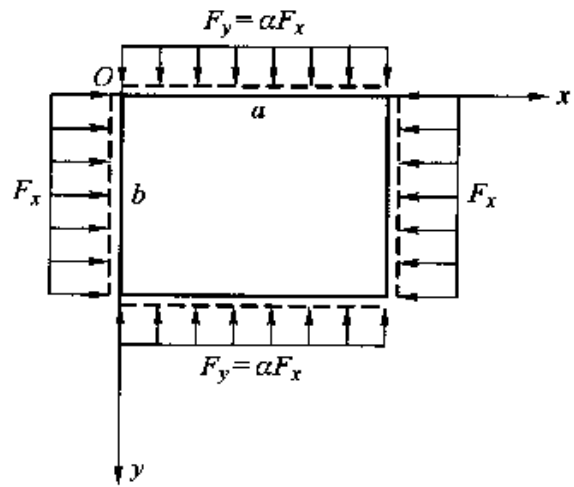


图 16-5

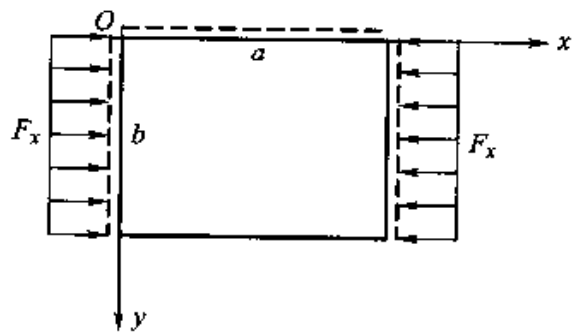


图 16-6

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - \frac{2m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \frac{F_x m^2 \pi^2}{D} \right) Y_m = 0, \quad (c)$$

它的特征方程是

$$r^4 - \frac{2m^2 \pi^2}{a^2} r^2 + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \frac{F_x m^2 \pi^2}{D} \right) = 0,$$

而这个代数方程的四个根是

$$\left. \begin{aligned} & \pm \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\frac{m\pi}{a} + \sqrt{\frac{F_x}{D}} \right)}, \\ & \pm \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\frac{m\pi}{a} - \sqrt{\frac{F_x}{D}} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

在绝大多数的情况下，薄板的压曲状态是相应于

$$\frac{F_x}{D} > \frac{m^2 \pi^2}{a^2}.$$

于是可见，式(d)所示的四个根必然是两实两虚，可以写做

$$\begin{aligned} & \pm \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\sqrt{\frac{F_x}{D}} + \frac{m\pi}{a} \right)}, \\ & \pm i \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\sqrt{\frac{F_x}{D}} - \frac{m\pi}{a} \right)}. \end{aligned}$$

取正实数

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\sqrt{\frac{F_x}{D}} + \frac{m\pi}{a} \right)}, \\ \beta &= \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\sqrt{\frac{F_x}{D}} - \frac{m\pi}{a} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (16-9)$$

则上述四个根成为 $\pm \alpha$ 及 $\pm i\beta$ 。于是 Y_m 的解答可以写成

$$Y_m = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y,$$

而式(b)成为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{m=1}^{\infty} (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (16-10)$$

在很少数的情况下，薄板的压曲状态是相应于

$$\frac{F_x}{D} < \frac{m^2 \pi^2}{a^2},$$

而式(d)所示的四个根都是实根。取正实数

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\frac{m\pi}{a} + \sqrt{\frac{F_x}{D}} \right)}, \\ \beta' &= \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\frac{m\pi}{a} - \sqrt{\frac{F_x}{D}} \right)}, \end{aligned} \right\} \quad (16-11)$$

则式(b)成为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{m=1}^{\infty} (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 \cosh \beta' y + C_4 \sinh \beta' y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (16-12)$$

为了薄板的压曲, 必须(16-10)式或(16-12)式中的某一个 w_m 具有满足边界条件的非零解。利用 $y=0$ 和 $y=b$ 处的四个边界条件, 可以得出 C_1 至 C_4 的一组联立齐次线性方程。如果 C_1 至 C_4 都等于零, 该方程组可以满足。但这时将得出 $w_m=0$, 表示薄板保持平面平衡状态。当薄板被压曲时, C_1 至 C_4 不能都等于零, 因而只可能是该方程组的系数行列式等于零。命这个行列式等于零, 就得到 F_x 的一个方程(总是超越方程)。针对不同的整数 m , 解出 F_x , 取其最小值, 就是该薄板的临界荷载(F_x)。

将这样求得的临界荷载表示成为

$$(F_x)_c = k \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (e)$$

则其中的 k 为量纲一的系数, 它主要是依赖于边长比值 a/b 。当薄板具有自由边时, 系数 k 还将与 μ 有关, 因为自由边的边界条件是与 μ 有关的。下面摘录一些分析成果, 以供读者参考。

例如, 设 $y=0$ 的一边是简支边, 而 $y=b$ 的一边是自由边, 图 16-6, 则算得的临界荷载(F_x), 总是对应于 $m=1$, 表示压曲后的薄板沿 x 方向只有一个正弦半波。当 $\mu=1/4$ 时, 式(e)中的系数 k 的数值如下表所示。

a/b	0.5	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0
k	4.40	1.44	1.14	0.95	0.84	0.76	0.70	0.61	0.56

又例如, 设 $y=0$ 的一边为夹支边, 而 $y=b$ 的一边为自由边, 图 16-7a。当边长比值 a/b 较小时, 临界荷载是相应于 $m=1$; 当边长比值 a/b 较大时, 临界荷载是相应于 $m>1$ 。取 $\mu=1/4$ 时, 相应于临界荷载的 k 值如图 16-7b 中的实线所示。

再例如, 当 $y=0$ 及 $y=b$ 的两边均为夹支边时, 图 16-8, 临界荷载与 μ 无关, 求得的 k 值如下表所示。

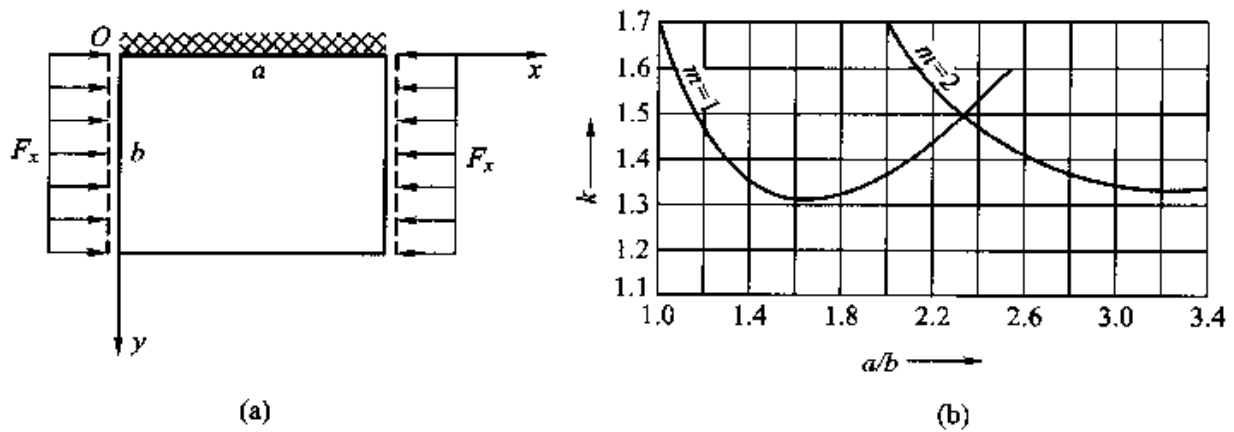


图 16-7

a/b	0.40	0.45	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
k	9.44	8.43	7.69	7.05	7.00	7.29	7.83	7.69

采用上述方法，虽然可以求得临界荷载的精确值，但代数运算和数值计算都是很繁的。因此，在工程实践中，计算矩形薄板的临界荷载时，不论边界条件如何，都宜采用差分法或能量法，分别见 § 16-6 及 § 16-7。

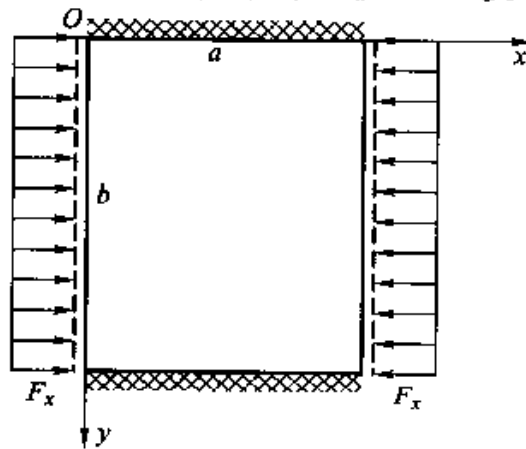


图 16-8

§ 16-5 圆形薄板的压曲

在分析圆形薄板的压曲问题时，须应用极坐标中的压曲微分方程。为此，我们来把直角坐标中的压曲微分方程(16-3)向极坐标中进行变换。

在 § 4-4 中，已经导出了应力分量的变换式(4-7)，即

$$\sigma_x = \sigma_p \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \sin^2 \varphi - 2\tau_{p\varphi} \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi &= \sigma_\rho \sin^2 \varphi + \sigma_\varphi \cos^2 \varphi + 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau_{xy} &= (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{\rho\varphi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).\end{aligned}$$

乘以薄板的厚度 δ ，即得中面内力的变换式如下：

$$\left. \begin{aligned}F_{T_x} &= F_{T_\rho} \cos^2 \varphi + F_{T_\varphi} \sin^2 \varphi - 2F_{T_{\rho\varphi}} \sin \varphi \cos \varphi, \\ F_{T_y} &= F_{T_\rho} \sin^2 \varphi + F_{T_\varphi} \cos^2 \varphi + 2F_{T_{\rho\varphi}} \sin \varphi \cos \varphi, \\ F_{T_{xy}} &= (F_{T_\rho} - F_{T_\varphi}) \sin \varphi \cos \varphi + F_{T_{\rho\varphi}} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),\end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中的

$$F_{T_\rho} = \delta \sigma_\rho, \quad F_{T_\varphi} = \delta \sigma_\varphi, \quad F_{T_{\rho\varphi}} = \delta \tau_{\rho\varphi}, \quad (16-13)$$

是极坐标中的中面内力。此外，在 § 13-8 中已经导出了关于 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 、 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ 、 $\nabla^2 w$ 的变换式。现在，将这些变换式一并代入直角坐标中的压曲微分方程 (16-3)，简化以后，即得极坐标中的压曲微分方程如下：

$$\begin{aligned}D \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 w - \left[F_{T_\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + 2F_{T_{\rho\varphi}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ \left. F_{T_\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0,\end{aligned} \quad (16-14)$$

利用这一微分方程的满足边界条件的非零解，可以求得临界荷载。

作为例题，设有圆形薄板，沿板边受有均布压力，在板边的每单位长度上为 F_ρ ，图 16-9。按照平面应力问题进行分析，可得应力分量

$$\sigma_\rho = \sigma_\varphi = -\frac{F_\rho}{\delta}, \quad \tau_{\rho\varphi} = 0,$$

从而由 (16-13) 式得中面内力

$$F_{T_\rho} = F_{T_\varphi} = -F_\rho, \quad F_{T_{\rho\varphi}} = 0.$$

于是压曲微分方程 (16-14) 成为

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 w + F_\rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0.$$

试为上列偏微分方程取如下形式的解答：

$$w = F(\rho) \cos n\varphi, \quad (b)$$

其中 $n=0, 1, 2, \dots$ 。相应于 $n=0$ ，薄板的压曲形式是轴对称的。相应于 $n=1$ 及 $n=2$ ，薄板的环向围线将分别具有一个及两个波，余类推。将式 (b) 代入上列偏微分方程，得到 $F(\rho)$ 的四阶常微分方程，整理如下：

$$\frac{d^4 F}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 F}{d\rho^3} - \left(\frac{1+2n^2}{\rho^2} - \frac{F_\rho}{D} \right) \frac{d^2 F}{d\rho^2} +$$

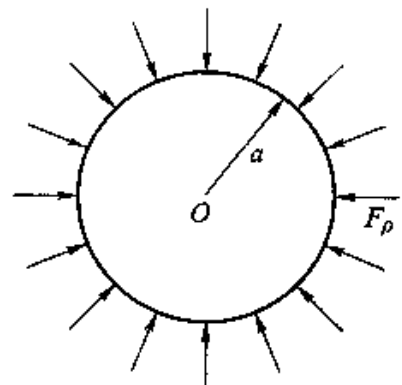


图 16-9

$$\left(\frac{1+2n^2}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{F_\rho}{D} \right) \frac{dF}{d\rho} - \left(\frac{4n^2-n^4}{\rho^4} + \frac{n^2}{\rho^2} \frac{F_\rho}{D} \right) F = 0,$$

引用量纲一的变量 $x = \alpha\rho$, 其中 $\alpha = \sqrt{F_\rho/D}$, 则上列常微分方程变换成为

$$\begin{aligned} x^4 \frac{d^4 F}{dx^4} + 2x^3 \frac{d^3 F}{dx^3} - x^2(1+2n^2-x^2) \frac{d^2 F}{dx^2} + \\ x(1+2n^2+x^2) \frac{dF}{dx} - (4n^2-n^4+n^2x^2) F = 0, \end{aligned} \quad (c)$$

它可以改写为

$$\begin{aligned} x^4 \frac{d^4 F}{dx^4} + 2x^3 \frac{d^3 F}{dx^3} - (1+2n^2)x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + \\ (1+2n^2)x \frac{dF}{dx} - n^2(4-n^2)F + \\ x^2 \left(x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + x \frac{dF}{dx} - n^2 F \right) = 0, \end{aligned} \quad (d)$$

还可以再改写为

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} - 3x \frac{d}{dx} + (4-n^2) \right] \left[x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + x \frac{dF}{dx} + (x^2-n^2)F \right] = 0. \quad (e)$$

我们知道, 贝塞尔微分方程

$$x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + x \frac{dF}{dx} + (x^2-n^2)F = 0 \quad (f)$$

的解答是

$$F(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x), \quad (g)$$

其中 $J_n(x)$ 及 $N_n(x)$ 分别为实宗量的、 n 阶的第一种及第二种贝塞尔函数。由式(f)及式(e)可见, 式(g)也是式(e)的解答, 因而也是式(c)的解答。

但是, 式(d)又指示出另一种可能的解答:

$$F(x) \approx x^m. \quad (h)$$

代入式(d)以后, 得

$$[m^4 - 4m^3 + (4-2n^2)m^2 + 4n^2m - n^2(4-n^2)]x^m + (m^2-n^2)x^{m+2} = 0.$$

要满足这一方程, 必须有

$$\left. \begin{aligned} m^2 - n^2 &= 0, \\ m^4 - 4m^3 + (4-2n^2)m^2 + 4n^2m - n^2(4-n^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

取 $m = \pm n$, 则(i)中的两式都能满足。于是由式(g)及式(h)得到

$$F(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x) + C_3 x^n + C_4 x^{-n}, \quad (j)$$

从而由式(b)得出

$$w = [C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x) + C_3 x^n + C_4 x^{-n}] \cos n\varphi. \quad (16-15)$$

在薄板的中心($x = \alpha\rho = 0$), w 不能为无限大, 但 $N_n(x)$ 及 x^{-n} 在 x 趋于零时将

趋于无限大，所以必须取 $C_2 = C_4 = 0$ 。于是(16-15)式简化为

$$w = [C_1 J_n(x) + C_3 x^n] \cos n\varphi. \quad (k)$$

利用板边的两个边界条件，可以得出 C_1 及 C_3 的一组两个齐次线性方程。命该方程组的系数行列式等于零，就得到计算临界荷载的方程。

当圆形薄板在中心有圆孔，并在板边及孔边受到不同大小的均布压力时，也可以先由拉梅解答求出中面内力，然后应用压曲微分方程(16-14)，利用贝塞尔函数求解，从而求得临界荷载。

§ 16-6 用差分法求临界荷载

只有在前几节中提到的那几种简单情况下，才可能求得压曲微分方程的函数形式的非零解，从而求得薄板临界荷载的精确值。在其他的情况下，可以用差分法处理压曲微分方程，从而求得临界荷载的近似值。只要采用适当密的网格，总可以使得临界荷载的精确度满足工程上的需要。

按照压曲微分方程(16-3)，在任一典型结点 O ，图 16-10，我们有

$$D (\nabla^4 w)_0 - \left[(F_{Tx})_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 + 2(F_{Txy})_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0 + (F_{Ty})_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 \right] = 0.$$

利用 § 14-1 中的差分公式，可得上列方程的差分形式

$$\begin{aligned} 20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + \\ (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) - \frac{h^2}{D} \left[(F_{Tx})_0 (w_1 + w_3 - 2w_0) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} (F_{Txy})_0 (w_6 + w_8 - w_5 - w_7) + \right. \\ \left. (F_{Ty})_0 (w_2 + w_4 - 2w_0) \right] = 0. \end{aligned} \quad (16-16)$$

在应用边界条件以后，这些方程中的未知 w 值的数目将和方程的数目相同。注意这些方程中并没有自由项，可见它们是一组齐次线性方程。为了这一组方程具有非零解（相应于某种压曲状态），方程组的系数行列式必须等于零。因为系数中的 $(F_{Tx})_0$ 、 $(F_{Ty})_0$ 、 $(F_{Txy})_0$ 全都是用纵向荷载表示的，所以，命系数行列式等于零，就得出一个代数方程，可以用来求得相应于某

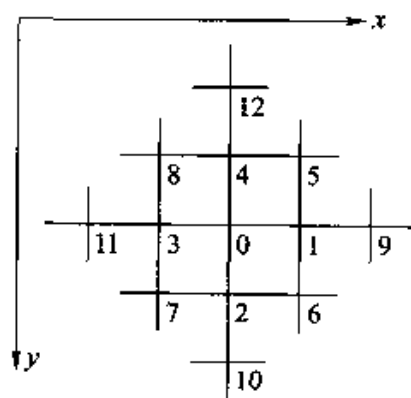


图 16-10

种压曲状态的纵向荷载。将各种压曲状态下的纵向荷载加以比较,就得出薄板的临界荷载。

作为例题,设有四边简支的矩形薄板,在两个对边上受有按三角形分布的压力,用 4×3 的网格求解,图 16-11。由平面应力问题的解答,极易得出各结点处的中面内力为

$$(F_{Tx})_a = -\frac{F}{4}, \quad (F_{Tx})_b = -\frac{F}{2}, \quad (F_{Tx})_c = -\frac{3F}{4}, \quad F_{Ty} = F_{Txy} = 0。$$

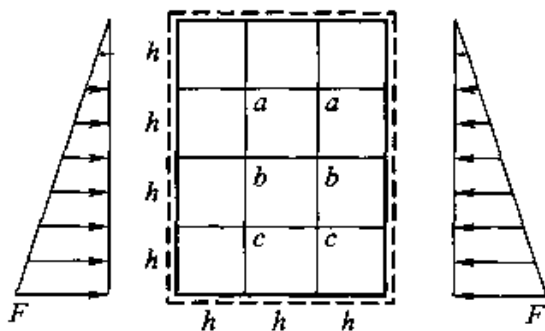


图 16-11

假定临界荷载所对应的压曲状态是对称形式的。于是这里只有三个独立的结点挠度,取 w_a 、 w_b 及 w_c 。为结点 a 、 b 、 c 写出(16-16)型的差分方程,并应用边界条件,得

$$\begin{aligned} 20w_a - 8(w_a + w_b) + 2w_b + (w_c - 2w_a) - \frac{h^2}{D} \left[\left(-\frac{F}{4} \right) (w_a - 2w_a) \right] &= 0, \\ 20w_b - 8(w_a + w_b + w_c) + 2(w_a + w_c) - w_b - \frac{h^2}{D} \left[\left(-\frac{F}{2} \right) (w_b - 2w_b) \right] &= 0, \\ 20w_c - 8(w_b + w_c) + 2w_b + (w_a - 2w_c) - \frac{h^2}{D} \left[\left(-\frac{3F}{4} \right) (w_c - 2w_c) \right] &= 0. \end{aligned}$$

简化以后,得

$$\begin{aligned} (10 - \lambda)w_a - 6w_b + w_c &= 0, \\ -6w_a + (11 - 2\lambda)w_b - 6w_c &= 0, \\ w_a - 6w_b + (10 + 3\lambda)w_c &= 0, \end{aligned}$$

其中

$$\lambda = \frac{Fh^2}{4D}。 \quad (\text{a})$$

命上列方程组的系数行列式等于零,得到 λ 的三次方程

$$6\lambda^3 - 113\lambda^2 + 494\lambda - 441 = 0。$$

这个方程的最小正实根是 $\lambda = 1.202$ 。于是由式(a)得临界荷载

$$F = F_c = \frac{4D\lambda}{h^2} = 4.81 \frac{D}{h^2},$$

比精确值 $5.2D/h^2$ 小了约 8%。

如果不考虑问题的对称性,仍然采用 4×3 的网格,则将有 6 个独立的未知 w 值,得出 λ 的 6 次方程。这个方程的最小正实根仍然是 $\lambda = 1.202$,因而得出与上相同的临界荷载。

不论纵向荷载的分布如何,总可以用薄板平面问题的差分解求得各结点处

的平面应力，从而求得各结点处的中面内力，用纵向荷载的未知大小来表示。然后，不论边界条件如何，总可以为各结点建立(16-16)型的差分方程，并利用边界条件，使差分方程的数目等于未知值的数目。命差分方程组的系数行列式等于零，即可求得临界荷载。

§ 16-7 用能量法求临界荷载

当薄板在一定分布方式的纵向荷载作用下处于平面平衡状态时，为了判断这个状态是否稳定，只须辨别：如果薄板受有横向干扰力而进入邻近的某一弯曲状态，在干扰力除去以后，它是否恢复原来的平面状态。为此，又只须辨别：当薄板从该平面状态进入弯曲状态时，势能是增加还是减少。如果势能增加，就表示该平面状态下的势能为极小，对应于稳定平衡；如果势能减少，就表示该平面状态下的势能为极大，对应于不稳定平衡；如果势能保持不变，就表示该平面状态下的平衡是稳定平衡的极限，而相应于这一极限状态的纵向荷载就是临界荷载。势能之所以保持不变，是因为荷载势能的减少恰等于形变势能的增加，而荷载势能的减少又等于荷载所做的功。因此，从能量观点看来，临界荷载可以由这样的条件求得：薄板从平面状态进入邻近的弯曲状态时，纵向荷载所做的功 W 等于形变势能的增加。

当薄板从平面状态进入弯曲状态时，和它受横向荷载作用而弯曲时一样，挠度 w 是从零开始的，所以形变势能的增加也就是薄板的全部弯曲形变势能 V_e 。于是我们有功能方程

$$W = V_e, \quad \text{即 } V_e - W = 0, \quad (16-17)$$

而其中的 V_e 如公式(14-22)或(14-23)所示。

纵向荷载所做的功 W ，可以按照该荷载引起的中面内力所做的功来计算。设该荷载在薄板的某一微分块处引起的中面内力为

F_{Tx} 、 F_{Ty} 、 F_{Txy} ，图16-12。左右两边的内力 $F_{Tx}dy$ 原来相距 dx 。在薄板弯曲以后，这个距离成为

$$\left[dx^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \right]^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} dx$$

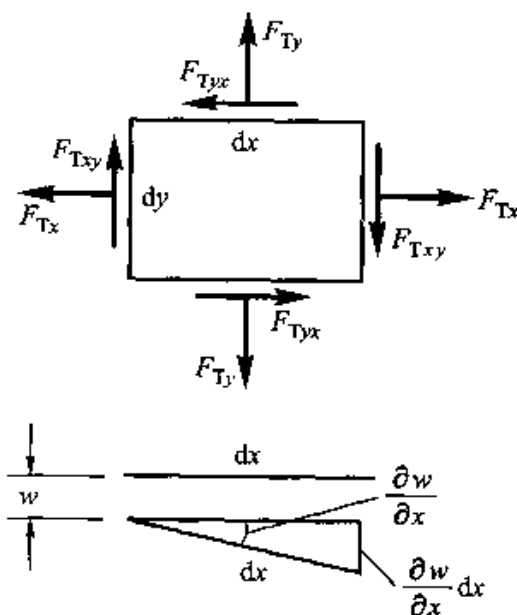


图 16-12

$$\begin{aligned} &\approx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ &= dx - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

缩短了 $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$ 。于是可见，内力 $F_{\tau_x} dy$ 所做的功是

$$dW_1 = F_{\tau_x} dy \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] = -\frac{1}{2} F_{\tau_x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (a)$$

同样，该微分块上下两边的内力 $F_{\tau_y} dx$ 所做的功是

$$dW_2 = -\frac{1}{2} F_{\tau_y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy. \quad (b)$$

读者试证。对于平错力 $F_{\tau_{xy}} = F_{\tau_{yx}}$ ，算出 45° 方向的拉压力和伸缩，然后利用式(a)及式(b)，可以得出它们所做的功为

$$dW_3 = -F_{\tau_{xy}} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (16-18)$$

将以上三部分的功叠加，得出该微分块上全部中面内力所做的功

$$dW = -\frac{1}{2} \left[F_{\tau_x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + F_{\tau_y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2F_{\tau_{xy}} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy.$$

于是得出整个薄板内的中面内力所做的功，也就是纵向荷载在压曲过程中所做的功：

$$W = -\frac{1}{2} \iint \left[F_{\tau_x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + F_{\tau_y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2F_{\tau_{xy}} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \quad (16-19)$$

具体计算临界荷载时，可先求出用纵向荷载表示中面内力的表达式，并设定薄板压曲以后的、满足位移边界条件的挠度表达式，然后按照这些表达式，用公式(14-22)或(14-23)求出 V_c ，并用公式(16-19)求出 W 。最后命 $V_c = W$ ，即得出用纵向荷载表示的压曲条件，从而求得薄板的临界荷载。

为了使得设定的挠度较好地符合临界荷载下的挠度，从而求得较精确的临界荷载，可以设定挠度的表达式为

$$w = \sum_m C_m w_m, \quad (16-20)$$

其中的 w_m 是满足位移边界条件的函数， C_m 是互不依赖的待定系数。选择 C_m 时，可以应用最小势能原理。以薄板在平面状态下的形变势能及荷载势能均为零，则薄板在压曲状态下的形变势能为 V_c ，荷载势能为 $V = -W$ ，而总势能为 $V_c + V$ ，也就是 $V_c - W$ 。于是由最小势能原理得到

$$\frac{\partial}{\partial C_m} (V_c - W) = 0. \quad (16-21)$$

这将给出 C_m 的 m 个齐次线性方程。为了 w 具有非零解，就必须 C_m 具有非零解，因而这个齐次线性方程组的系数行列式必须等于零。这样就得出求解临界荷载的方程。

对于用肋条加强了薄板，即所谓加肋板，仍然可以用能量法求得临界荷载。计算的步骤同上，但须按照肋条的弯曲刚度和设定的挠度，求出各个肋条的形变势能，归入 V_s 的表达式。如果肋条还直接受有纵向荷载，就还须按照设定的挠度，求出这纵向荷载在薄板压曲过程中所做的功，归入 W 的表达式。然后进行计算。

§ 16-8 用能量法求临界荷载举例

作为第一个例题，试考虑图 16-3 所示的简支矩形薄板。中面内力仍然是

$$F_{Tx} = -F_x, \quad F_{Ty} = 0, \quad F_{Txy} = 0. \quad (a)$$

仍然取压曲以后的挠度表达式为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

将式(b)代入(14-23)式，对 x 积分从 0 到 a ，对 y 积分从 0 到 b ，最后得到

$$V_s = \frac{\pi^4 abD}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (c)$$

将式(a)及式(b)代入(16-19)式，得到

$$\begin{aligned} W &= \frac{F_x}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \\ &= \frac{F_x}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dx dy \\ &= \frac{\pi^2 b}{8a} F_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 m^2. \end{aligned} \quad (d)$$

方程(16-21)在这里成为

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} (V_s - W) = 0.$$

将式(c)及式(d)代入，得出

$$\frac{\pi^4 abD}{8} 2A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 b}{8a} F_x 2A_{mn} m^2 = 0.$$

命这一方程的系数行列式(即方程的唯一系数)等于零，即得

$$F_x = \frac{\pi^2 a^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{m^2}$$

与 § 16-3 中的解答(16-4)相同。

作为第二个例题, 设有四边简支的矩形薄板, 在两个对边的中点受有大小相等而方向相反的两个集中力 F , 图 16-13。首先, 在挠度表达式中只取一项:

$$w = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (e)$$

代入(14-23)式, 得

$$V_e = \frac{\pi^4 abD}{8} A_{11}^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2$$

在这里, 平面应力, 因而中面内力, 只能用无穷级数来表示, 公式(16-19)难以应用。但是, 直接计算纵向荷载在薄板压曲时所做的功, 却很简单: 这个功就等于力 F 乘以距离 AB 的缩短, 即

$$\begin{aligned} W &= F \int_0^b \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=a/2}^2 dy \\ &= \frac{F}{2} \int_0^b \frac{\pi^2}{b^2} \left(A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right)_{x=a/2}^2 dy \\ &= \frac{\pi^2 F}{2b^2} A_{11}^2 \int_0^b \cos^2 \frac{\pi y}{b} dy = \frac{\pi^2 F}{4b} A_{11}^2 \end{aligned}$$

于是由 $\frac{\partial}{\partial A_{11}} (V_e - W) = 0$ 得到

$$\frac{\pi^4 abD}{8} 2A_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 F}{4b} 2A_{11} = 0$$

命这一方程中 A_{11} 的系数等于零, 即得

$$F = F_c = \frac{\pi^2 D}{2a} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 \quad (f)$$

现在, 在挠度表达式中取两项:

$$w = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (g)$$

由公式(14-23)得

$$V_e = \frac{\pi^4 abD}{8} \left[A_{11}^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + A_{31}^2 \left(\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \right]$$

力 F 所做的功是

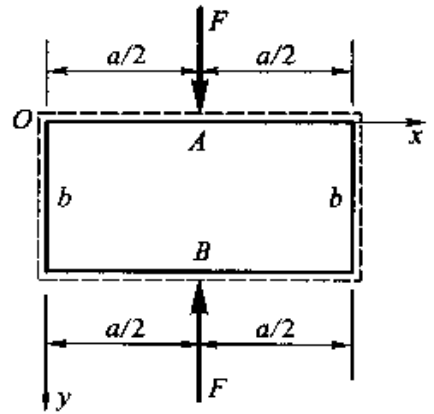


图 16-13

$$\begin{aligned}
 W &= F \int_0^b \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=u/2}^2 dy \\
 &= \frac{\pi^2 F}{4b} (A_{11} - A_{31})^2。
 \end{aligned}$$

于是由 $\frac{\partial}{\partial A_{11}}(V_e - W) = 0$ 及 $\frac{\partial}{\partial A_{31}}(V_e - W) = 0$ 得

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^4 abD}{8} 2A_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 F}{4b} 2(A_{11} - A_{31}) &= 0, \\
 \frac{\pi^4 abD}{8} 2A_{31} \left(\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{\pi^2 F}{4b} 2(A_{11} - A_{31}) &= 0。
 \end{aligned}$$

简化以后得

$$\begin{aligned}
 \left[F - \frac{\pi^2 D}{2a} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 \right] A_{11} - FA_{31} &= 0, \\
 -FA_{11} + \left[F - \frac{\pi^2 D}{2a} \left(\frac{9b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 \right] A_{31} &= 0。
 \end{aligned}$$

命上列方程组的系数行列式等于零，得到

$$\begin{vmatrix}
 F - \frac{\pi^2 D}{2a} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 & -F \\
 -F & F - \frac{\pi^2 D}{2a} \left(\frac{9b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2
 \end{vmatrix} = 0,$$

从而得出解答

$$F = F_c = \frac{\pi^2 D}{2a} \frac{\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 \left(\frac{9b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2}{\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 + \left(\frac{9b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2} \quad (h)$$

当 $a/b = 1$ 时，由式(f)求得 $F_c = 2\pi^2 D/a$ ，由式(h)求得 $F_c = 1.92\pi^2 D/a$ 。如果在挠度表达式中取三项或更多的项，都得出 $F_c = 1.91\pi^2 D/a$ 。

由这一例题可见，当薄板在两对边上受有任意多个成对的、大小相等而方向相反的纵向荷载时，都不难用能量法求得临界荷载。同样，如果薄板在两对边上受有分布的纵向荷载，只要两对边上的荷载分布方式相同、大小相等而方向相反，也不难求得临界荷载。

作为第三个例题，设有三边简支、一边自由的矩形薄板，在两简支对边上受均布荷载 F_x ，图 16-14，试用能量法求临界荷载。

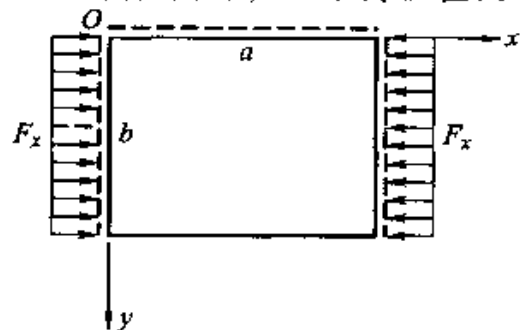


图 16-14

取压曲以后的挠度表达式为

$$w = A y \sin \frac{\pi x}{a},$$

可以满足位移边界条件(未能满足全部内力边界条件)。由此得 w 的一阶及二阶导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= A \frac{\pi}{a} y \cos \frac{\pi x}{a}, & \frac{\partial w}{\partial y} &= A \sin \frac{\pi x}{a}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -A \frac{\pi^2}{a^2} y \sin \frac{\pi x}{a}, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= A \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

代入公式(14-22), 得到

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[A^2 \frac{\pi^4}{a^4} y^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} + 2(1-\mu) A^2 \frac{\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right] dx dy \\ &= \frac{DA^2 \pi^4 b}{12a} \left[\frac{b^2}{a^2} + \frac{6(1-\mu)}{\pi^2} \right]_c \end{aligned}$$

另一方面, 将式(a)及式(i)代入公式(16-19), 得到

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (-F_x) \left(A \frac{\pi}{a} y \cos \frac{\pi x}{a} \right)^2 dx dy = \frac{F_x A^2 \pi^2 b^3}{12a}_c$$

命 $W = V_c$, 即得

$$F_x = (F_x)_c = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[\frac{b^2}{a^2} + \frac{6(1-\mu)}{\pi^2} \right]_c \quad (j)$$

当 $\mu = 1/4$ 时, 式(j)成为

$$(F_x)_c = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{4.5}{\pi^2} \right) = \left(0.46 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\pi^2 D}{b^2}_c$$

仍然采用表达式

$$(F_x)_c = k \frac{\pi^2 D}{b^2},$$

则

$$k = 0.46 + \frac{b^2}{a^2}_c$$

算出的 k 值如下表所示, 与 §16-4 中给出的 k 值很接近。

a/b	0.5	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0
k	4.46	1.46	1.15	0.97	0.85	0.77	0.71	0.62	0.57

习 题

16-1 四边简支的正方形薄板，在两对边上受大小相等而方向相反的均布纵向压力，图 16-15a。为了增强薄板的稳定性，也就是提高它的临界荷载，在薄板的中线上布置一根支承梁，垂直于荷载方向，如图 16-15b，或平行于荷载方向，如图 16-15c。问临界荷载分别可提高多少？

答案：分别提高到 1.56 倍及 4.00 倍。

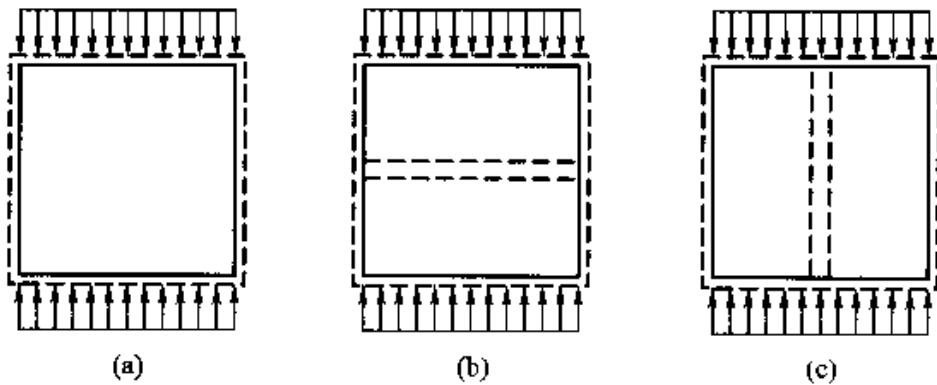


图 16-15

16-2 在图 16-5 所示的薄板中，设 $b = a$ ，试求 $\alpha = 1$ 及 $\alpha = \pm 1/2$ 时的临界荷载。

答案： $\alpha = 1$ 时， $(F_x)_c = 2\pi^2 \frac{D}{a^2}$ ；

$\alpha = 1/2$ 时， $(F_x)_c = \frac{8}{3}\pi^2 \frac{D}{a^2}$ ；

$\alpha = -1/2$ 时， $(F_x)_c = \frac{50\pi^2}{7} \frac{D}{a^2}$ 。

16-3 圆形薄板，半径为 a ，边界夹支，沿板边受均布压力 F_p ，试利用贝塞尔函数求出临界荷载。

答案： $(F_p)_c = 14.7 \frac{D}{a^2}$ 。

16-4 正方形薄板，边长为 a ，四边简支，双向受同样大小的均布压力 F 试分别以 3×3 及 4×4 的网格用差分法求临界荷载。

答案：用 3×3 的网格时， $F_c = 18.0 \frac{D}{a^2}$ ；用 4×4 的网格时， $F_c = 18.7 \frac{D}{a^2}$ 。

16-5 矩形薄板，两对边简支，两对边夹支，在简支边上受均布压力 F_x ，图 16-8。试取压曲以后的挠度表达式为

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right),$$

用能量法求临界荷载，并将计算结果与 § 16-4 中例题的成果进行对比。

答案： $(F_x)_c = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + \frac{16}{3} \left(\frac{a}{mb} \right)^2 + \frac{8}{3} \right]$ ，命 $(F_x)_c = k \frac{\pi^2 D}{b^2}$ ，

则其中的 k 值如下表所示。

a/b	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
k	9.77	8.00	7.37	7.32	7.64	8.22	8.00

16-6 四边简支的矩形薄板，受四个集中荷载如图 16-16 所示，试取压曲以后的挠度表达式为

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

用能量法求临界荷载。

答案： $F_c = \frac{\pi^2}{3a} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 D。$

16-7 试证明：设圆板发生轴对称的压曲，则纵向荷载在压曲过程中所做的功为

$$W = -\pi \int F_{\tau\rho} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho。$$

16-8 圆形薄板，半径为 a ，边界夹支，沿板边受均布压力 F_p ，试取压曲以后的挠度表达式为

$$w = C \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2,$$

利用习题 16-7 中的公式，用能量法求出临界荷载，并与习题 16-3 中的结果进行对比。

答案： $(F_p)_c = 16.0 \frac{D}{a^2}。$

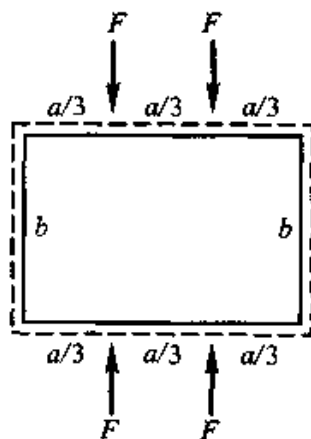


图 16-16

参 考 教 材

- [1] 铁木辛柯，盖莱著. 弹性稳定理论[M]. 2版. 张福范译. 北京：科学出版社，1965：第九章.

第十七章 各向异性板

§ 17-1 各向异性体的物理方程

一个弹性体，如果它在所有各个方向的弹性都相同，就称为各向同性体；如果它在所有各个方向的弹性并不完全相同，就称为各向异性体；如果它在任何两个方向的弹性都不相同，就称为极端各向异性体。

在极端各向异性体中，不论坐标轴放在什么方向，每一个应力分量一般都将引起全部 6 个形变分量。因此，按照广义胡克定律，即，形变分量和引起该形变分量的应力分量成正比，物理方程将取如下的普遍形式：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{zx} + a_{26}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{zx} + a_{36}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{zx} + a_{46}\tau_{xy}, \\ \gamma_{zx} &= a_{51}\sigma_x + a_{52}\sigma_y + a_{53}\sigma_z + a_{54}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{zx} + a_{56}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{zx} + a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (17-1)$$

式中的系数 a_{ij} 是弹性常数，它们表示单位应力分量引起的形变分量。例如，系数 a_{12} 表示单位 σ_y 引起的 ε_x ，等等。在这里，我们仍然假定弹性体是均匀的，并且是完全弹性的，所以各个弹性常数都不随位置坐标而变，并且也不随应力的大小而变。但是，一般说来，它们都将随坐标轴方向的改变而改变。

从(17-1)式看来，好像这里有 36 个弹性常数。但是，通过能量分析，或者通过实验量测，都可以证明这些弹性常数之间具有互等关系 $a_{ij} = a_{ji}$ 。于是物理方程(17-1)可以改写如下：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{zx} + a_{26}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{zx} + a_{36}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= a_{14}\sigma_x + a_{24}\sigma_y + a_{34}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{zx} + a_{46}\tau_{xy}, \\ \gamma_{zx} &= a_{15}\sigma_x + a_{25}\sigma_y + a_{35}\sigma_z + a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{zx} + a_{56}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{46}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{zx} + a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (17-2)$$

可见,即使是极端各向异性体,也只有 21 个独立的弹性常数。

如果弹性体在对称于某一平面的两个方向具有相同的弹性,则该平面称为弹性体的一个弹性对称面,而垂直于弹性对称面的方向称为它的一个弹性主向。这时,以弹性对称面为 xy 面, z 轴沿弹性主向,则由对称性可见,应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 都不会引起形变分量 γ_{yz} 和 γ_{zx} ,因为上述四个应力分量是对称于 xy 面的,而上述两个形变分量是反对称于 xy 面的。于是我们有 $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{46} = 0$, $a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{56} = 0$,而物理方程 (17-2) 简化为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{zx}, \\ \gamma_{zx} &= a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (17-3)$$

现在,独立的弹性常数只有 13 个。当然,在均匀体中,平行于弹性对称面的任一平面,也是一个弹性对称面;平行于弹性主向的任一方向也是一个弹性主向。

如果弹性体具有互相正交的三个弹性对称面,也就是具有互相正交的三个弹性主向,则该弹性体称为正交各向异性体。这时,以该三个弹性对称面为坐标面,也就是以该三个弹性主向为坐标方向,则根据与上相似的论证,可见物理方程 (17-2) 进一步简化为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, & \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z, & \gamma_{zx} &= a_{55}\tau_{zx}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z, & \gamma_{xy} &= a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (17-4)$$

现在,独立的弹性常数只有 9 个,线应变只与正应力有关,切应变只与相应的切应力有关。

形式上与各向同性弹性体的物理方程相同,但弹性常数的未知量个数增多了

§ 17-2 各向异性板的平面应力问题

设有很薄的等厚度薄板,只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力,同时,体力也平行于板面,并且不沿厚度变化。假定薄板的中面(以及和它平行的任一平面)是弹性对称面,并且就以中面为 xy 面。和 § 2-1 中同样地进行论证,仍然可见在整个薄板中都有

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0, \quad (a)$$

而且应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 仍然只是 x 和 y 的函数，不随 z 变化。可见这样的问题仍然是平面应力问题。

平衡微分方程仍然是

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0. \quad (b)$$

如果体力分量 f_x 和 f_y 都是常量，则应力分量

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (c)$$

仍然满足平衡微分方程 (b)，其中 $\Phi = \Phi(x, y)$ 是艾里应力函数。

几何方程仍然是

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (d)$$

在消去位移分量以后，仍然得到相容方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (e)$$

将式 (a) 代入 (17-3) 中的第一式、第二式及第六式，得到各向异性板的物理方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{16} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{26} \tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{16} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{66} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (17-5)$$

将 (17-5) 式代入式 (e)，然后再将式 (c) 代入，即得用应力函数 Φ 表示的相容方程

$$a_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (17-6)$$

由相容方程 (17-6) 可见，把应力函数 Φ 取为 x 和 y 的不超过三次幂的多项式，总可以满足这个相容方程；又因为应力边界条件与弹性常数无关，所以对应力边界问题说来，各向异性板中的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 都和各向同性板中完全一样。

例如，如果不计体力，取 $\Phi = qy^2/2$ ，就得到薄板在 x 方向受均匀拉压力 q 时的应力分量

$$\sigma_x = q, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0; \quad (17-7)$$

取 $\Phi = qx^2/2$ ，就得到薄板在 y 方向受均匀拉压力 q 时的应力分量

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = q, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0;$$

取 $\Phi = -qxy$ ，就得到薄板在 x 和 y 方向受均匀剪力 q 时的应力分量

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = q;$$

取 $\Phi = My^3/6I$, 就得到纯弯曲情况下的应力分量

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0。$$

注意：虽然应力分量和各向同性板中完全相同，但形变及位移却和各向同性板中并不完全相同。

如果应力函数 Φ 中包含了四次幂或四次幂以上的项，则由于相容方程 (17-6) 中包含着弹性常数，所以应力分量一般将与弹性常数有关，当然也就和各向同性板中并不相同。

§ 17-3 各向异性板的小挠度弯曲问题

实验结果指出：尽管薄板是各向异性的，只要它的中面（以及与中面平行的各平面）是弹性对称面，而且挠度远小于厚度，则 § 13-1 中所述薄板小挠度弯曲理论中的假定，都仍然是可用的。因此，可以和 § 13-1 中完全一样地导出下列几何方程：

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (17-8)$$

但是，物理方程却将和各向同性板中不同，需要重新进行推导。在物理方程 (17-3) 的第一式、第二式及第六式中，按照假定命 $\sigma_x = 0$ ，得到各向异性板的简化后的物理方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

和平面应力问题中的物理方程 (17-5) 相同。求解应力分量，然后利用几何方程 (17-8)，可将应力分量用挠度 w 表示如下：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -z \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ \sigma_y &= -z \left(B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ \tau_{xy} &= -z \left(B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (17-9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \frac{a_{22}a_{66} - a_{26}^2}{\Delta}, & B_{22} &= \frac{a_{11}a_{66} - a_{16}^2}{\Delta}, \\ B_{66} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta}, & B_{12} &= \frac{a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}}{\Delta}, \\ B_{16} &= \frac{a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}}{\Delta}, & B_{26} &= \frac{a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (17-10)$$

而

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix} \circ$$

现在，利用(17-9)式，可将弯矩及扭矩用挠度 w 表示成为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x z dz = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ M_y &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_y z dz = - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{xy} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{xy} z dz = - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (17-11)$$

其中的常数

$$D_{ij} = B_{ij} \frac{\delta^3}{12} \quad (17-12)$$

统称为各向异性板的弯扭刚度。

薄板的平衡方程与弹性常数无关，因此，以前针对各向同性板而导出的平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (17-13)$$

也适用于各向异性板。将(17-11)式代入，即得各向异性板在横向荷载作用下的弹性曲面微分方程

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (17-14)$$

可以用来在边界条件下求解薄板的挠度 w ，从而用(17-11)式求得弯矩和扭矩，并用(17-9)式求得弯应力及扭应力。通过方程(17-11)及(13-15)，不难把横向剪力也用 w 来表示。

对于正交各向异性板，将 x 轴及 y 轴也放在弹性主向(三个坐标面都成为弹性对称面)，则物理方程如(17-4)所示。取出其中的第一式、第二式及第六

式, 按照薄板小挠度弯曲问题中的假定, 命 $\sigma_z = 0$, 得到

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y, \quad \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y, \quad \gamma_{xy} = a_{66}\tau_{xy} \quad (b)$$

在工程文献中, 一般都把上式改写成

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu_1\sigma_y}{E_1}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu_2\sigma_x}{E_2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (c)$$

由于式(17-4)或式(b)具有对称性, 因此有 $\mu_1/E_1 = \mu_2/E_2$ 。求解应力分量, 得

$$\sigma_x = \frac{E_1\varepsilon_x + \mu_1E_2\varepsilon_y}{1 - \mu_1\mu_2}, \quad \sigma_y = \frac{E_2\varepsilon_y + \mu_2E_1\varepsilon_x}{1 - \mu_1\mu_2}, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

将几何方程(17-8)代入, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{z}{1 - \mu_1\mu_2} \left(E_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_1 E_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{z}{1 - \mu_1\mu_2} \left(E_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_2 E_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -z \left(2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17-15)$$

于是可以得出用 w 表示弯矩及扭矩的表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x z dz = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_y z dz = -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{xy} z dz = -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (17-16)$$

其中

$$D_1 = \frac{E_1 \delta^3}{12(1 - \mu_1\mu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 \delta^3}{12(1 - \mu_1\mu_2)}, \quad D_k = \frac{G\delta^3}{12} \quad (17-17)$$

在这里, D_1 及 D_2 是薄板在弹性主方向的弯曲刚度, D_k 是薄板在弹性主方向的扭转刚度, 三者都称为主刚度。

将表达式(17-16)代入平衡方程(17-13), 即得正交各向异性板在横向荷载作用下的弹性曲面微分方程

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = q \quad (17-18)$$

其中

$$D_3 = \mu_2 D_1 + 2D_k = \mu_1 D_2 + 2D_k \quad (17-19)$$

微分方程(17-18)可以用来在边界条件下求得薄板的挠度 w , 从而用公式(17-16)求得弯矩和扭矩, 并用公式(17-15)求得弯应力及扭应力。

§ 17-4 构造上正交各向异性的薄板

由前一节中可见，为了计算通常所理解的正交各向异性板(用正交各向异性材料制成的均质薄板)，需要已知这种材料的弹性常数 E_1 、 E_2 、 μ_1 、 μ_2 、 G ，其中

$$\frac{\mu_1}{E_1} = \frac{\mu_2}{E_2} \quad (17-20)$$

这样就可以用公式(17-17)算出主刚度 D_1 、 D_2 、 D_k ，并用公式(17-19)算出 D_3 。弹性常数 E_1 、 E_2 、 μ_1 、 μ_2 、 G 可以用实验方法直接求得，而关系式(17-20)可以用来检验实验结果的精度。

我们讨论各向异性板的平面应力问题和弯曲问题，不仅是为了计算那些用各向异性材料制成的薄板，更重要的是为了计算一些由于构造上的原因而表现为各向异性的薄板。

一块钢筋混凝土板，由于两向配筋率不同，将表现轻度的各向异性，于是可以把它当做一块均质的正交各向异性板，而参照两向配筋的数量来决定它的主刚度。当然，把一块非均质的板当做一块均质各向异性板来计算，无论怎样来计算主刚度，总归是近似的，不可能有完全合理的计算方法，因而也不可能得出很精确的主刚度。下面介绍比较简单而又通用的半经验公式。

命 E_s 为钢筋的弹性模量， E_c 为混凝土的弹性模量， μ 为混凝土的泊松比， $n = E_s/E_c$ 。按照胡拜尔的近似推导，上述正交各向异性板的刚度可以按照下列公式进行计算：

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{E_c}{1-\mu^2} [I_{xx} + (n-1)I_{sx}], \\ D_2 &= \frac{E_c}{1-\mu^2} [I_{yy} + (n-1)I_{sy}], \\ D_3 &= \sqrt{D_1 D_2}, \quad D_k = \frac{1-\mu}{2} \sqrt{D_1 D_2}, \end{aligned} \right\} \quad (17-21)$$

其中 I_{xx} 及 I_{sx} 分别为全薄板截面及钢筋截面对于 x 为常量的中和轴的惯矩； I_{yy} 及 I_{sy} 分别为全薄板截面及钢筋截面对于 y 为常量的中和轴的惯矩。

对于各向同性材料构成的各种波纹板和折皱板，也可以采用类似的方法，把它们变换成为两向刚度不同的正交各向异性板，然后进行计算。例如，对于图 17-1 所示的波纹板，如果把薄板横截面的中心线作为正弦曲

线，即

$$z = f \sin \frac{\pi x}{l},$$

则按照赛代尔的分析，计算刚度的近似公式为

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{l}{s} \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}, \\ D_2 &= \frac{Ef^2\delta}{2} \left[1 - \frac{0.81}{1 + \frac{5}{8} \left(\frac{f}{l} \right)^2} \right], \\ D_3 &= \frac{s}{l} \frac{E\delta^3}{12(1+\mu)}, \end{aligned} \right\} \quad (17-22)$$

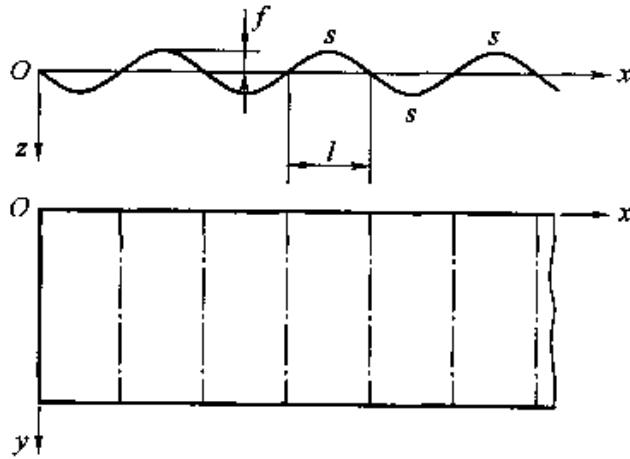


图 17-1

其中 E 及 μ 分别为薄板的弹性模量及泊松比， δ 为薄板的厚度， f 为正弦曲线的高度， l 及 s 分别为正弦曲线半波的弦长及弧长。弧长 s 可以按下列近似公式计算：

$$s = l \left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2} \right),$$

在这里，扭转刚度 D_4 没有适当的公式可用，因而扭矩 M_{xy} 无法计算。但是，在一般的设计中，都只须计算弯矩，而不必计算扭矩。以下的几种情形也与此相同。

对于加肋板，虽然可以用变分法计算它们在横向荷载作用下的挠度和内力，也可以用能量法计算它们的自然频率和临界荷载，但计算是很繁的。现在，把肋条的刚度归入薄板的刚度，从而把具有肋条的各向同性板变换成为不

具有肋条的各向异性板，则计算大为简化。

如果薄板在其两面具有同样布置的、和 y 轴平行的肋条，图 17-2，就可以用下列公式计算它的主刚度：

$$\left. \begin{aligned} D_1 = D_3 &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}, \\ D_2 &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E'I_2}{a_2}, \end{aligned} \right\} \quad (17-23)$$

其中 δ 是薄板的厚度， E 和 μ 是薄板的弹性模量和泊松比， E' 是肋条的弹性模量， I_2 是肋条的截面惯矩， a_2 是肋条的间距。在这里，我们是把肋条的弯曲刚度 $E'I_2$ 平均分配在宽度 a_2 的范围内，归入薄板的弯曲刚度。因此，必须肋条的间距远小于薄板的纵向尺寸，而且各个肋条的弯曲刚度大致相同，肋条的间距也大致均匀，否则就可能引起很大的误差。

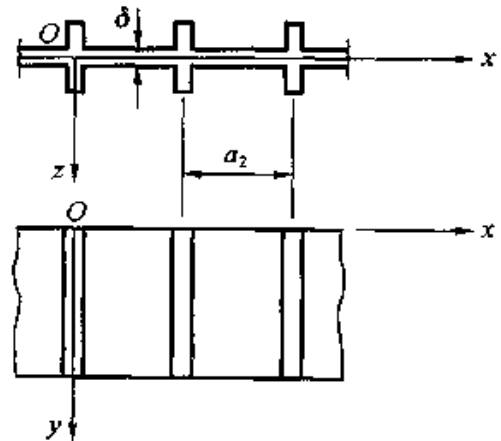


图 17-2

如果薄板在平行于 x 轴和 y 轴的两方向都有肋条（仍然是在薄板的两面同样布置的），则计算主刚度时可用下列公式：

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E'I_1}{a_1}, \\ D_2 &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E'I_2}{a_2}, \\ D_3 &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (17-24)$$

其中 I_1 及 a_1 相应于和 x 轴平行的肋条，而 I_2 及 a_2 相应于和 y 轴平行的肋条。

如果肋条只安置在薄板的一面，图 17-3，那就只能非常粗略地估算这加肋板的刚度，最简单的公式是

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{E\delta^3}{12 \left[1 - \left(1 - \frac{\delta^3}{h^3} \right) \frac{b}{a_2} \right]}, \\ D_2 &= \frac{EI}{a_2}, \quad D_k = \frac{G\delta^3}{12} + \frac{C}{2a_2}, \\ D_3 &= 2D_k, \end{aligned} \right\} \quad (17-25)$$

其中 E 和 G 分别为材料的拉压弹性模量和切变模量(假定薄板和肋条的弹性常数相同), I 是宽度为 a_2 的 T 形截面的惯矩, C 是一根肋条的抗扭刚度, 其他的记号如图所示。

对于构造上各向异性的薄板, 在求出弯曲内力以后, 如果还要求出应力, 就还须用到应力与内力之间的关系式。但是, 这种关系式不可能通过理论分析来建立, 而只能根据实验或经验来建立。

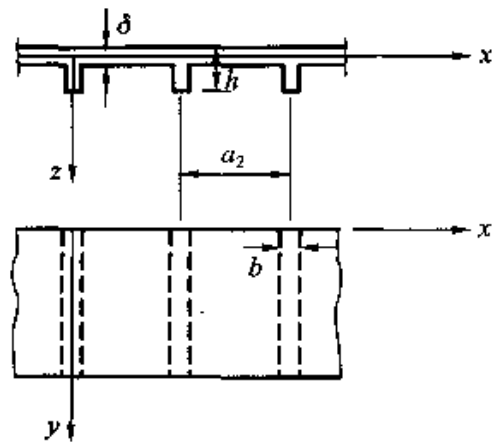


图 17-3

§ 17-5 小挠度弯曲问题的经典解法

在各向异性板中, 只有正交各向异性板是可能用经典方法求解的。

首先考虑四边简支的矩形薄板, 图 17-4。假定薄板的弹性主向和边界平行, 取坐标轴如图所示。边界条件是

$$\begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0, & (M_x)_{x=0} &= 0, \\ (w)_{x=a} &= 0, & (M_x)_{x=a} &= 0, \\ (w)_{y=0} &= 0, & (M_y)_{y=0} &= 0, \\ (w)_{y=b} &= 0, & (M_y)_{y=b} &= 0. \end{aligned}$$

仍然把挠度的表达式取为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (\text{a})$$

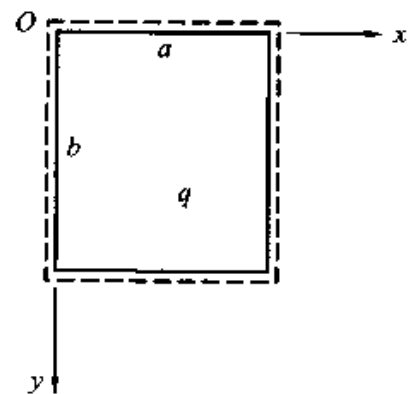


图 17-4

则上列关于挠度的边界条件可以满足; 参阅(17-16)中的前二式, 可见上列关于弯矩的边界条件也可以满足。

将横向荷载 $q = q(x, y)$ 展为与式(a)同一形式的重三角级数, 仍然得到

$$q = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right] \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (\text{b})$$

将式(a)及式(b)代入正交各向异性板的弹性曲面微分方程(17-18),

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q,$$

再将方程两边 $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ 的系数进行对比, 就得到

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 ab \left(D_1 \frac{m^4}{a^4} + 2D_3 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_2 \frac{n^4}{b^4} \right)} \quad (c)$$

当 $D_1 = D_2 = D_3 = D$ 时, 式(c)简化为

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 ab D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

和 § 13-6 中关于各向同性板的解答相同。

注意: 如果薄板并不是正交各向异性板, 而只是一般的各向异性板, 或者, 虽然薄板是正交各向异性板, 但薄板的边界并不是沿着弹性主向, 因而坐标轴也就不是沿着弹性主向, 那么, 不管边界如何, 将式(a)及式(b)代入一般各向异性板的弹性曲面微分方程(17-14)以后, 方程两边的级数不同, 我们就无法比较系数, 因而也就无从求得 A_{mn} , 于是就不可能求得解答。

现在来考虑有两对边简支的正交各向异性矩形板, 图 17-5。假定薄板的弹性主向和边界平行, 取坐标轴如图所示。左右两个简支边的边界条件是

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} = 0, & \quad (M_x)_{x=0} = 0, \\ (w)_{x=a} = 0, & \quad (M_x)_{x=a} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

仍然把挠度的表达式取为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (e)$$

其中 $Y_m = Y_m(y)$, 则上列关于挠度的边界条件可以满足; 参阅公式(17-16), 可见上列关于 M_x 的边界条件也可以满足。

将横向荷载 $q = q(x, y)$ 展为与式(e)同样形式的级数, 即

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (f)$$

得到

$$q_m = q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (g)$$

现在, 将式(e)及式(f)代入正交各向异性板的弹性曲面微分方程(17-18), 再将方程两边 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ 的系数进行对比, 即得

$$D_2 \frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2D_3 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m = q_m. \quad (h)$$

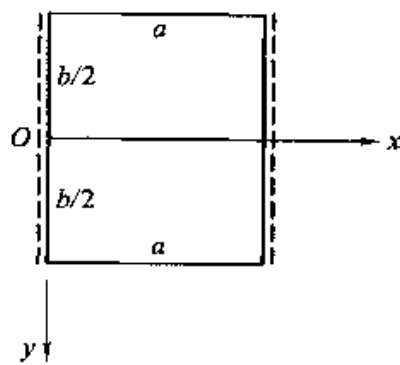


图 17-5

常微分方程(h)的解答将包含两部分:一部分是任意一个特解 $f_m(y)$,可以按照 $q_m(y)$ 的形式来选取,另一部分是相应齐次方程的通解 $F_m(y)$ 。把通解 $F_m(y)$ 取为 $e^{\frac{m\pi r y}{a}}$ 的形式,则特征方程为

$$D_2 r^4 - 2D_3 r^2 + D_1 = 0. \quad (i)$$

依照刚度 D_1 、 D_2 、 D_3 的不同数值,可能出现三种不同的情况:

(1) $D_3^2 > D_1 D_2$ 。这时,方程(i)将具有四个互不相等的实根

$$\pm r_1, \quad \pm r_2 (r_1 > 0, r_2 > 0)。$$

通解将成为

$$F_m(y) = A_m \cosh \frac{m\pi r_1 y}{a} + B_m \sinh \frac{m\pi r_1 y}{a} + C_m \cosh \frac{m\pi r_2 y}{a} + D_m \sinh \frac{m\pi r_2 y}{a},$$

(2) $D_3^2 = D_1 D_2$ 。这时,方程(i)将具有两两互等的实根

$$\pm r, \quad \pm r (r > 0)。$$

通解将成为

$$F_m(y) = (A_m + B_m y) \cosh \frac{m\pi r y}{a} + (C_m + D_m y) \sinh \frac{m\pi r y}{a}。$$

(3) $D_3^2 < D_1 D_2$ 。这时,方程(i)将具有两对复根

$$r_1 \pm ir_2, \quad -r_1 \pm ir_2 (r_1 > 0, r_2 > 0)。$$

通解将成为

$$F_m(y) = \cosh \frac{m\pi r_1 y}{a} \left(A_m \cos \frac{m\pi r_2 y}{a} + B_m \sin \frac{m\pi r_2 y}{a} \right) + \sinh \frac{m\pi r_1 y}{a} \left(C_m \cos \frac{m\pi r_2 y}{a} + D_m \sin \frac{m\pi r_2 y}{a} \right)。$$

通解中的系数 A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 仍然可用 $y = \pm b/2$ 处的边界条件来确定。其余的运算也和各向同性板的情况不相同。

如果薄板并不是正交各向异性板,而只是一般的各向异性板,或者,薄板的边界并不是沿着弹性主向,就不可能用经典方法求得解答,理由同上。

§ 17-6 用差分法解小挠度弯曲问题

如果把各向异性板和各向同性板相比,那么,能用经典方法求解的问题就更少,得出的解答也更不便于应用。因此,对于各向异性板说来,差分法和变分法等等的数值解法就显得更为重要。

用差分法求解各向异性板的小挠度弯曲问题,只须把这种薄板的弹性曲面

微分方程变换为差分方程，和在各向同性板的情况下同样地进行数值计算，就可以求得挠度和内力的数值解答。

对于正交各向异性板，将它的弹性曲面微分方程(17-18)应用于典型结点0，图14-1，得到

$$D_1 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_0 + D_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_0 + 2D_3 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 = q_0 \circ$$

利用 § 14-1 中的差分公式(14-4)，即得如下的差分方程：

$$\begin{aligned} & D_1 [6w_0 - 4(w_1 + w_3) + (w_9 + w_{11})] + \\ & D_2 [6w_0 - 4(w_2 + w_4) + (w_{10} + w_{12})] + \\ & 2D_3 [4w_0 - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + \\ & (w_5 + w_6 + w_7 + w_8)] = q_0 h^4 \circ \end{aligned} \quad (17-26)$$

这一差分方程的图式如图17-6所示。

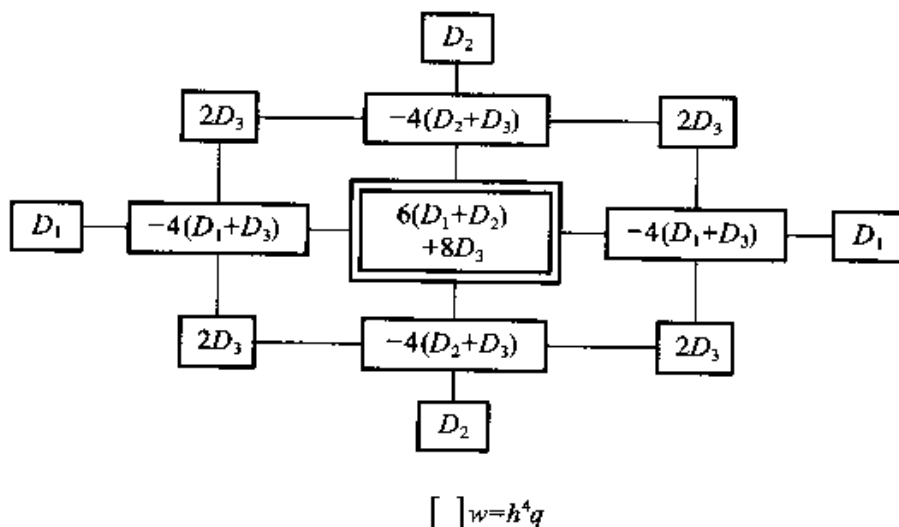


图 17-6

作为例题，试考虑图17-7所示的简支边正方形薄板，其弹性主向平行于边界，受有均布横向荷载 q_0 。假定它的主刚度 $D_2 = 0.5D_1$ ， $D_3 = 1.215D_1$ 。采用 4×4 的网格。注意对称性及各向异性，可见有4个独立的未知值 w_a 、 w_b 、 w_c 、 w_d （如果是各向同性板，则将由于 $w_b = w_c$ 而只有三个独立的未知值）。

利用图17-6所示的图式，为结点a立出差分方程，得

$$\begin{aligned} & [6(D_1 + D_2) + 8D_3]w_a - 4(D_1 + D_3)(2w_b) - \\ & 4(D_2 + D_3)(2w_c) + 2D_3(4w_d) = h^4 q_0 \circ \end{aligned}$$

除以 D_1 ，并将 $D_2/D_1 = 0.5$ 及 $D_3/D_1 = 1.215$ 代

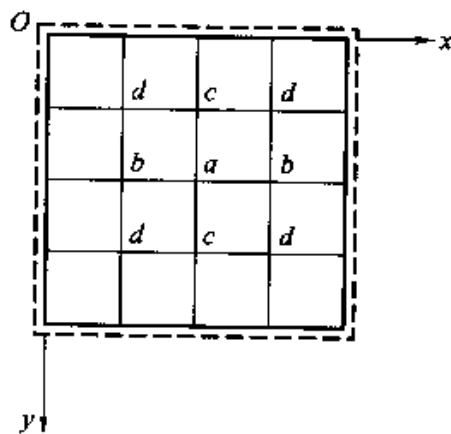


图 17-7

入, 得

$$18.72w_a - 17.72w_b - 13.72w_c + 9.72w_d = h^4 q_0 / D_1。$$

再为结点 b 、 c 、 d 立出差分方程, 应用边界条件后, 总共得出下列四个方程:

$$\begin{aligned} 18.72w_a - 17.72w_b - 13.72w_c + 9.72w_d &= h^4 q_0 / D_1, \\ -8.86w_a + 18.72w_b + 4.86w_c - 13.72w_d &= h^4 q_0 / D_1, \\ -6.86w_a + 4.86w_b + 18.72w_c - 17.72w_d &= h^4 q_0 / D_1, \\ 2.43w_a - 6.86w_b - 8.86w_c + 18.72w_d &= h^4 q_0 / D_1。 \end{aligned}$$

联立求解, 得到

$$\begin{aligned} w_a &= 1.0440q_0 h^4 / D_1, & w_b &= 0.7581q_0 h^4 / D_1, \\ w_c &= 0.7690q_0 h^4 / D_1, & w_d &= 0.5597q_0 h^4 / D_1。 \end{aligned}$$

§ 17-7 用变分法解小挠度弯曲问题

在 § 14-7 中已经指出: 在薄板的小挠度弯曲问题中, 按照计算假定, 用应力分量及形变分量表示的形变势能表达式是

$$V_e = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz。 \quad (a)$$

对于正交各向异性板, 将几何方程(17-8)及物理方程(17-16)代入, 然后对 z 进行积分, 从 $-\delta/2$ 到 $\delta/2$, 并应用公式(17-17)及(17-19), 即得正交各向异性板中用挠度表示的形变势能表达式

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{1}{2} \iint \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. 2(D_3 - 2D_4) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy。 \quad (17-27) \end{aligned}$$

同样, 将几何方程(17-8)及物理方程(17-9)代入式(a), 然后对 z 进行积分, 从 $-\delta/2$ 到 $\delta/2$, 并应用公式(17-12), 即得一般各向异性板中用挠度表示的形变势能表达式

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dx dy。 \quad (17-28) \end{aligned}$$

用里茨法求解时, 仍然可以把挠度的表达式取为

$$w = \sum_m C_m w_m, \quad (17-29)$$

其中 w_m 为满足位移边界条件的设定函数, C_m 为互不依赖的待定系数。应用

方程

$$\frac{\partial V_s}{\partial C_m} = \iint q w_m dx dy, \quad (17-30)$$

其中 q 为横向荷载, V_s 如公式(17-27)或(17-28)所示, 可以得到 C_m 的 m 个线性方程, 用来求解 C_m , 从而确定薄板的挠度。

作为例题, 设有正交各向异性的矩形板, 四边夹支, 图 17-8, 弹性主向沿坐标方向, 受有均布横向荷载 q_0 。取挠度的表达式为

$$w = C_1 w_1 = C_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2, \quad (b)$$

可以满足边界条件。代入(17-27)式, 进行积分, 并应用由(17-19)得来的关系式

$$2D_2 = D_3 - \mu_2 D_1,$$

得到

$$V_s = \frac{16}{1575} a^3 b^5 C_1^2 \left(D_1 b^4 + D_2 a^4 + \frac{4}{7} D_3 a^2 b^2 \right). \quad (c)$$

另一方面, 由式(b)得到

$$\begin{aligned} \iint q w_m dx dy &= q_0 \iint w_1 dx dy \\ &= q_0 2 \int_0^a 2 \int_0^b (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 dx dy = \frac{256}{225} q_0 a^5 b^5. \end{aligned} \quad (d)$$

将式(c)及式(d)代入(17-30)式, 求出 C_1 , 再代入式(b), 即得

$$w = \frac{7 q_0 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2}{128 \left(D_1 b^4 + D_2 a^4 + \frac{4}{7} D_3 a^2 b^2 \right)}.$$

对于各向同性板, $D_1 = D_2 = D_3 = D$, 得到

$$w = \frac{7 q_0 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2}{128 \left(a^4 + b^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 \right) D},$$

与 § 14-10 中对各向同性板的解答相同。

如果把挠度的表达式取为

$$w = C_{11} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right),$$

也可以满足边界条件。进行与上相同的运算, 将得到

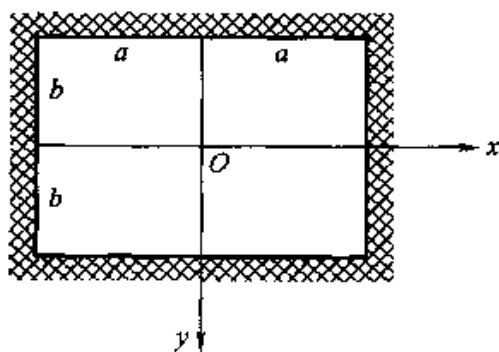


图 17-8

$$w = \frac{4q_0 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right)}{\pi^4 \left(\frac{3D_1}{a^4} + \frac{3D_2}{b^4} + \frac{2D_3}{a^2 b^2}\right)}。$$

对于各向同性板, $D_1 = D_2 = D_3 = D$, 得到

$$w = \frac{4q_0 a^4 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right)}{\pi^4 \left(3 + 2 \frac{a^2}{b^2} + 3 \frac{a^4}{b^4}\right) D},$$

也和 § 14 - 10 中对各向同性板的解答相同。

用伽辽金法求解时, 仍然可以设定挠度表达式如(17-29)所示, 但其中的 w_m 必须同时满足位移边界条件及内力边界条件。为了得出求解 C_m 的方程, 将伽辽金方程(14-31)写成

$$\iint (D \nabla^4 w - q) w_m dx dy = 0。$$

注意其中的 $D \nabla^4 w - q$ 乃是各向同性板的弹性曲面微分方程

$$D \nabla^4 w - q = 0$$

的左边, 参阅正交各向异性板的弹性曲面微分方程(17-18), 可见正交各向异性板的伽辽金方程应当是

$$\iint \left[D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - q \right] w_m dx dy = 0。 \quad (17-31)$$

同样, 参阅一般各向异性板的弹性曲面微分方程(17-14), 可见一般各向异性板的伽辽金方程应当是

$$\begin{aligned} \iint \left[D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ \left. 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q \right] w_m dx dy = 0。 \end{aligned} \quad (17-32)$$

将表达式(17-29)代入方程(17-31)或(17-32), 可以得到 C_m 的 m 个线性方程, 用来求解 C_m , 从而确定薄板的挠度表达式。

§ 17 - 8 压曲问题及振动问题

各向同性板的弹性曲面微分方程是

$$D \nabla^4 w = q,$$

而正交各向异性板的弹性曲面微分方程是

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = q_0$$

可见, 前一式中的微分算子 $D\nabla^4 = D \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2D \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ 在后一式中成为

$$D_0 \nabla^4 = D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (17-33)$$

实际上, $D\nabla^4 w$ 和 $D_0 \nabla^4 w$ 同样都表示一块单位面积的薄板所受的横向弹性力, 即薄板其余部分对它所施的横向内力, 而弹性曲面微分方程不过表示“横向弹性力与横向荷载成平衡”而已。

根据这个论证, 只须将各向同性板的压曲微分方程(16-3)中的算子 $D\nabla^4$ 变换为 $D_0 \nabla^4$, 即得正交各向异性板的压曲微分方程

$$D_0 \nabla^4 w - \left(F_{\tau_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_{\tau_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2F_{\tau_{xy}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (17-34)$$

这一微分方程可以用来计算临界荷载。具体计算时, 要首先按照 § 17-2 中所述的方法, 求出中面内力(用纵向荷载表示), 代入上列压曲微分方程, 然后分析该微分方程的满足边界条件的非零解, 即可据以计算临界荷载。当四边简支或两对边简支的矩形薄板在简支边上受有均布纵向压力时, 可以求得临界荷载的精确值。在其他的情况下, 可以用差分法或能量法求得临界荷载的近似值, 计算步骤和各向同性板的情况下相同。

对于一般的各向异性板, 也可以同样地导出压曲微分方程

$$D_a \nabla^4 w - \left(F_{\tau_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_{\tau_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2F_{\tau_{xy}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0,$$

其中

$$D_a \nabla^4 = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

利用这一微分方程, 可以用差分法求得临界荷载的近似值。此外, 还可以用能量法求得临界荷载的近似值。

将各向同性板的自由振动微分方程(15-1)写成

$$D \nabla^4 w + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

然后根据上面的论证, 将其中的算子 $D\nabla^4$ 改为 $D_0 \nabla^4$, 即得正交各向异性板的自由振动微分方程

$$D_0 \nabla^4 w + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (17-35)$$

其中的算子 $D_0 \nabla^4$ 如(17-33)式所示。把它的通解仍然取为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t) W_m(x, y), \quad (17-36)$$

同样可以得到振形微分方程

$$D_0 \nabla^4 W - \omega^2 \bar{m} W = 0. \quad (17-37)$$

当 \bar{m} 为常量时, 分析振形函数 W 的满足边界条件的非零解, 可以求得自然频率

$$\omega = \sqrt{\frac{D_0 \nabla^4 W}{\bar{m} W}}. \quad (17-38)$$

对于四边简支的矩形薄板, 还可以由各阶的自然频率和相应的振形函数求得自由振动的完整解答。在此外的情况下, 可以用差分法或能量法求得自然频率的近似值。

对于一般的各向异性板, 也可以用差分法或能量法求得自然频率的近似值。

将各向同性板的受迫振动微分方程(15-27)改写为

$$D \nabla^4 w + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_t,$$

根据上面的论证, 将其中的算子 $D \nabla^4$ 改为 $D_0 \nabla^4$ 或 $D_a \nabla^4$, 即得正交各向异性板的受迫振动微分方程

$$D_0 \nabla^4 w + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_t, \quad (17-39)$$

或一般各向异性板的受迫振动微分方程

$$D_a \nabla^4 w + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_t.$$

但是, 只有当 \bar{m} 为常量时, 才可以对四边简支的正交各向异性板进行具体分析。

习 题

17-1 试将一般各向异性板及正交各向异性板中的横向剪力用挠度表示。

$$\text{答案: } F_{s_x} = - \left[D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right],$$

$$F_{s_y} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

17-2 设图 13-6 中的椭圆薄板为正交各向异性板, 其弹性主向系沿坐标轴方向, 试求挠度和弯矩, 以及它们的最大绝对值。

$$\text{答案: } w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{8 \left(3 + 3 \frac{D_2 a^4}{D_1 b^4} + 2 \frac{D_3 a^3}{D_1 b^2} \right) D_1}$$

$$M_{\max} = \frac{q_0 a^2}{3 + 3 \frac{D_2 a^4}{D_1 b^4} + 2 \frac{D_3 a^2}{D_1 b^2}}, \left(\text{设 } \frac{D_1}{D_2} > \frac{a^2}{b^2} \right)$$

$$M_{\max} = \frac{q_0 b^2}{3 + 3 \frac{D_1 b^4}{D_2 a^4} + 2 \frac{D_3 b^2}{D_2 a^2}}, \left(\text{设 } \frac{D_1}{D_2} < \frac{a^2}{b^2} \right)$$

17-3 矩形的正交各向异性板，四边简支，图 17-9，弹性主向沿坐标轴方向，其主刚度 $D_2 = 0.5D_1$ ， $D_3 = 1.25D_1$ ，受有均布横向荷载 q_0 ，试用 3×4 的网格计算挠度。

答案： $w_1 = \frac{4}{9} \frac{q_0 h^4}{D_1}$ ， $w_2 = \frac{1}{3} \frac{q_0 h^4}{D_1}$ 。

17-4 设习题 17-9 中的薄板为四边夹支，试用同样的网格计算挠度。

答案： $w_1 = \frac{14}{61} \frac{q_0 h^4}{D_1}$ ， $w_2 = \frac{31}{183} \frac{q_0 h^4}{D_1}$ 。

17-5 试用伽辽金法解 § 17-7 中的例题。

17-6 设图 16-3 中的矩形薄板为正交各向异性板，其弹性主向系沿坐标轴方向，试导出压曲条件。

答案： $F_x = \frac{\pi^2 a^2}{m^2} \left[D_1 \left(\frac{m}{a} \right)^4 + D_2 \left(\frac{n}{b} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 \right]$ 。

17-7 设有四边简支的正交各向异性板，其弹性主向系沿坐标轴方向，试导出自然频率的公式。

答案： $\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{m^4} \left[D_1 \left(\frac{m}{a} \right)^4 + D_2 \left(\frac{n}{b} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 \right]$ 。

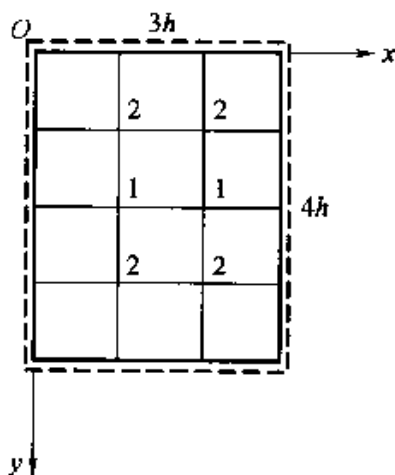


图 17-9

参考教材

- [1] 列赫尼茨基著，各向异性板[M]，胡海昌译，北京：科学出版社，1963；第九章，第十章，第十二至十四章。
- [2] 铁木辛柯，沃诺斯基著，板壳理论[M]，《板壳理论》翻译组译，北京：科学出版社，1977；第十一章。

第十八章 薄板的大挠度弯曲问题

§ 18 - 1 基本微分方程及边界条件

以前在讨论薄板弯曲问题时，我们曾经假定薄板的挠度远小于厚度，薄板中面内各点由挠度引起的纵向位移可以不计，于是薄板的中面没有伸缩和切应变，因而也就不发生中面内力。对于钢筋混凝土薄板说来，上述小挠度的假定总是能符合实际情况的。但是，对于某些金属薄板说来，挠度却并不一定远小于厚度。这样，就必须考虑中面内各点由挠度引起的纵向位移，因此也就必须考虑此项中面位移引起的中面应变和中面内力。

我们假定，薄板的挠度虽然并不远小于厚度，但仍然远小于中面的尺寸，所以 § 16 - 1 中导出的平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{Tx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{Ty}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial F_{Ty}}{\partial y} + \frac{\partial F_{Tx}}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

以及弹性曲面微分方程

$$D\nabla^4 w - \left(F_{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_{Ty} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2F_{Txy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = q \quad (b)$$

仍然适用。所不同的是：这里的中面内力 F_{Tx} 、 F_{Ty} 、 F_{Txy} 是由横向荷载 q 引起，而不是由纵向荷载引起的。上列三个微分方程中含有四个未知函数 w 、 F_{Tx} 、 F_{Ty} 、 F_{Txy} ，因此还必须考虑形变和位移。

中面内各点的纵向位移分量 u 和 v 引起的中面应变，仍然可以用平面问题中的几何方程表示成为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (c)$$

至于挠度 w 引起的中面应变，则可通过如下的几何分析用 w 来表示（这时取 $u = v = 0$ ）。

当薄板发生挠度时，中面内 x 方向的微分线段 $AB = dx$ 将移至 $A'B'$ ，图 18 - 1。不计三阶及三阶以上的微量，则 AB 的正应变为

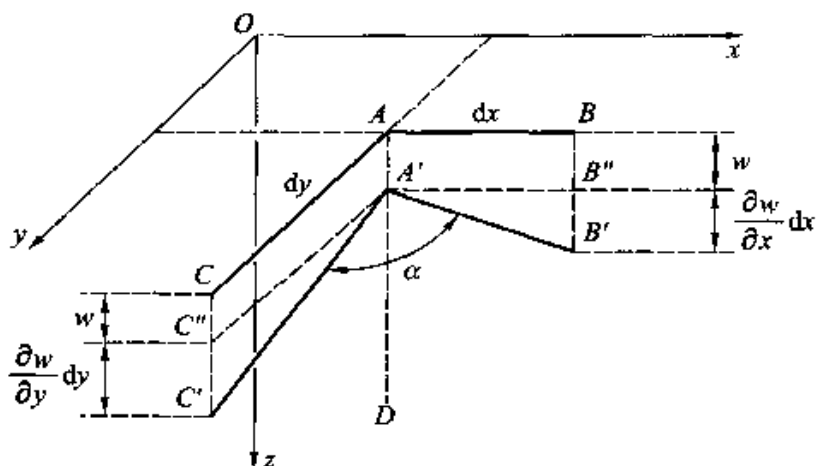


图 18-1

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left[dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \right]^{1/2} - dx}{dx} \\ &= \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.\end{aligned}\quad (d)$$

同样可得中面内 y 方向的微分线段 AC 的正应变为

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (e)$$

命 $A'B'$ 的方向余弦为 l_1, m_1, n_1 , 不计三阶及三阶以上的微量, 则其中的

$$m_1 = 0, \quad n_1 = \cos \angle B'A'D = \sin \angle B'A'B'' = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

同样, 命 $A'C'$ 的方向余弦为 l_2, m_2, n_2 , 则其中的

$$l_2 = 0, \quad n_2 = \cos \angle C'A'D = \sin \angle C'A'C'' = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

可见 $A'B'$ 和 $A'C'$ 的夹角 α 的余弦为

$$\cos \alpha = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

根据切应变的定义, $\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 。因此, 不计三阶及三阶以上的微量, 即有

$$\gamma_{xy} = \sin \gamma_{xy} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (f)$$

将式(c)所示的中面应变与(d)、(e)、(f)三式所示的中面应变相叠加, 得几何方程

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \quad (18-1)$$

从上列三式中消去中面位移 u 及 v , 得出相容方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (18-2)$$

将物理方程

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

改写为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E\delta}(F_{Tx} - \mu F_{Ty}), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E\delta}(F_{Ty} - \mu F_{Tx}), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E\delta}F_{Txy}, \end{aligned} \right\} \quad (18-3)$$

然后代入(18-2)式, 得出用中面内力和挠度表示的相容方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_{Tx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_{Ty}}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 F_{Tx}}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 F_{Ty}}{\partial y^2} - 2(1+\mu) \frac{\partial^2 F_{Txy}}{\partial x \partial y} \\ = E\delta \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (g)$$

现在, 式(a)、式(b)和式(g)成为联立的一组四个微分方程, 其中包含四个未知函数 F_{Tx} 、 F_{Ty} 、 F_{Txy} 、 w , 这就有了求解这些未知函数的可能性。

为了简化上述微分方程, 我们和在平面问题中一样地引用应力函数 $\Phi(x, y)$, 而命

$$\left. \begin{aligned} F_{Tx} = \delta\sigma_x = \delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad F_{Ty} = \delta\sigma_y = \delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \\ F_{Txy} = \delta\tau_{xy} = -\delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (18-4)$$

这样, 式(a)所示的两个微分方程自然满足, 而式(b)及式(g)所示的两个微分方程成为

$$D\nabla^4 w = \delta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + q, \quad (18-5)$$

$$\nabla^4 \Phi = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (18-6)$$

这就是薄板的大挠度微分方程组, 是由卡门首先导出的。求解薄板的大挠度弯曲问题, 就是要在边界条件下从这个微分方程组求解应力函数 Φ 和挠度 w , 然

后就可以由 Φ 求出中面内力，由 w 求出弯扭内力。

在大挠度微分方程(18-5)及(18-6)中，未知函数是挠度 w 和应力函数 Φ ，因此，边界条件须用 w 和 Φ 来表示。关于 w 的边界条件，那是和小挠度弯曲问题中相同的。下面来说明一下关于 Φ 的边界条件。

以 $x=0$ 的边界为例。如果该边界完全不受纵向约束(在 x 和 y 方向都不受约束)，则该边界上在 x 和 y 方向的中面内力都应当等于零，即

$$(F_{Tx})_{x=0} = 0, \quad (F_{Ty})_{x=0} = 0。$$

利用(18-4)式，可将它们变换成为

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)_{x=0} = 0。 \quad (18-7)$$

同样，如果 $y=0$ 的边界在 x 和 y 方向都不受约束，则有边界条件

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)_{y=0} = 0。 \quad (18-8)$$

当任一边界受有 x 或 y 方向的约束时，则须用到关于 u 或 v 的边界条件。在一般情况下，这种边界条件不可能用应力函数 Φ 和挠度 w 来表示，因而问题就无法求解。特殊的情况见 § 18-2 及 § 18-4。

即使薄板的边界并不受纵向约束，由于薄板的大挠度微分方程(18-5)和(18-6)是联立的非线性微分方程组，要在边界条件下求得它们的精确解答，仍然非常困难。用差分法求它们的近似解，则是可行的，但也只能采用逐步求近的办法，步骤如下：(1)先假定 $\Phi=0$ ，使(18-5)式成为 $D\nabla^4 w = q$ ，和小挠度弯曲问题中同样地用差分法求解 w 。(2)求出 w 的二阶导数值，代入方程(18-6)，用差分法求解 Φ 。(3)求出 Φ 的二阶导数值，代入方程(18-5)，用差分法求解 w 。(4)重复第(2)步和第(3)步的计算，直到连续两次算出的 w 值充分接近为止。由于板边上不受纵向荷载(即 $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$)，在第(2)步中用差分法求解 Φ 值时，边界条件非常简单，和用差分法求解温度应力的平面问题时相同，也就是：边界上的 Φ 值为零，边界外一行虚结点处的 Φ 值等于边界内一行相对结点处的 Φ 值。

§ 18-2 无限长薄板的大挠度弯曲

当矩形薄板有两个对边是无限长，而且所受的横向荷载又不沿长度方向变化时，不论边界条件如何，都不难求得大挠度弯曲问题的精确解答。

取坐标轴如图 18-2 所示，则横向荷载的集度仅为 x 的函数，即 $q = q(x)$ 。由于一切情况不沿 y 方向变化，所以薄板的位移、形变和内力都只是 x 的函数；

又由于对称(垂直于 y 轴的任一平面都是一个对称面), 所以有 $F_{Tx} = F_{Ty} = 0$ 。于是平衡方程(16-1)中的第二式总能满足, 而其中的第一式简化为

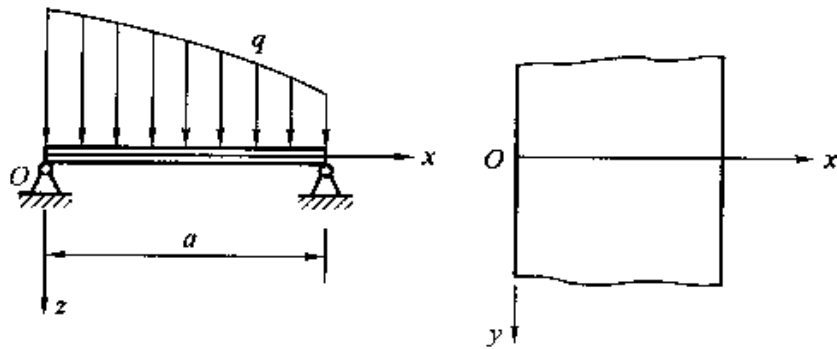


图 18-2

$$\frac{dF_{Tx}}{dx} = 0。$$

这表示 F_{Tx} 为常量。弹性曲面微分方程(16-2)则简化为

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - F_{Tx} \frac{d^2 w}{dx^2} = q。 \quad (a)$$

命

$$\lambda = \sqrt{F_{Tx}/D}, \quad (18-9)$$

则方程(a)可以改写为

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \lambda^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q}{D}。 \quad (18-10)$$

另一方面, 由于对称, 薄板的所有各点都不会有 y 方向的位移, 即 $v = 0$ 。再注意到 $w = w(x)$, 可见几何方程(18-1)中的第二式将给出 $\varepsilon_y = 0$ 。于是由物理方程(18-3)中的第二式得出 $F_{Ty} = \mu F_{Tx}$, 从而由其中的第一式得出

$$\varepsilon_x = \frac{1 - \mu^2}{E\delta} F_{Tx}。 \quad (b)$$

将几何方程(18-1)中的第一式代入, 注意 u 和 w 都只是 x 的函数, 即得

$$\frac{du}{dx} = \frac{1 - \mu^2}{E\delta} F_{Tx} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2。 \quad (18-11)$$

如果 $x = 0$ 的一边, 或者 $x = a$ 的一边, 在 x 方向不受约束, 注意 F_{Tx} 为常量, 则由内力边界条件 $(F_{Tx})_{x=0} = 0$ 或者 $(F_{Tx})_{x=a} = 0$ 得到 $F_{Tx} = 0$ 。这时, 微分方程(a)将简化为 $D \frac{d^4 w}{dx^4} = q$, 和平面应变情况下的直梁的弹性曲线微分方程相同, 因而挠度、弯矩、剪力也将与该直梁中相同, 可以用材料力学中的方法来求解。如果要求出纵向位移 u , 可以利用由(18-11)式得来的微分方程

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2,$$

以及位移边界条件 $(u)_{x=a} = 0$ 或者 $(u)_{x=0} = 0$ 。

如果 $x=0$ 和 $x=a$ 的两边都在 x 方向受有约束, 则有位移边界条件

$$(u)_{x=0} = 0, \quad (u)_{x=a} = 0. \quad (c)$$

由此可得

$$\int_0^a \frac{du}{dx} dx = (u)_{x=a} - (u)_{x=0} = 0,$$

或将(18-11)式代入而得

$$\int_0^a \left[\frac{1-\mu^2}{E\delta} F_{Tx} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx = 0.$$

注意 F_{Tx} 为常量, 即由上式得出

$$F_{Tx} = \frac{E\delta}{2(1-\mu^2)a} \int_0^a \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (18-12)$$

微分方程(18-10)和(18-12)式可以用来求解 w 和 F_{Tx} 。如果要求出 u , 可以利用微分方程(18-11)和(c)中的两个条件之一(只要其中的一个满足了, 另一个自然会满足)。

微分方程(18-10)的解答可以写成

$$w = C_1 \sinh \lambda x + C_2 \cosh \lambda x + C_3 x + C_4 + w_1, \quad (d)$$

其中的特解 w_1 可以按照(18-10)的要求, 根据 q 来选取, 而常数 C_1 至 C_4 可由 w 的边界条件来决定。

例如, 设横向荷载 q 等于常量 q_0 , 则特解可以取为

$$w_1 = -\frac{q_0 x^2}{2\lambda^2 D} = -\frac{q_0 x^2}{2F_{Tx}}.$$

于是由式(d)得

$$w = C_1 \sinh \lambda x + C_2 \cosh \lambda x + C_3 x + C_4 - \frac{q_0 x^2}{2F_{Tx}}. \quad (e)$$

假定 $x=0$ 及 $x=a$ 的两边都是铰支边, 则边界条件为

$$(w)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = 0,$$

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=a} = 0.$$

将式(e)代入, 得到 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 的四个方程

$$C_2 + C_4 = 0, \quad C_2 \lambda^2 - \frac{q_0}{F_{Tx}} = 0.$$

$$C_1 \sinh \lambda a + C_2 \cosh \lambda a + C_3 a + C_4 - \frac{q_0 a^2}{2F_{Tx}} = 0,$$

$$C_1 \lambda^2 \sinh \lambda a + C_2 \lambda^2 \cosh \lambda a - \frac{q_0}{F_{Tx}} = 0。$$

由此解得

$$C_2 = \frac{q_0}{\lambda^2 F_{Tx}}, \quad C_4 = -C_2, \quad C_1 = -C_2 \tanh \frac{\lambda a}{2}, \quad C_3 = \frac{\lambda^2 a}{2} C_2。$$

代入式(e), 稍加整理, 得出

$$w = \frac{q_0}{\lambda^2 F_{Tx}} \left[\frac{\cosh \lambda \left(\frac{a}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\lambda a}{2}} - 1 \right] + \frac{q_0 x (a - x)}{2F_{Tx}}。$$

引用量纲一的常数

$$n = \frac{\lambda a}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{F_{Tx}}{D}}, \quad (18-13)$$

则上式可以改写成为

$$w = \frac{q_0 a^4}{16n^4 D} \left[\frac{\cosh n \left(1 - \frac{2x}{a} \right)}{\cosh n} - 1 \right] + \frac{q_0 a^2}{8n^2 D} (a - x) x。 \quad (18-14)$$

现在, 由上式求出 $\frac{dw}{dx}$, 代入(18-12)式, 积分以后, 将得到

$$F_{Tx} = \frac{E\delta q_0^2 a^6}{(1-\mu^2)D^2} \left(\frac{5 \tanh n}{256n^7} + \frac{\tanh^2 n - 5}{256n^6} + \frac{1}{384n^4} \right)。$$

利用(18-13)式将其中的 F_{Tx} 用 n 、 a 、 D 表示, 再将

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

代入, 即得 n 的超越方程如下:

$$\frac{135 \tanh n}{16n^9} + \frac{27(\tanh^2 n - 5)}{16n^8} + \frac{9}{8n^6} = \left[\frac{E\delta^4}{(1-\mu^2)q_0 a^4} \right]^2。 \quad (18-15)$$

于是, 对于受一定均布荷载的薄板, 方程(18-15)的右边为已知数, 可由该方程用试算法求得 n , 然后即可用(18-13)式求得内力 F_{Tx} , 并用(18-14)式求出挠度 w , 从而求得弯矩 M_x 。根据求出的内力 F_{Tx} 及 M_x , 可以求得薄板的主要应力 σ_x 。

§ 18-3 变分法的应用

对于薄板的大挠度弯曲问题，用变分法求出近似解答，也是切实可行的。因此，我们首先来导出薄板的大挠度形变势能的公式。

在这里，薄板的形变势能 V_e 将包括相应于弯曲形变的势能 V_{e1} 和相应于中面应变的势能 V_{e2} ：

$$V_e = V_{e1} + V_{e2} \quad (18-16)$$

相应于弯曲形变的势能，仍然和以前一样地用挠度 w 表示如下：

$$V_{e1} = \frac{1}{2} \iint D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (18-17)$$

相应于中面应变的势能，可以用平面应力和中面应变表示为

$$V_{e2} = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz$$

注意平面应力和中面应变都只是 x 和 y 的函数，可见

$$\begin{aligned} V_{e2} &= \frac{1}{2} \iint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \delta \\ &= \frac{1}{2} \iint (F_{Tx} \varepsilon_x + F_{Ty} \varepsilon_y + F_{Txy} \gamma_{xy}) dx dy \end{aligned} \quad (a)$$

另一方面，由物理方程(18-3)求解中面内力，得

$$\left. \begin{aligned} F_{Tx} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \\ F_{Ty} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \\ F_{Txy} &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a)，得

$$V_{e2} = \frac{E\delta}{2(1-\mu^2)} \iint \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dx dy \quad (c)$$

再将几何方程(18-1)代入，简化以后，即得

$$\begin{aligned} V_{e2} &= \frac{E\delta}{2(1-\mu^2)} \iint \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \\ & (1 - \mu) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\ & \left. 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \} dx dy. \end{aligned} \quad (18-18)$$

应用里茨法。将中面内各点的位移表示成为

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_m A_m u_m, \\ v &= \sum_m B_m v_m, \\ w &= \sum_m C_m w_m, \end{aligned} \right\} \quad (18-19)$$

其中的设定函数 u_m 、 v_m 、 w_m 满足位移边界条件，而 A_m 、 B_m 、 C_m 为互不依赖的待定系数（三式中的 m 可以不同）。注意 $f_x = f_y = \bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$ ，即由方程(11-15)及(14-25)得

$$\frac{\partial V_e}{\partial A_m} = 0, \quad \frac{\partial V_e}{\partial B_m} = 0, \quad \frac{\partial V_e}{\partial C_m} = \iint q w_m dx dy,$$

由此可以得出系数 A_m 、 B_m 、 C_m 的代数方程，从而求得这些系数，并由(18-19)式求得 u 、 v 、 w 。在一般情况下，这些代数方程都是非线性的。

作为例题，设有受均布荷载 q_0 的固定边矩形薄板，图 18-3。取中面位移的表达式为

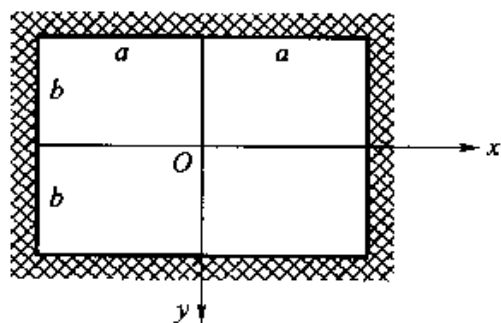


图 18-3

$$\begin{aligned} u &= (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(A_1 x + A_2 x^3 + A_3 x y^2 + A_4 x^3 y^2), \\ v &= (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(B_1 y + B_2 y^3 + B_3 x^2 y + B_4 x^2 y^3), \\ w &= (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (C_1 + C_2 x^2 + C_3 y^2), \end{aligned}$$

可以满足位移边界条件。在这里，考虑了问题的对称性，所以取 u 为 x 的奇函数而为 y 的偶函数，取 v 为 x 的偶函数而为 y 的奇函数， w 则为 x 和 y 的偶函数。

这里共有 11 个待定系数。由

$$\frac{\partial V_e}{\partial A_m} = 0, \quad \frac{\partial V_e}{\partial B_m} = 0, \quad (d)$$

各得 4 个方程，由

$$\frac{\partial V_e}{\partial C_m} = \iint q w_m dx dy = q_0 \iint w_m dx dy, \quad (e)$$

可得三个方程，共有 11 个方程，可以求解。由(18-17)、(18-18)、(18-19)三式可见，在式(d)给出的方程中，将包含 A_m 及 B_m 的一次幂项和 C_m 的二次幂项，在式(e)给出的方程中，将包含 C_m 的三次幂项。求解时，可由式(d)给出的方程解出 A_m 及 B_m ，用 C_m 表示，然后代入式(e)给出的方程，得到 C_m 的三个三次方程，用逐步逼近法求解三个 C_m ，最后再求出 A_m 及 B_m ，从而求得中面位移 u 、 v 、 w 。

求出中面位移 u 、 v 、 w 以后，可用(18-1)式求得中面应变，从而求得平面应力。另一方面，可由 w 求得弯矩、扭矩和横向剪力，从而求得弯应力、扭应力和横向切应力。将这两方面的应力进行叠加，即得总的应力。最大挠度 w_{\max} 发生在薄板的中心 ($x = y = 0$)。最大正应力发生在边界的中点，即， $(\sigma_x)_{\max}$ 发生在 $(a, 0, -\delta/2)$ ， $(\sigma_y)_{\max}$ 发生在 $(0, b, -\delta/2)$ 。

当 $\mu = 0.3$ 而 $b/a = 1$ 及 $b/a = 1/2$ 时， w_{\max} 和 $(\sigma_y)_{\max}$ 随横向荷载 q_0 变化的规律，大致如图 18-4 及图 18-5 所示。实线表示按大挠度理论计算的结果；虚线表示按小挠度理论计算的结果。由图显然可见，小挠度理论夸大了挠度和应力。因此，通常按小挠度理论进行计算和设计的结果，是偏于安全和浪费的。

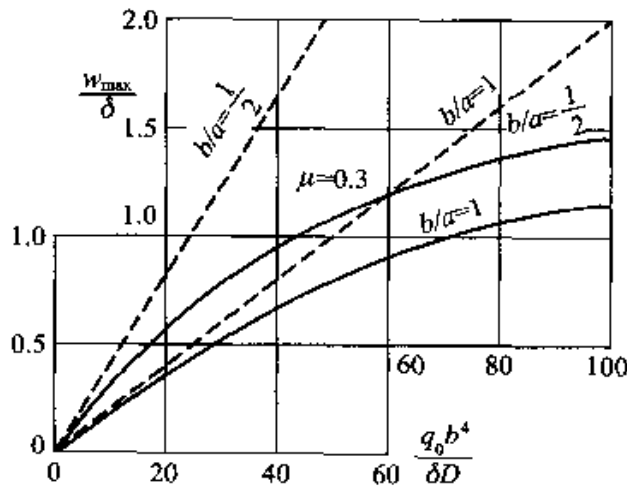


图 18-4

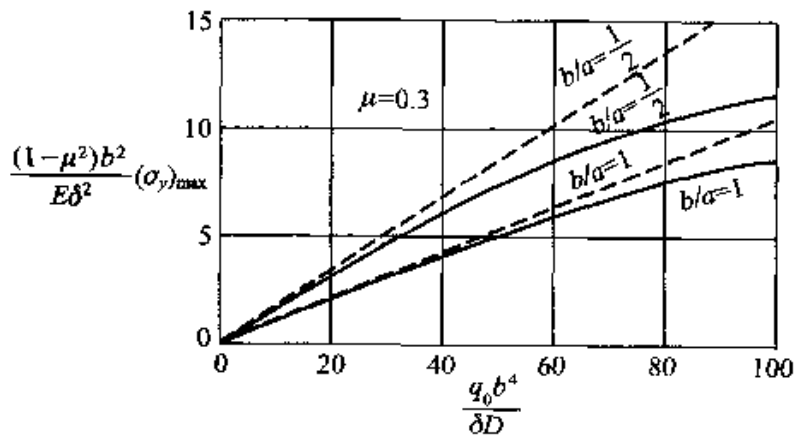


图 18-5

§ 18-4 圆板的轴对称问题

在用极坐标求解平面问题时，曾经导出平衡微分方程如下：

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} + f_\rho = 0, \quad (\text{a})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} + f_\varphi = 0. \quad (\text{b})$$

如果不计体力，并且问题是轴对称的，则有 $f_\rho = f_\varphi = 0$ ， $\tau_{\rho\varphi} = 0$ ，而且 σ_ρ 和 σ_φ 都只是 ρ 的函数。这时，方程(b)成为恒等式，而方程(a)简化为常微分方程

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} = 0.$$

乘以 $\delta\rho$ ，并注意 $\delta\sigma_\rho = F_{\tau\rho}$ ， $\delta\sigma_\varphi = F_{\tau\varphi}$ ，即得

$$\rho \frac{dF_{\tau\rho}}{d\rho} + F_{\tau\rho} - F_{\tau\varphi} = 0,$$

或改写为

$$F_{\tau\varphi} = \rho \frac{dF_{\tau\rho}}{d\rho} + F_{\tau\rho} = \frac{d}{d\rho}(\rho F_{\tau\rho}). \quad (18-20)$$

将微分方程(16-2)向极坐标中变换，得到

$$D \nabla^4 w - \left[F_{\tau\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + F_{\tau\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + 2F_{\tau\rho\varphi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right] = q.$$

在轴对称的情况下，上列方程简化为

$$D \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^2 w - F_{\tau\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} - F_{\tau\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} = q.$$

将(18-20)式代入，得

$$D \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^2 w - F_{\tau\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho F_{\tau\rho}) = q,$$

或改写为

$$D \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dw}{d\rho} \right) \right] \right\} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho F_{\tau\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) = q. \quad (18-21)$$

现在来考虑相容条件。参阅(18-1)中的第一式，注意 ρ 是和 x 一样的直线长度坐标，可以写出几何方程

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2,$$

其中 ε_ρ 为中面的径向正应变， u_ρ 为中面内各点的径向位移。在轴对称的情况

下, 上式成为

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{du_{\rho}}{d\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \quad (c)$$

径向位移 u_{ρ} 引起的环向正应变仍然是

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{u_{\rho}}{\rho} \quad (d)$$

从式(c)及式(d)中消去 u_{ρ} , 即得形变相容方程

$$\varepsilon_{\rho} - \frac{d}{d\rho}(\rho\varepsilon_{\varphi}) - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 = 0 \quad (e)$$

为了把其中的中面应变改用内力表示, 须利用物理方程

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho} &= \frac{1}{E}(\sigma_{\rho} - \mu\sigma_{\varphi}) = \frac{1}{E\delta}(F_{T_{\rho}} - \mu F_{T_{\varphi}}), \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{E}(\sigma_{\varphi} - \mu\sigma_{\rho}) = \frac{1}{E\delta}(F_{T_{\varphi}} - \mu F_{T_{\rho}}) \end{aligned} \quad (f)$$

代入式(e), 并利用(18-20)式消去 $F_{T_{\varphi}}$, 简化以后, 即得相容方程

$$\rho^2 \frac{d^2 F_{T_{\rho}}}{d\rho^2} + 3\rho \frac{dF_{T_{\rho}}}{d\rho} + \frac{E\delta}{2} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 = 0 \quad (18-22)$$

现在, 微分方程(18-21)及(18-22)中只包含两个未知函数 $w = w(\rho)$ 及 $F_{T_{\rho}} = F_{T_{\rho}}(\rho)$, 可以在边界条件下求解这两个函数。有了 w , 就可以求得弯矩 M_{ρ} 及 M_{φ} ; 有了 $F_{T_{\rho}}$, 就可以用方程(18-20)求得 $F_{T_{\varphi}}$ 。在轴对称问题中, 如果引用应力函数, 则仍然有两个未知函数, 并得不到什么简化, 所以不必引用。

在轴对称问题中, 可以把中面的径向位移 u_{ρ} , 用径向内力 $F_{T_{\rho}}$ 来表示, 从而把 u_{ρ} 的边界条件变换成为 $F_{T_{\rho}}$ 的边界条件。为此, 只须从式(d)及式(f)中消去 ε_{φ} , 得出

$$u_{\rho} = \frac{\rho}{E\delta}(F_{T_{\varphi}} - \mu F_{T_{\rho}}),$$

然后将(18-20)式代入, 即得

$$u_{\rho} = \frac{\rho}{E\delta} \left[\frac{d}{d\rho}(\rho F_{T_{\rho}}) - \mu F_{T_{\rho}} \right] = \frac{\rho}{E\delta} \left[\rho \frac{dF_{T_{\rho}}}{d\rho} + (1 - \mu) F_{T_{\rho}} \right]$$

于是边界条件

$$(u_{\rho})_{\rho=a} = 0$$

可以变换成为

$$\left[\rho \frac{dF_{T_{\rho}}}{d\rho} + (1 - \mu) F_{T_{\rho}} \right]_{\rho=a} = 0 \quad (18-23)$$

§ 18-5 用摄动法解圆板的轴对称问题

上节中导出的微分方程组(18-21)和(18-22)是非线性的。求解这样的非线性微分方程组，一般都只好采用逐步求近法。这里将介绍我国力学工作者常用的一种逐步求近法，即所谓摄动法或小参数法。

在摄动法中，我们首先使微分方程和边界条件量纲为一化，即，使其中的各个量都成为量纲为一的，然后选择一个量纲为一的量作为所谓摄动参数，并将微分方程和边界条件中的各个量展为这个参数的幂级数。当这个参数很微小时，可以在微分方程和边界条件中略去高次的微小项而使其线性化。这样得出的解答是第一次近似解。然后，命这个参数逐步摄动，也就是逐步增大。每摄动一步时，都略去更高次的微小项而得出进一步的近似解。逐步摄动，就得出精度逐步提高的近似解。

作为薄板大挠度弯曲问题中的摄动参数，可以选择最大挠度 w_0 与薄板厚度 δ 的比值，或者选择最大荷载集度与弹性模量的比值。当上述任何一个比值很微小时，都得到薄板的小挠度弯曲问题，所以得出的第一次近似解就是小挠度理论给出的解答。

以半径为 a 的固定边圆板受均布荷载 q_0 时的问题为例。这时，方程(18-21)中的 q 成为常量 q_0 。将该方程的两边同乘以 ρ ，对 ρ 积分一次，然后除以 ρ ，得

$$D \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dw}{d\rho} \right) \right] - F_{\tau\rho} \frac{dw}{d\rho} = \frac{q_0}{2} \rho + \frac{C}{\rho}, \quad (\text{a})$$

其中 C 是任意常数。按照(13-29)中的第四式，在轴对称问题中，

$$F_{\tau\rho} = -D \frac{d}{d\rho} \nabla^2 w = -D \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dw}{d\rho} \right) \right].$$

因此，式(a)也可以改写成为

$$-F_{\tau\rho} - F_{\tau\rho} \frac{dw}{d\rho} = \frac{q_0}{2} \rho + \frac{C}{\rho}.$$

由于轴对称，在圆板的中心($\rho=0$)， $\frac{dw}{d\rho}$ 和 $F_{\tau\rho}$ 都应当等于零，可见有 $C=0$ 。代入式(a)，并将左边的第一项展开，即得

$$D \left(\frac{d^3 w}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dw}{d\rho} \right) - F_{\tau\rho} \frac{dw}{d\rho} = \frac{q_0}{2} \rho. \quad (18-24)$$

引用量纲一的数量

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{q_0 a^4}{E \delta^4} (1 - \mu^2), & \eta &= 1 - \frac{\rho^2}{a^2}, \\ S &= \frac{F_{1\rho} a^2}{E \delta^3}, & W &= \frac{w}{\delta}, \end{aligned} \right\} \quad (18-25)$$

则方程(18-24)及(18-22)分别成为

$$-\frac{d^2}{d\eta^2} \left[(1 - \eta) \frac{dW}{d\eta} \right] = \frac{3}{4} P - 3(1 - \mu^2) S \frac{dW}{d\eta}, \quad (18-26)$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} [(1 - \eta) S] + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\eta} \right)^2 = 0, \quad (18-27)$$

其中 P 是常数, W 及 S 则是 η 的函数。

在这里, 边界条件是

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad \left(\frac{dw}{d\rho} \right)_{\rho=a} = 0, \quad (u_\rho)_{\rho=a} = 0, \quad (b)$$

其中的第三式可以变换为(18-23)式, 即

$$\left[\rho \frac{dF_{1\rho}}{d\rho} + (1 - \mu) F_{1\rho} \right]_{\rho=a} = 0. \quad (c)$$

将(b)中的前二式及式(c)改用量纲一的数量表示, 即得

$$\left. \begin{aligned} (W)_{\eta=0} &= 0, & \left(\frac{dW}{d\eta} \right)_{\eta=0} &= 0, \\ \left[2(1 - \eta) \frac{dS}{d\eta} - (1 - \mu) S \right]_{\eta=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

现在, 引用摄动参数

$$W_m = (W)_{\eta=1} = \left(\frac{w}{\delta} \right)_{\rho=0} = \frac{w_0}{\delta},$$

其中 w_0 为薄板中心的挠度, 即最大挠度, 则显然可见

$$P = P(W_m), \quad W = W(W_m, \eta), \quad S = S(W_m, \eta).$$

于是可将 P 、 W 、 S 表示成为 W_m 的幂级数:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{16} P &= \alpha_1 W_m + \alpha_3 W_m^3 + \alpha_5 W_m^5 + \dots, \\ W &= \omega_1(\eta) W_m + \omega_3(\eta) W_m^3 + \omega_5(\eta) W_m^5 + \dots, \\ S &= f_2(\eta) W_m^2 + f_4(\eta) W_m^4 + f_6(\eta) W_m^6 + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

在这里, 引用因子 $3/16$, 只是为了下面的数字可以简单一些, 在 P 和 W 的展开式中没有列入 W_m 的偶次幂项, 在 S 的展开式中没有列入 W_m 的奇次幂项, 因为这些项在具体计算中可见其将被消去。

用来求解 α_1 和 ω_1 的微分方程, 可由(18-26)中 W_m 的一次幂项的系数得来:

$$-\frac{1}{4} \frac{d^2}{d\eta^2} \left[(1-\eta) \frac{d\omega_1}{d\eta} \right] = \alpha_1, \quad (f)$$

它应当满足条件

$$\begin{aligned} (\omega_1)_{\eta=0} &= 0, & \left(\frac{d\omega_1}{d\eta} \right)_{\eta=0} &= 0, \\ (\omega_1)_{\eta=1} &= 1, & \left(\frac{d\omega_1}{d\eta} \right)_{\eta=1} &\neq \infty. \end{aligned} \quad (g)$$

微分方程(f)在条件(g)下的解答是

$$\omega_1(\eta) = \eta^2, \quad \alpha_1 = 1. \quad (h)$$

读者试证, 这也就是小挠度弯曲理论给出的解答。

用来求解 f_2 的微分方程, 可由(18-27)中 W_m 的二次幂项的系数得来:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} [(1-\eta)f_2] + \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega_1}{d\eta} \right)^2 = 0.$$

将(h)中的第一式代入, 得

$$\frac{d^2}{d\eta^2} [(1-\eta)f_2] = -2\eta^2. \quad (i)$$

这一微分方程所应满足的条件, 可在式(d)的第三式中取 W_m^2 的系数而得到:

$$\left[2 \frac{df_2}{d\eta} - (1-\mu)f_2 \right]_{\eta=0} = 0.$$

再结合由(S) $_{\eta=1} \neq \infty$ 得来的条件

$$(f_2)_{\eta=1} \neq \infty,$$

可得出微分方程(i)的解答为

$$f_2(\eta) = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{1-\mu} + \eta + \eta^2 + \eta^3 \right). \quad (j)$$

进行与上相似的计算, 可以进一步求得 α_3 及 ω_3 为

$$\alpha_3 = \frac{1}{360} (1+\mu) (173 - 73\mu), \quad (k)$$

$$\omega_3(\eta) = \frac{1}{360} (1-\mu^2) \eta^2 (1-\eta) \left(\frac{83-43\mu}{1-\mu} + 23\eta + 8\eta^2 + 2\eta^3 \right). \quad (l)$$

假定计算到此为止。将求得的 α_1 、 ω_1 、 f_2 、 α_3 、 ω_3 代入式(e), 再将(18-25)式代入, 即得用 w_0 表示 q_0 的表达式和用 w_0 及 ρ 表示 w 及 F_{T_p} 的表达式, 并从(18-20)式得出用 w_0 及 ρ 表示 F_{T_p} 的表达式, 用来分析薄板的位移、形变和应力。这里将只给出用 w_0 表示 q_0 的表达式如下:

$$\frac{3(1-\mu^2)q_0a^4}{16E\delta^4} = \frac{w_0}{\delta} + \frac{(1+\mu)(173-73\mu)}{360} \left(\frac{w_0}{\delta} \right)^3. \quad (m)$$

由这一方程可以求得最大挠度 w_0 。

为了便于和小挠度理论给出的结果进行对比, 试在式(m)中取 $\mu = 0.3$, 然后将该式写成

$$w_0 = \frac{q_0 a^4}{64D \left(1 + 0.544 \frac{w_0^2}{\delta^2} \right)}$$

上式右边括号内的因子表示中面应变对挠度的影响。由于这个影响, 挠度不再和荷载 q_0 成正比(不同于小挠度理论给出的解答)。当 $w_0 = \delta/2$ 时, 由上式得到

$$w_0 = 0.88 \frac{q_0 a^4}{64D},$$

比小挠度理论给出的 $q_0 a^4/64D$ 小了 12%。当 $w_0 = \delta/5$ 时, 由上式得出 $w_0 = 0.98 q_0 a^4/64D$, 比小挠度理论给出的解答只小 2%, 两者之差可以不计。

§ 18-6 用变分法解圆板的轴对称问题

首先导出形变势能的表达式, 以使用变分法求解。大挠度形变势能 U , 将包括相应于弯曲形变的势能 V_{e1} , 和相应于中面应变的势能 V_{e2} :

$$V_e = V_{e1} + V_{e2} \quad (18-28)$$

相应于弯曲形变的势能, 可由公式(14-28)得来:

$$V_{e1} = \pi D \int \left[\rho \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 + 2\mu \frac{dw}{d\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right] d\rho \quad (18-29)$$

当边界为夹支边时, 可由公式(14-30)得来:

$$V_{e1} = \pi D \int \left[\rho \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right] d\rho \quad (18-30)$$

相应于中面应变的势能, 可以用平面应力和中面应变表示成为

$$V_{e2} = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_\rho \varepsilon_\rho + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \tau_{\rho\varphi} \gamma_{\rho\varphi}) \rho d\rho d\varphi dz$$

注意平面应力和中面应变都只是 ρ 和 φ 的函数, 则上式可简化为

$$V_{e2} = \frac{\delta}{2} \iint (\sigma_\rho \varepsilon_\rho + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \tau_{\rho\varphi} \gamma_{\rho\varphi}) \rho d\rho d\varphi$$

在轴对称问题中, $\tau_{\rho\varphi} = \gamma_{\rho\varphi} = 0$, 而且 σ_ρ 、 σ_φ 、 ε_ρ 、 ε_φ 都只是 ρ 的函数, 所以上式可以再度简化为

$$V_{e2} = \frac{\delta}{2} \int (\sigma_\rho \varepsilon_\rho + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi) \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \pi \delta \int (\sigma_\rho \varepsilon_\rho + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi) \rho d\rho。$$

利用物理方程，上式可以单用形变分量表示成为

$$V_{\varepsilon_2} = \frac{\pi E \delta}{1 - \mu^2} \int (\varepsilon_\rho^2 + \varepsilon_\varphi^2 + 2\mu \varepsilon_\rho \varepsilon_\varphi) \rho d\rho。$$

再将 § 18-4 中的几何方程 (c) 及 (d) 代入，即得

$$V_{\varepsilon_2} = \frac{\pi E \delta}{1 - \mu^2} \int \left\{ \left[\frac{du_\rho}{d\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right]^2 + \frac{u_\rho^2}{\rho^2} + 2\mu \frac{u_\rho}{\rho} \left[\frac{du_\rho}{d\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right] \right\} \rho d\rho。 \quad (18-31)$$

应用里茨法。因为在轴对称问题中没有环向位移 u_φ ，所以只须把中面内各点的位移取为

$$u_\rho = \sum_m A_m (u_\rho)_m, \quad w = \sum_m C_m w_m, \quad (18-32)$$

其中 $(u_\rho)_m$ 及 w_m 只是 ρ 的函数，它们须满足位移边界条件。决定系数 A_m 及 C_m 的方程，可由 (11-15) 式及 (14-29) 式得来：

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial A_m} = 0, \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial C_m} = 2\pi \int q w_m \rho d\rho。 \quad (18-33)$$

仍然以固定边圆板受均布荷载 q_0 时的问题为例。把径向位移及轴向位移的表达式取为

$$u_\rho = \left(1 - \frac{\rho}{a} \right) \frac{\rho}{a} \left(A_0 + A_1 \frac{\rho}{a} + A_2 \frac{\rho^2}{a^2} + \dots \right), \quad (a)$$

$$w = \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2 \left[C_0 + C_1 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) + C_2 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2 + \dots \right], \quad (b)$$

可以满足位移边界条件

$$(u_\rho)_{\rho=a} = 0, \quad (w)_{\rho=a} = 0, \quad \left(\frac{dw}{d\rho} \right)_{\rho=a} = 0,$$

也可以满足轴对称条件

$$(u_\rho)_{\rho=0} = 0, \quad \left(\frac{dw}{d\rho} \right)_{\rho=0} = 0。$$

现在，假定在式 (a) 中只取两个待定系数，在式 (b) 中只取一个待定系数，即

$$u_\rho = \left(A_0 + A_1 \frac{\rho}{a} \right) \left(1 - \frac{\rho}{a} \right) \frac{\rho}{a}, \quad (c)$$

$$w = C_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2。 \quad (d)$$

将式(d)代入(18-30)式, 对 ρ 积分, 从 0 到 a , 得

$$V_{e1} = \frac{32\pi D}{3a^2} C_0^2; \quad (e)$$

将式(c)及式(d)代入(18-31)式, 进行同样的积分, 得

$$V_{e2} = \frac{\pi E \delta}{1-\mu^2} \left(0.250A_0^2 + 0.1167A_1^2 + 0.300A_0A_1 - 0.0677 \frac{A_0 C_0^2}{a} + 0.0546 \frac{A_1 C_0^2}{a} + 0.305 \frac{C_0^4}{a^2} \right). \quad (f)$$

此外并得

$$2\pi \int q w_m \rho d\rho = 2\pi q_0 \int_0^a \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2 \rho d\rho = \frac{\pi}{3} q_0 a^2. \quad (g)$$

按照(18-33)式及(18-28)式, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial A_0} (V_{e1} + V_{e2}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial A_1} (V_{e1} + V_{e2}) = 0, \quad (h)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_0} (V_{e1} + V_{e2}) = 2\pi \int q w_m \rho d\rho. \quad (i)$$

将式(e)及式(f)代入式(h), 得

$$\frac{\pi E \delta}{1-\mu^2} \left(0.500A_0 + 0.300A_1 - 0.0677 \frac{C_0^2}{a} \right) = 0,$$

$$\frac{\pi E \delta}{1-\mu^2} \left(0.233A_1 + 0.300A_0 + 0.0546 \frac{C_0^2}{a} \right) = 0.$$

将 A_0 及 A_1 用 C_0 表示, 得

$$A_0 = 1.206 \frac{C_0^2}{a}, \quad A_1 = -1.785 \frac{C_0^2}{a}. \quad (j)$$

另一方面, 将(e)、(f)、(g)三式代入式(i), 得

$$\frac{64\pi D}{3a^2} C_0 + \frac{\pi E \delta}{1-\mu^2} \left(-0.1354 \frac{A_0 C_0}{a} + 0.1091 \frac{A_1 C_0}{a} + 1.222 \frac{C_0^3}{a^2} \right) = \frac{\pi}{3} q_0 a^2.$$

再将式(j)代入, 注意 $E\delta/(1-\mu^2) = 12D/\delta^2$, 即得

$$C_0 + \frac{0.486}{\delta^2} C_0^3 = \frac{q_0 a^4}{64D}. \quad (k)$$

由此解出 C_0 , 然后由式(j)求出 A_0 及 A_1 , 即可由式(c)及(d)求得中面位移, 从而求得内力。

注意 C_0 也就是薄板中心的挠度 w_0 , 可将式(k)改写为

$$w_0 + \frac{0.486}{\delta^2} w_0^3 = \frac{q_0 a^4}{64D},$$

或

$$w_0 = \frac{q_0 a^4}{64D} \frac{1}{1 + 0.486 \left(\frac{w_0}{\delta} \right)^2}$$

当 $w_0 = \delta/2$ 时, 由上式得到

$$w_0 = 0.89 \frac{q_0 a^4}{64D},$$

比小挠度理论给出的 $q_0 a^4/64D$ 小了 11%。这里得出的结果, 和上一节中用摄动法求得的结果很相近, 但计算工作量却省了很多。

习 题

18-1 试导出正交各向异性板的大挠度微分方程组:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \delta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + q,$$

$$\frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\mu_1}{E_1} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

18-2 试导出与微分方程(18-5)及(18-6)相应的差分方程, 然后用来求解图 18-6 所示薄板受均布横向荷载 q_0 时的大挠度弯曲问题。假定全部边界不受纵向约束。用 3×3 的网格。首先假设 $\Phi_a = 0$, 求出 w_a 的值, 然后求出 Φ_a , 再求出 w_a 的修正值。

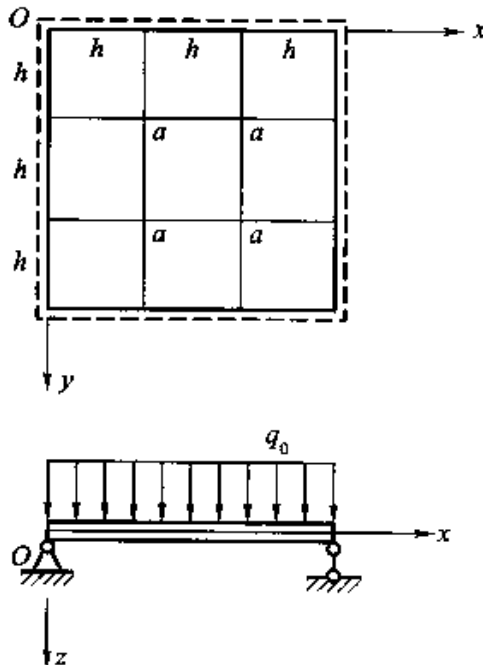


图 18-6

答案: $w_a = \frac{q_0 h^4}{4D} \left[1 - \frac{675}{1024} (1 - \mu^2) \left(\frac{q_0 h^4}{4D\delta} \right)^2 \right]$

18-3 对于 § 18-2 中的例题, 试由已有的成果导出最大应力的表达式。

$$\text{答案: } (\sigma_r)_{\max} = \frac{n^2 E \delta^2}{3(1-\mu^2)a^2} + \frac{3q_0 a^2}{2n^2 \delta^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh n}\right)$$

18-4 试证明: 在习题 18-3 中命 n 趋于零, 就得出将一边的铰支座改为连杆支座后的解答, 亦即材料力学中对于普通简支梁的解答

18-5 设图 18-2 中的无限长薄板具有固定边, 仍然受均布荷载 q_0 , 试导出挠度 w 的表达式。

$$\text{答案: } w = \frac{q_0 a^4}{16n^4 D} \frac{n}{\tanh n} \left[\frac{\cosh n \left(1 - \frac{2x}{a}\right)}{\cosh n} - 1 \right] + \frac{q_0 a^2}{8n^2 D} (a-x)x$$

18-6 试对 § 18-5 中的例题进行具体运算, 定出 α_3 及 $\omega_3(\eta)$ 。

参 考 教 材

- [1] 铁木辛柯, 沃诺斯基著. 板壳理论[M]. 《板壳理论》翻译组译. 北京: 科学出版社, 1977; 第一章及第十三章.
- [2] 钱伟长著. 轴对称圆薄板在大挠度情形下的一般理论[J]. 北京: 中国科学院, 1954; 弹性圆薄板大挠度问题.
- [3] 钱伟长著. 圆薄板大挠度理论的摄动法[J]. 北京: 中国科学院, 1954; 弹性圆薄板大挠度问题.

第十九章 壳体的一般理论

§ 19-1 曲线坐标与正交曲线坐标

要建立完整的壳体一般理论，须借助于弹性力学空间问题在一般正交曲线坐标中的几何方程。因此，首先来简单介绍一般曲线坐标的概念。

设直角坐标 x, y, z 与参数 α, β, γ 有函数关系

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(\alpha, \beta, \gamma), \\ y &= f_2(\alpha, \beta, \gamma), \\ z &= f_3(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

则一组 α, β, γ 值对应于一组 x, y, z 值，从而对应于空间一点 P ，因而可以作为 P 点的位置坐标。如果在式(a)中把 α 取为某一常数，而将 β 及 γ 作为变数，就得到 $x = f_1(\beta, \gamma)$ 、 $y = f_2(\beta, \gamma)$ 、 $z = f_3(\beta, \gamma)$ 所代表的一个曲面。当参数 α 取一系列的常数值时，就得到以不同的 α 值表示的一族曲面。同样，当 β 或者 γ 分别取一系列的常数值时，也将得到以不同的 β 值或者不同的 γ 值表示的一族曲面。假定 α, β, γ 与 x, y, z 在弹性体的某一区域内互为单值，则上述每族曲面中必有而且只有一个曲面通过该区域内的任意一点 P 。这三个曲面分别称为 P 点的 α 面、 β 面、 γ 面，如图 19-1 中所示。

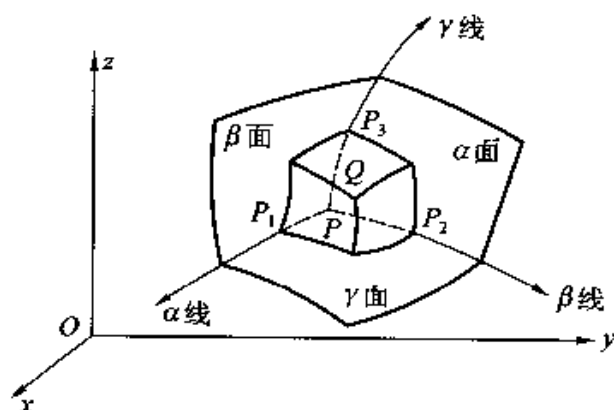


图 19-1

在 β 面与 γ 面相交的曲线上， β 及 γ 均为常数，而只有 α 是变数。同样，在 γ 面与 α 面或者 α 面与 β 面相交的曲线上，只有 β 或者 γ 是变数。在 P 点的

这三根曲线，分别称为该点的 α 线、 β 线及 γ 线，如图 19 - 1 中所示。

当坐标 α 改变 $d\alpha$ 而 β 及 γ 保持不变时，新坐标 $(\alpha + d\alpha, \beta, \gamma)$ 所对应的一点 P_1 ，将与 (α, β, γ) 所对应的 P 点位于同一根 α 线上。用 ds_1 代表弧长 \widehat{PP}_1 ，则

$$\begin{aligned} ds_1 &= (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\alpha. \end{aligned}$$

命 $ds_1 = H_1 d\alpha$ ，则

$$H_1 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

它的几何意义是：当 α 坐标改变时， α 线的弧长增量与 α 坐标的增量这两者之间的比值，它称为 α 方向的拉梅系数。同样，再在 β 方向和 γ 方向用 ds_2 及 ds_3 分别代表弧长 \widehat{PP}_2 及 \widehat{PP}_3 ，总共可以得到三个关系式

$$ds_1 = H_1 d\alpha, \quad ds_2 = H_2 d\beta, \quad ds_3 = H_3 d\gamma, \quad (19-1)$$

其中的拉梅系数是

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ H_2 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ H_3 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (19-2)$$

它们分别表示当每个曲线坐标单独改变时，该坐标线的弧长增量与该坐标的增量这两者之间的比值。

在以后，我们将只采用正交曲线坐标，即坐标线互相正交（坐标面也就互相正交）的曲线坐标。可以证明，在正交曲线坐标中，三个拉梅系数 H_1 、 H_2 、 H_3 ，作为 α 、 β 、 γ 的函数，具有如下的六个关系：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right) &= 0, \\ \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_3}{\partial \beta} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} \right) &= 0, \\ \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \beta \partial \gamma} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} \frac{\partial H_3}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial \gamma \partial \alpha} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} &= 0, \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \beta} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19-4)$$

关于这些关系式的推导，可以在某些高等数学教程中找到，也可以在个别的弹性力学教程中找到，例如见：В. В. Новожилов 所著的 Теория упругости，第 160 至 164 页。

§ 19-2 正交曲线坐标中的弹性力学几何方程

在空间正交曲线坐标中，弹性体内任意一点 P 的位移在 α 、 β 、 γ 三个坐标方向的分量，分别用 u_1 、 u_2 、 u_3 表示，沿坐标方向的线应变用 e_1 、 e_2 、 e_3 表示，切应变用 e_{23} 、 e_{31} 、 e_{12} 表示。

为了建立形变与位移之间的关系，从而导出几何方程，我们在任意一点 P 处取一个微小的六面体，它的所有各棱边都沿着坐标线 α 、 β 、 γ 的方向，而以 PQ 为其对顶线，图 19-2。命 P 点的曲线坐标为 α 、 β 、 γ ， Q 点的坐标为 $\alpha + d\alpha$ 、 $\beta + d\beta$ 、 $\gamma + d\gamma$ 。

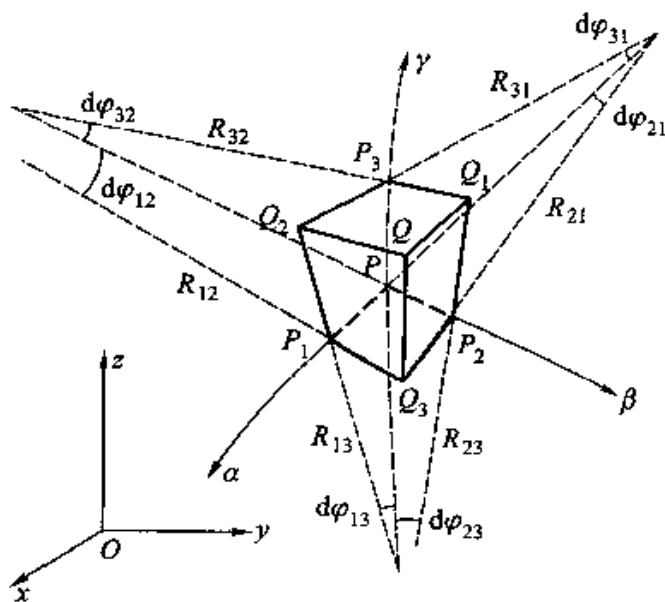


图 19-2

首先求出六面体上通过 P 点的各棱边的曲率半径, 用该点的拉梅系数来表示。棱边 PP_3 与 P_1Q_2 的交角为

$$d\varphi_{13} = \frac{P_3Q_2 - PP_1}{PP_3} = \frac{\left(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} d\gamma\right) d\alpha - H_1 d\alpha}{H_3 d\gamma} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} d\alpha, \quad (a)$$

可见 PP_1 在 $\alpha\gamma$ 面内(即 β 面内)的曲率及曲率半径为

$$k_{13} = \frac{d\varphi_{13}}{H_1 d\alpha} = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma}, \quad R_{13} = \frac{1}{k_{13}}. \quad (b)$$

同样可见 PP_1 在 $\alpha\beta$ 面内(即 γ 面内)的曲率及曲率半径为

$$k_{12} = \frac{d\varphi_{12}}{H_1 d\alpha} = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta}, \quad R_{12} = \frac{1}{k_{12}}. \quad (c)$$

总共可以得出 PP_1 、 PP_2 、 PP_3 三个棱边在不同坐标面内的六个曲率如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{12}} = k_{12} &= \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta}, & \frac{1}{R_{13}} = k_{13} &= \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma}, \\ \frac{1}{R_{23}} = k_{23} &= \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma}, & \frac{1}{R_{21}} = k_{21} &= \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha}, \\ \frac{1}{R_{31}} = k_{31} &= \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha}, & \frac{1}{R_{32}} = k_{32} &= \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \beta} \end{aligned} \right\} \quad (19-5)$$

现在就可以把形变分量用位移分量来表示。首先考虑线应变, 以 PP_1 的线应变 e_1 为例。由于 u_1 、 PP_1 的线应变为

$$e'_1 = \frac{\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial s_1} ds_1\right) - u_1}{ds_1} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha};$$

由于 u_2 、 PP_1 的线应变为

$$e''_1 = \frac{(R_{12} + u_2) d\varphi_{13} - R_{12} d\varphi_{12}}{R_{12} d\varphi_{12}} = \frac{u_2}{R_{12}};$$

由于 u_3 、 PP_1 的线应变为

$$e'''_1 = \frac{(R_{13} + u_3) d\varphi_{13} - R_{13} d\varphi_{13}}{R_{13} d\varphi_{13}} = \frac{u_3}{R_{13}}.$$

所以 PP_1 的线应变总共是

$$e_1 = e'_1 + e''_1 + e'''_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_2}{R_{12}} + \frac{u_3}{R_{13}}.$$

将(19-5)式中的 $1/R_{12}$ 及 $1/R_{13}$ 代入, 即得

$$e_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} u_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} u_3. \quad (d)$$

其次来考虑切应变, 以直角 $\angle P_1 PP_2$ 的切应变 e_{12} 为例。此项切应变系由

PP_1 及 PP_2 在 $\alpha\beta$ 面内相向的转角相加而成。由于 u_2 , PP_1 在 $\alpha\beta$ 面内向 PP_2 的转角为

$$\frac{\left(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial s_1} ds_1\right) - u_2}{ds_1} = \frac{\partial u_2}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha};$$

由于 u_1 , PP_1 离 PP_2 的转角为 u_1/R_{12} , 也就是 PP_1 向 PP_2 转动 $-u_1/R_{12}$, 于是 PP_1 向 PP_2 的转角总共是

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - \frac{u_1}{R_{12}}.$$

同样可得 PP_2 向 PP_1 的转角为

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} - \frac{u_2}{R_{21}}.$$

将以上两项相加, 得

$$e_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - \frac{u_1}{R_{12}} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} - \frac{u_2}{R_{21}}.$$

将(19-5)式中的 $1/R_{12}$ 及 $1/R_{21}$ 代入, 即得

$$\begin{aligned} e_{12} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} u_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} - \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u_2 \\ &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_1}{H_1} \right). \end{aligned} \quad (e)$$

在式(d)及式(e)中将角码 1、2、3 轮换, 同时将坐标 α 、 β 、 γ 轮换, 总共得出用位移分量表示形变分量的六个表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} u_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} u_3, \\ e_2 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_3 + \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u_1, \\ e_3 &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} u_1 + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \beta} u_2, \\ e_{23} &= \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_3}{H_3} \right) + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_2}{H_2} \right), \\ e_{31} &= \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_3}{H_3} \right), \\ e_{12} &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_1}{H_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (19-6)$$

这就是正交曲线坐标中的弹性力学几何方程。

§ 19-3 关于壳体的一些概念

两个曲面所限定的物体，如果曲面之间的距离比物体的其他尺寸为小，就称为壳体。这两个曲面就称为壳面。距两壳面等远的点所形成的曲面，称为中间曲面，简称为中面。中面的法线被两壳面截断的长度，称为壳体的厚度。壳体可能是等厚度的或者是变厚度的。本教程中将限于讨论等厚度壳体。

如果壳面是闭合曲面，壳体除了两个壳面以外不再其他的边界，这个壳体就称为闭合壳体。例如通常用为气体容器的壳体，就是闭合壳体。由闭合壳体用切割面分割出来的一部分，就称为开敞壳体。例如用为房屋顶盖或桥梁构件的壳体，就是开敞壳体。为了有可能对开敞壳体进行分析和计算，我们假定上述切割面是由一根直线保持与中面垂直、移动而形成的。这就是说，以后我们所讨论的开敞壳体，它的边缘（即所谓壳边）总是由垂直于中面的直线所构成的直纹曲面。

在壳体理论中，采用如下的计算假定：（1）垂直于中面方向的线应变可以不计。（2）中面的法线保持为直线，而且中面法线及其垂直线段之间的直角保持不变，也就是该二方向的切应变为零。（3）与中面平行的截面上的正应力（即挤压应力），远小于其垂直面上的正应力，因而它对形变的影响可以不计。（4）体力及面力均可化为作用于中面的荷载。

如果壳体的厚度 δ 远小于壳体中面的最小曲率半径 R ，因而比值 δ/R 是很小的数值，这个壳体就称为薄壳。反之，它就称为厚壳。对于薄壳，可以在壳体的基本方程和边界条件中略去某些很小的量（随着比值 δ/R 的减小而减小的量），使得这些基本方程可能在边界条件下求解，从而得到一些近似的、但在工程应用上已经足够精确的解答。根据大量的比较试算，当比值 δ/R 不超过 0.05 时，这些解答不致具有工程上不容许的误差。而在工程实际中，比值 δ/R 常在 0.02 以下。这就是“薄壳理论”之所以能够广泛应用的理由。至于厚壳的计算方法，虽然也有不少人在进行研究，但还不便应用于一般的工程实际问题。在目前，厚壳问题基本上还只能当做一般的空间问题来处理。

薄壳与同跨度、同材料的薄板相比，它能以小得多的厚度承受同样的荷载，就像曲拱与直梁相比时一样。因此，除了各种容器总是采用薄壳以外，在飞机和船舶工程中，以及在各种工业与民用建筑工程中，都常常考虑以薄壳代替薄板。此外，薄壳形式的闸门也早已被采用，薄壳形式的薄拱坝也有采用的可能。但必须指出：目前已经建成和正在修建或设计的拱坝，都不属于薄壳的范畴，不应作为薄壳来计算。作为薄壳计算时，所得的结果，确实也和实验量

测的结果相差很大。

§ 19-4 壳体的正交曲线坐标

通过壳体中面上的任意一点 M ，可以作一根垂直于中面的直线，即所谓中面法线。通过中面法线，可以作无数多的平面与中面相交，得出无数多的中面曲线。各曲线在 M 点的曲率一般并不相同（除非中面是圆球面）。在这些曲线中间有一根曲线，它的曲率最大，相应的曲率半径为最小；另有与它正交的一根曲线，它的曲率最小，相应的曲率半径为最大。沿着这两根曲线的方向，中面的扭率等于零。这两根曲线在 M 点的曲率称为中面在 M 点的主曲率，以后用 k_1 及 k_2 表示；相应的曲率半径称为中面在 M 点的主曲率半径，以后用 R_1 及 R_2 表示。当然 $k_1 = 1/R_1$ ， $k_2 = 1/R_2$ 。在 M 点的这两根曲线的切线方向，称为中面在 M 点的曲率主向。既然在中面上的任意一点都有两个互相正交的曲率主向，自然就可以在中面上作无数多这样的曲线，它们的切线方向总是沿着中面的曲率主向。这样的曲线称为中面的曲率线。

为壳体选择坐标时，为了得到最简单而普遍的基本方程和边界条件，我们把坐标线放在中面的曲率线和法线上；以中面的曲率线为 α 及 β 坐标线，以中面的法线为 γ 坐标线（指向中面的凸方），图 19-3。

壳体中面内任意一点 M 沿 α 及 β 方向的拉梅系数，以后将分别用 A 和 B 代表，即

$$(H_1)_{\gamma=0} = A, \quad (H_2)_{\gamma=0} = B. \quad (19-7)$$

于是在 M 点沿 α 和 β 方向的微分弧长 \overline{MM}_1 和 \overline{MM}_2 为

$$ds_1 = A d\alpha, \quad ds_2 = B d\beta. \quad (19-8)$$

在壳体内的任意一点 P （坐标为 α, β, γ ），设 α 方向的拉梅系数为 H_1 ，则通过 P 点的沿 α 方向的微分弧长为 $\overline{PP}_1 = H_1 d\alpha$ 。由图 19-3 可见有比例关系

$$\frac{\overline{PP}_1}{\overline{MM}_1} = \frac{R_1 + \gamma}{R_1},$$

其中 R_1 为中面在 M 点沿 α 方向的主曲率半径。将 $\overline{PP}_1 = H_1 d\alpha$ 及 $\overline{MM}_1 = A d\alpha$ 代

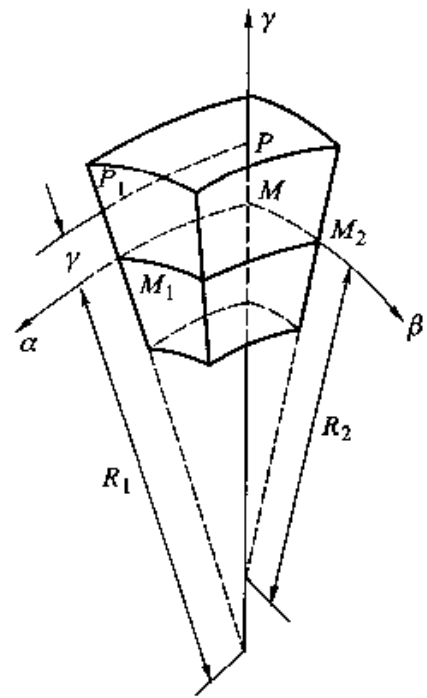


图 19-3

入上式，得

$$\frac{H_1}{A} = 1 + \frac{\gamma}{R_1} = 1 + k_1 \gamma,$$

其中 $k_1 = 1/R_1$ 为中面在 M 点沿 α 方向的主曲率。同样可得

$$\frac{H_2}{B} = 1 + \frac{\gamma}{R_2} = 1 + k_2 \gamma。$$

于是，壳体内任意一点 P 的拉梅系数，可用 α 及 β 坐标与该点相同的中面内一点 M 的拉梅系数表示为

$$H_1 = A(1 + k_1 \gamma), \quad H_2 = B(1 + k_2 \gamma)。 \quad (19-9)$$

此外，由于 γ 为直线坐标，而且这个坐标的量纲通常都取为长度 L ，所以在壳体内的任意一点都有

$$H_3 = 1。 \quad (19-10)$$

将(19-9)式及(19-10)式代入(19-3)式，注意 A 、 B 、 k_1 、 k_2 都只是 α 及 β 的函数，与 γ 无关，可见(19-3)中的前二式成为恒等式，而第三式在中面上($\gamma=0$)成为

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = -k_1 k_2 AB。 \quad (19-11)$$

同样可见，(19-4)中的第三式成为恒等式，而前二式在中面上($\gamma=0$)成为

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (k_1 A) = k_2 \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} (k_2 B) = k_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha}。 \quad (19-12)$$

方程(19-11)称为高斯条件，方程(19-12)称为科达齐条件，它们表示中面内的拉梅系数与主曲率之间的关系，可以用来简化运算。

在壳体理论中，我们并不以壳体内一般点的位移、形变、应力为讨论对象，而是以中面位移、中面形变、以及应力向中面简化而得来的内力作为讨论对象。在以下几节中，我们来建立中面形变与中面位移之间的关系，得出壳体的几何方程；建立中面形变与内力之间的关系，得出壳体的物理方程；建立内力与荷载之间的关系，得出壳体的平衡方程；最后再将壳体的边界条件用中面位移或内力来表示。

§ 19-5 壳体的几何方程

根据壳体理论中的第(1)个计算假定，采用 § 19-4 中所说的正交曲线坐标，我们有 $e_3 = 0$ 。按照(19-6)中的第三式，应用(19-10)式，得到

$$\frac{\partial u_3}{\partial \gamma} = 0。$$

命中面上各点在中面法线方向(即 γ 方向)的位移为 w , 以指向中面的凸方时为正, 则由上式对 γ 的积分得出

$$u_3 = u_3(\alpha, \beta) = w. \quad (\text{a})$$

这就是说, 壳体内各点沿中面法线方向的位移 u_3 , 不随 γ 而变, 可以由中面上的法向位移 w 统一地表示。

根据壳体理论中的第(2)个计算假定, 采用 § 19-4 中所说的正交曲线坐标, 我们有 $e_{31} = 0$ 及 $e_{23} = 0$ 。按照(19-6)中的第五式及第四式, 应用(19-9)式及(19-10)式并以 w 代替 u_3 , 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{u_1}{A(1+k_1\gamma)} \right] + \frac{1}{A^2(1+k_1\gamma)^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{u_2}{B(1+k_2\gamma)} \right] + \frac{1}{B^2(1+k_2\gamma)^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} &= 0. \end{aligned}$$

对 γ 进行积分, 从 0 到 γ , 注意 w 不随 γ 变化, 得到

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{u_1}{A(1+k_1\gamma)} \right]_0^\gamma - \left[\frac{1}{A^2 k_1 (1+k_1\gamma)} \right]_0^\gamma \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= 0, \\ \left[\frac{u_2}{B(1+k_2\gamma)} \right]_0^\gamma - \left[\frac{1}{B^2 k_2 (1+k_2\gamma)} \right]_0^\gamma \frac{\partial w}{\partial \beta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

命中面上各点沿 α 及 β 方向的位移分别为 u 及 v , 即

$$(u_1)_{\gamma=0} = u, \quad (u_2)_{\gamma=0} = v, \quad (\text{c})$$

则由式(b)得

$$\begin{aligned} \left[\frac{u_1}{A(1+k_1\gamma)} - \frac{u}{A} \right] - \left[\frac{1}{A^2 k_1 (1+k_1\gamma)} - \frac{1}{A^2 k_1} \right] \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= 0, \\ \left[\frac{u_2}{B(1+k_2\gamma)} - \frac{v}{B} \right] - \left[\frac{1}{B^2 k_2 (1+k_2\gamma)} - \frac{1}{B^2 k_2} \right] \frac{\partial w}{\partial \beta} &= 0. \end{aligned}$$

求解 u_1 及 u_2 , 简化以后, 与式(a)联立, 即得

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (1+k_1\gamma)u - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ u_2 &= (1+k_2\gamma)v - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ u_3 &= w. \end{aligned} \right\} \quad (19-13)$$

这一组方程是建立壳体位移状态的方程, 它们把壳体中所有各点的位移用中面位移 u 、 v 、 w 来表示。

现在, 将(19-9)式、(19-10)式及(19-13)式代入几何方程(19-6)中的第一式, 第二式及第六式, 得到

$$e_1 = \frac{1}{A(1+k_1\gamma)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1+k_1\gamma)u - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] + \frac{k_1}{1+k_1\gamma} w +$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \beta} [A(1+k_1\gamma)]}{AB(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)} \left[(1+k_2\gamma)v - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right], \quad (d)$$

$$e_2 = \frac{1}{B(1+k_2\gamma)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[(1+k_2\gamma)v - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] + \frac{k_2}{1+k_2\gamma} w + \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} [B(1+k_2\gamma)]}{AB(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)} \left[(1+k_1\gamma)u - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right], \quad (e)$$

$$e_{12} = \frac{B(1+k_2\gamma)}{A(1+k_1\gamma)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{(1+k_2\gamma)v - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}}{B(1+k_2\gamma)} + \frac{A(1+k_1\gamma)}{B(1+k_2\gamma)} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{(1+k_1\gamma)u - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}}{A(1+k_1\gamma)}, \quad (f)$$

它们把壳体中所有各点的应变用中面位移来表示。

在薄壳中,厚度 δ 与中面主曲率半径 R 的比值,即 $\delta/R_1 = k_1\delta$ 及 $\delta/R_2 = k_2\delta$, 与 1 相比是很小的数值。注意 γ 的最大绝对值是 $\delta/2$, 可见 $k_1\gamma$ 及 $k_2\gamma$ 的最大绝对值分别为 $k_1\delta/2$ 及 $k_2\delta/2$, 与 1 相比,更是很小的数值。因此, $1+k_1\gamma$ 及 $1+k_2\gamma$ 都可以用 1 来代替。这样, (d)、(e)、(f) 三式将简化为

$$e_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{v}{AB} + k_1 w + \gamma \left[-\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right],$$

$$e_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{u}{AB} + k_2 w + \gamma \left[-\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right],$$

$$e_{12} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + 2\gamma \left[-\frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right].$$

将上列三式简写为

$$e_1 = \varepsilon_1 + \chi_1 \gamma, \quad e_2 = \varepsilon_2 + \chi_2 \gamma, \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\chi_{12} \gamma \quad (19-14)$$

则其中的 ε_1 、 ε_2 、 ε_{12} 、 χ_1 、 χ_2 、 χ_{12} 分别为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right), \\ \chi_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ \chi_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ \chi_{12} &= -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (19-15)$$

现在来说明 ε_1 、 ε_2 、 ε_{12} 、 χ_1 、 χ_2 、 χ_{12} 的意义。由(19-14)式可得

$$(e_1)_{\gamma=0} = \varepsilon_1, \quad (e_2)_{\gamma=0} = \varepsilon_2, \quad (e_{12})_{\gamma=0} = \varepsilon_{12}$$

于是可见, ε_1 及 ε_2 分别为中面内各点沿 α 及 β 方向的线应变, 而 ε_{12} 为中面内各点沿 α 及 β 方向的切应变。另一方面, 由(19-14)式可见, $\chi_1\gamma$ 、 $\chi_2\gamma$ 、 $2\chi_{12}\gamma$ 为壳体内各点超出中面应变的那一部分应变。将这一部分应变与(13-6)式右边的 $\chi_x z$ 、 $\chi_y z$ 、 $2\chi_{xy} z$ 对比, 可见 χ_1 及 χ_2 为中面内各点的主曲率 k_1 及 k_2 的改变, χ_{12} 为中面内各点沿 α 及 β 方向的扭率的改变(也就是扭率, 因为中面沿 α 及 β 这两个曲率主向原来并没有扭率)。

当 ε_1 、 ε_2 、 ε_{12} 、 χ_1 、 χ_2 、 χ_{12} 为已知时(表示成为 α 及 β 的已知函数), 薄壳内所有各点的应变 e_1 、 e_2 、 e_{12} 即可由(19-14)式求得。由于其余三个应变, e_3 、 e_{23} 及 e_{31} , 按照计算假定都等于零, 这就使得整个薄壳的形变状态成为已知。因此, (19-15)式所示的六个中面形变可以完全确定薄壳的形变状态, 而表明中面形变与中面位移之间的关系的方程(19-15), 就是薄壳的几何方程。

有些作者, 例如文献[1]的作者符拉索夫, 为了可能稍微提高薄壳计算的精度, 在(d)、(e)、(f)三式中不是把 $1+k_1\gamma$ 和 $1+k_2\gamma$ 简单地用 1 来代替, 而是应用如下的展式:

$$\frac{1}{1+k_1\gamma} = 1 - k_1\gamma + (k_1\gamma)^2 - \dots,$$

$$\frac{1}{1+k_2\gamma} = 1 - k_2\gamma + (k_2\gamma)^2 - \dots。$$

代入(d)、(e)、(f)三式, 进行求导的运算, 最后略去 γ 的二次幂及更高次幂的各项, 仍然把运算结果写成(19-14)的形式, 则几何方程成为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right), \\ \chi_1 &= \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \beta} \frac{v}{B} - k_1^2 w - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ \chi_2 &= \frac{\partial k_2}{\partial \beta} \frac{v}{B} + \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} \frac{u}{A} - k_2^2 w - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ \chi_{12} &= \frac{k_1 - k_2}{2} \left[\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \right] - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right), \end{aligned} \right\} (19-16)$$

其中的前三式与(19-15)中的前三式相同。

还有一些作者, 例如文献[2]的作者科尔库诺夫, 对(d)、(e)、(f)三式进行与上稍有不同处理, 得出如下的几何方程:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, \\
 \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w, \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right), \\
 \chi_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_1 u \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - k_2 v \right), \\
 \chi_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - k_2 v \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_1 u \right), \\
 \chi_{12} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{B} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - k_2 v \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{A} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_1 u \right) \right],
 \end{aligned} \right\} (19-17)$$

其中的前三式也是与(19-15)及(19-16)中的前三式相同。

除了(19-15)、(19-16)、(19-17)以外, 还有其他作者给出的其他不同形式的几何方程。但是, 这些不同几何方程之间的差异, 只是由于对 $1+k_1\gamma$ 及 $1+k_2\gamma$ 的不同处理而引起的, 因此, 对于薄壳说来, 它们对计算结果引起的差异一般是不重要的。对于任何一种具体问题, 结合物理方程和平衡微分方程以后最容易在边界条件下求解的一组几何方程, 将是最好的一组(形式上最简单的一组未必是最好的一组, 但通常就是最好的一组)。

§ 19 - 6 壳体的内力及物理方程

在本节中, 我们把壳体横截面上的应力向中面简化, 得出壳体的内力, 并导出内力与中面形变之间的关系式, 即壳体的物理方程。

在 α 面上(在 α 为常量的横截面上), 作用于中面单位宽度上的拉压力用 F_{T1} 表示, 平错力用 F_{T12} 表示; 在 β 面上(在 β 为常量的横截面上), 相应的拉压力用 F_{T2} 表示; 平错力用 F_{T21} 表示。这四个内力称为中面内力或薄膜内力, 是薄膜横截面上可能存在的内力, 见图 19-4a。在 α 面上, 作用于单位宽度上的弯矩用 M_1 表示, 扭矩用 M_{12} 表示, 横向剪力用 F_{S1} 表示; 在 β 面上, 相应的弯矩用 M_2 表示, 扭矩用 M_{21} 表示, 横向剪力用 F_{S2} 表示。这六个内力称为平板内力或弯曲内力, 是薄板发生小挠度弯曲时所具有的内力, 见图 19-4b。

上述内力, 是中面单位宽度范围内的、横截面上的应力向中面简化以后的力或力矩。例如, 应力分量 σ_1 简化为拉压力 F_{T1} 和弯矩 M_1 , 其中拉压力 F_{T1} 为

$$F_{T1} = \frac{1}{B d\beta} \int_{\gamma=-\delta/2}^{\gamma=\delta/2} \sigma_1 (H_2 d\beta) (H_3 d\gamma)。$$

注意 B 及 $d\beta$ 都不随 γ 面变, 即可将上式改写为

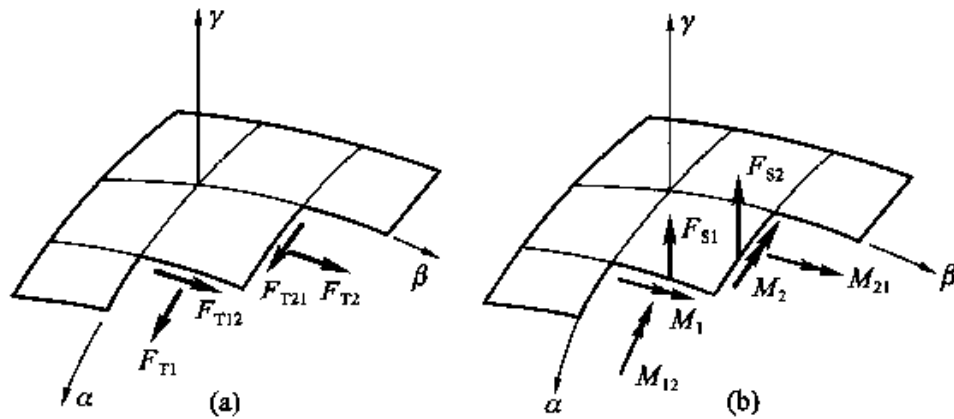


图 19-4

$$F_{T1} = \int_{\gamma=-\delta/2}^{\gamma=\delta/2} \frac{\sigma_1(H_2 d\beta)(H_3 d\gamma)}{B d\beta}。$$

注意 $H_3 = 1$ 而 $H_2 = B(1 + k_2\gamma)$ ，又可以将上式简写为

$$F_{T1} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_1(1 + k_2\gamma) d\gamma。$$

弯矩 M_1 则为

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{B d\beta} \int_{\gamma=-\delta/2}^{\gamma=\delta/2} \sigma_1(H_2 d\beta)(H_3 d\gamma)\gamma = \int_{\gamma=-\delta/2}^{\gamma=\delta/2} \frac{\sigma_1(H_2 d\beta)(H_3 d\gamma)\gamma}{B d\beta}。 \\ &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_1(1 + k_2\gamma)\gamma d\gamma \end{aligned}$$

其余类推。这样总共得出四个薄膜内力及六个平板内力：

$$\left. \begin{aligned} F_{T1} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_1(1 + k_2\gamma) d\gamma, \\ F_{T2} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_2(1 + k_1\gamma) d\gamma, \\ F_{T12} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{12}(1 + k_2\gamma) d\gamma, \\ F_{T21} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{21}(1 + k_1\gamma) d\gamma, \\ M_1 &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_1(1 + k_2\gamma)\gamma d\gamma, \\ M_2 &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_2(1 + k_1\gamma)\gamma d\gamma, \\ M_{12} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{12}(1 + k_2\gamma)\gamma d\gamma, \\ M_{21} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{21}(1 + k_1\gamma)\gamma d\gamma, \\ F_{S1} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{13}(1 + k_2\gamma) d\gamma, \\ F_{S2} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{23}(1 + k_1\gamma) d\gamma。 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

注意：虽然按照切应力的互等关系有 $\tau_{12} = \tau_{21}$ ，但平错力 F_{T12} 与 F_{T21} 一般并不互等，扭矩 M_{12} 与 M_{21} 一般也不互等，因为中面在 α 方向的主曲率 k_1 和它在 β 方向的主曲率 k_2 一般并不相同。

根据壳体理论的第(3)个计算假定，不计 σ_3 对形变的影响，可以得到和薄板弯曲问题中相同形式的物理方程

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(e_1 + \mu e_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(e_2 + \mu e_1), \quad \tau_{12} = G e_{12} = \frac{E}{2(1+\mu)} e_{12}。$$

将(19-14)式代入，得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} [(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) + (\chi_1 + \mu \chi_2) \gamma], \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} [(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) + (\chi_2 + \mu \chi_1) \gamma], \\ \tau_{12} &= \frac{E}{2(1+\mu)} (\varepsilon_{12} + 2\chi_{12} \gamma)。 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

于是式(a)中的前8个内力可用中面形变表示成为

$$\left. \begin{aligned} F_{T1} &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1+k_2\gamma) [(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) + (\chi_1 + \mu \chi_2) \gamma] d\gamma, \\ F_{T2} &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1+k_1\gamma) [(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) + (\chi_2 + \mu \chi_1) \gamma] d\gamma, \\ F_{T12} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1+k_2\gamma) (\varepsilon_{12} + 2\chi_{12} \gamma) d\gamma, \\ F_{T21} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1+k_1\gamma) (\varepsilon_{12} + 2\chi_{12} \gamma) d\gamma, \\ M_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1+k_2\gamma) [(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) + (\chi_1 + \mu \chi_2) \gamma] \gamma d\gamma, \\ M_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1+k_1\gamma) [(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) + (\chi_2 + \mu \chi_1) \gamma] \gamma d\gamma, \\ M_{12} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1+k_2\gamma) (\varepsilon_{12} + 2\chi_{12} \gamma) \gamma d\gamma, \\ M_{21} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1+k_1\gamma) (\varepsilon_{12} + 2\chi_{12} \gamma) \gamma d\gamma。 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

进行积分以后，得到

$$\left. \begin{aligned}
 F_{T1} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) + \frac{\delta^2}{12} k_2 (\chi_1 + \mu\chi_2) \right], \\
 F_{T2} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) + \frac{\delta^2}{12} k_1 (\chi_2 + \mu\chi_1) \right], \\
 F_{T12} &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \left(\varepsilon_{12} + \frac{\delta^2}{6} k_2 \chi_{12} \right), \\
 F_{T21} &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \left(\varepsilon_{12} + \frac{\delta^2}{6} k_1 \chi_{12} \right), \\
 M_1 &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left[(\chi_1 + \mu\chi_2) + k_2 (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) \right], \\
 M_2 &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left[(\chi_2 + \mu\chi_1) + k_1 (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) \right], \\
 M_{12} &= \frac{E\delta^3}{12(1+\mu)} \left(\chi_{12} + \frac{k_2}{2} \varepsilon_{12} \right), \\
 M_{21} &= \frac{E\delta^3}{12(1+\mu)} \left(\chi_{12} + \frac{k_1}{2} \varepsilon_{12} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (19-18)$$

这就是壳体的物理方程，它们表示内力与中面形变之间的关系。

对于薄壳，可将式(c)中的 $1+k_1\gamma$ 及 $1+k_2\gamma$ 用 1 来代替，也就是把其中的因子 $(1+k_1\gamma)$ 及 $(1+k_2\gamma)$ 删去。这样，在(19-18)式所示的积分结果中，将不出现具有因子 k_1 及 k_2 的各项。于是得出薄壳的物理方程如下：

$$\left. \begin{aligned}
 F_{T1} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), & F_{T2} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \\
 F_{T12} &= F_{T21} = \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \varepsilon_{12}, \\
 M_1 &= D(\chi_1 + \mu\chi_2), & M_2 &= D(\chi_2 + \mu\chi_1), \\
 M_{12} &= M_{21} = (1-\mu)D\chi_{12},
 \end{aligned} \right\} \quad (19-19)$$

其中 $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ 为薄壳的弯曲刚度。

对于薄壳，可以导出由内力直接求得主要应力的公式：试由(19-19)式中解出 $\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2$ 、 $\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1$ 、 ε_{12} 、 $\chi_1 + \mu\chi_2$ 、 $\chi_2 + \mu\chi_1$ 和 χ_{12} ，然后代入式(b)，并注意

$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ ，即得所需的公式

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{F_{T1}}{\delta} + \frac{12M_1}{\delta^3} \gamma, \\
 \sigma_2 &= \frac{F_{T2}}{\delta} + \frac{12M_2}{\delta^3} \gamma, \\
 \tau_{12} &= \tau_{21} = \frac{F_{T12}}{\delta} + \frac{12M_{12}}{\delta^3} \gamma_0
 \end{aligned} \right\} \quad (19-20)$$

由此可见,在薄壳中,薄膜内力 F_{T1} 、 F_{T2} 、 $F_{T12} = F_{T21}$ 引起的薄膜应力是沿厚度均匀分布,弯矩 M_1 、 M_2 及扭矩 $M_{12} = M_{21}$ 引起的弯扭应力是沿厚度按直线变化而在中面处为零。对于横向切应力(次要应力)的计算,则并无简单的公式可以应用,通常就套用薄板小挠度弯曲问题中的公式,即(13-14)中的第四式及第五式。这样就得到

$$\tau_{13} = \frac{6F_{S1}}{\delta^3} \left(\frac{\delta^2}{4} - \gamma^2 \right), \quad \tau_{23} = \frac{6F_{S2}}{\delta^3} \left(\frac{\delta^2}{4} - \gamma^2 \right)。$$

至于挤压应力 σ_3 , 则完全不必计算。

§ 19-7 壳体的平衡微分方程

现在来建立壳体的内力与壳体所受荷载之间的关系,也就是导出壳体的平衡方程。为此,试考虑任一微分壳体 $PP_1P_2P_3$ 的平衡,图 19-5。在图中,为简明起见,只画出这个微分体的中面,把薄膜内力和横向剪力画在一个图上,图 19-5a,而把弯矩和扭矩(用双箭头的矩矢表示)画在另一个图上,图 19-5b。图中的 q_1 、 q_2 、 q_3 , 乃是按照计算假定(4)得出的每单位中面面积范围内的荷载,包括体力 q_3 和面力 q_1 、 q_2 在内。

作为示例,试考虑各力在 $P\alpha$ 轴上的投影,从而建立平衡方程 $\Sigma F_\alpha = 0$ 。由于 F_{T1} , 在 PP_2 边上有投影 $F_{T1} B d\beta$, 沿 $P\alpha$ 的负向, 在 P_1P_3 边上有投影 $\left[F_{T1} B + \frac{\partial}{\partial \alpha} (F_{T1} B) d\alpha \right] d\beta$, 沿 $P\alpha$ 的正向, 结果得投影

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BF_{T1}) d\alpha d\beta。 \quad (a)$$

在这里和下面,都略去三阶及三阶以上的微量。由于 F_{T2} , 在 P_2P_3 边上的 $F_{T2} A d\alpha$ 有投影

$$\begin{aligned} -F_{T2} A d\alpha \sin d\varphi_{21} &= -F_{T2} A d\alpha d\varphi_{21} \\ &= -F_{T2} A d\alpha \frac{\left(B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta - B d\beta}{A d\alpha} = -\frac{\partial B}{\partial \alpha} F_{T2} d\alpha d\beta。 \end{aligned} \quad (b)$$

由于 F_{T12} , 在 P_1P_3 边上的 $F_{T12} B d\beta$ 有投影

$$\begin{aligned} F_{T12} B d\beta \sin d\varphi_{12} &= F_{T12} B d\beta d\varphi_{12} \\ &= F_{T12} B d\beta \frac{\left(A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha - A d\alpha}{B d\beta} = \frac{\partial A}{\partial \beta} F_{T12} d\alpha d\beta。 \end{aligned} \quad (c)$$

由于 F_{T21} , 在 PP_1 边上有投影 $F_{T21} A d\alpha$, 沿 $P\alpha$ 的负向, 在 P_2P_3 边上有投影

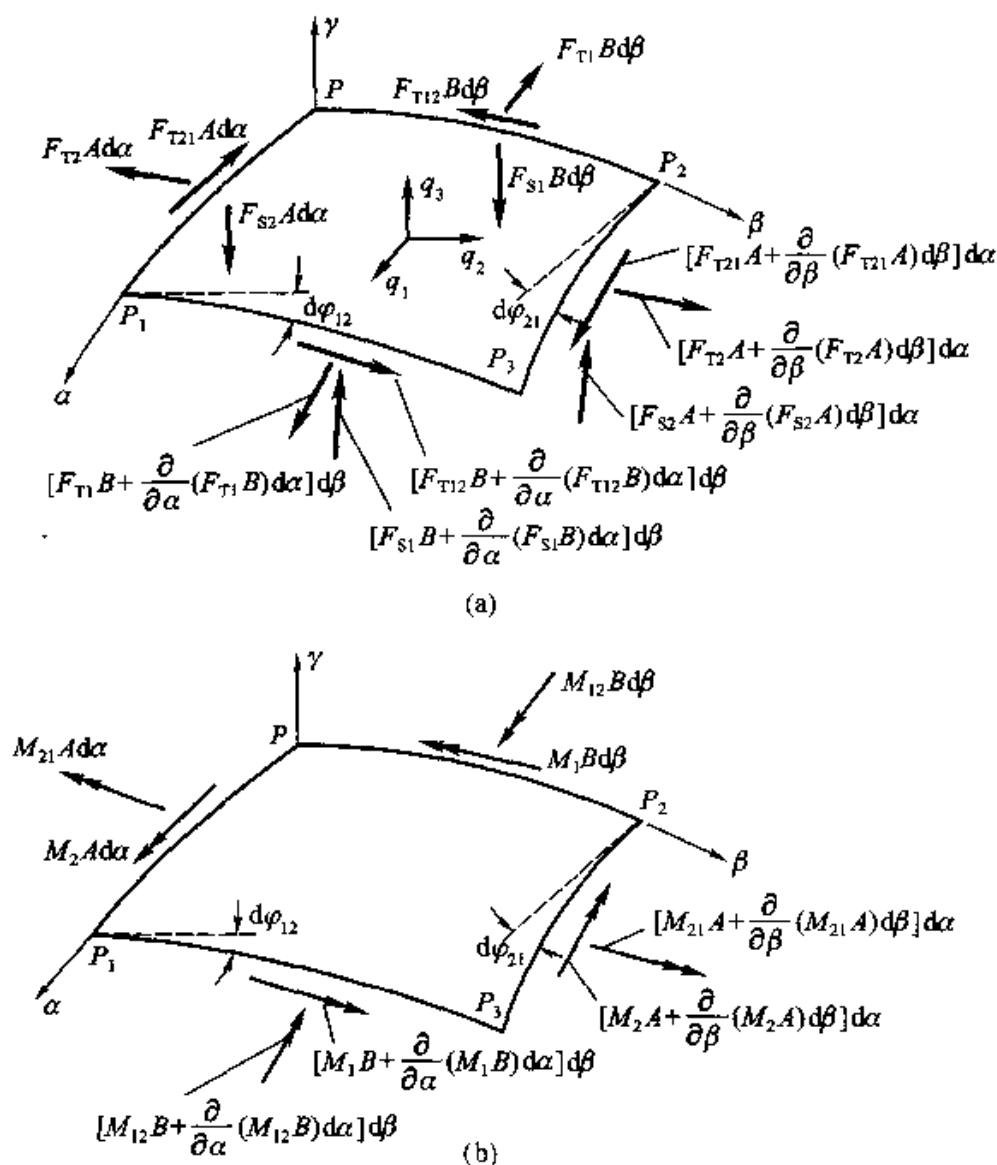


图 19-5

$[F_{T21}A + \frac{\partial}{\partial\beta}(F_{T21}A)d\beta]d\alpha$, 沿 $P\alpha$ 的正向, 结果得投影

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(AF_{T21})d\alpha d\beta. \quad (d)$$

由于 F_{S1} , 只是在 P_1P_3 边上的 $F_{S1}Bd\beta$ 有投影

$$F_{S1}Bd\beta \frac{Ad\alpha}{R_1} = ABk_1 F_{S1} d\alpha d\beta. \quad (e)$$

由于 F_{S2} , 只有三阶微量的投影, 因而略去不计。由于荷载, 有投影

$$q_1(A d\alpha)(B d\beta) = ABq_1 d\alpha d\beta. \quad (f)$$

将所有以上的各个投影(a)至(f)相加, 命总和等于零, 再除以 $d\alpha d\beta$, 即得相应于 $\Sigma F_\alpha = 0$ 的投影方程

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BF_{T1}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}F_{T2} + \frac{\partial A}{\partial \beta}F_{T12} + \frac{\partial}{\partial \beta}(AF_{T21}) + ABk_1F_{S1} + ABq_1 = 0. \quad (g)$$

同样可以得出相应于 $\sum F_x = 0$ 及 $\sum F_y = 0$ 的平衡方程。

将所有各力对 $P\alpha$ 、 $P\beta$ 、 $P\gamma$ 求矩，可得相应于 $\sum M_x = 0$ 、 $\sum M_y = 0$ 、 $\sum M_z = 0$ 的平衡方程。注意，在求矩时，不但要考虑图 19-5b 中的弯矩和扭矩，还须考虑图 19-5a 中各力的矩。

这样，总共得 6 个平衡方程如下：

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha}(BF_{T1}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}F_{T2} + \frac{\partial A}{\partial \beta}F_{T12} + \frac{\partial}{\partial \beta}(AF_{T21}) + \\ & \quad ABk_1F_{S1} + ABq_1 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \beta}(AF_{T2}) - \frac{\partial A}{\partial \beta}F_{T1} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}F_{T21} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BF_{T12}) + \\ & \quad ABk_2F_{S2} + ABq_2 = 0, \\ & -AB(k_1F_{T1} + k_2F_{T2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BF_{S1}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AF_{S2}) + ABq_3 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_{12}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_{21} - \frac{\partial A}{\partial \beta}M_1 + \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_2) - ABF_{S2} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_{21}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}M_{12} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_1) - ABF_{S1} = 0, \\ & F_{T12} - F_{T21} + k_1M_{12} - k_2M_{21} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19-21) \quad (h)$$

方程(19-21)就是壳体的平衡微分方程。至于非微分形式的方程(h)，如果按照物理方程(19-18)把 F_{T12} 、 F_{T21} 、 M_{12} 、 M_{21} 代入，可见其总能满足，因而不列为基本方程之一。

对于薄壳，可以按照物理方程(19-19)，用 F_{T12} 代替 F_{T21} ，用 M_{12} 代替 M_{21} ，于是平衡微分方程(19-21)简化为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha}(BF_{T1}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}F_{T2} + \frac{\partial A}{\partial \beta}F_{T12} + \frac{\partial}{\partial \beta}(AF_{T12}) + ABk_1F_{S1} + ABq_1 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \beta}(AF_{T2}) - \frac{\partial A}{\partial \beta}F_{T1} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}F_{T12} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BF_{T12}) + ABk_2F_{S2} + ABq_2 = 0, \\ & -AB(k_1F_{T1} + k_2F_{T2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BF_{S1}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AF_{S2}) + ABq_3 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_{12}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_{12} - \frac{\partial A}{\partial \beta}M_1 + \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_2) - ABF_{S2} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_{12}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}M_{12} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_1) - ABF_{S1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19-22)$$

现在，对于薄壳说来，基本方程只有 17 个：6 个几何方程(19-15)，或(19-16)，或(19-17)；6 个物理方程(19-19)；5 个平衡微分方程(19-

22)。这 17 个基本方程中包含 17 个未知函数：8 个内力 F_{T1} 、 F_{12} 、 $F_{112} = F_{T21}$ 、 M_1 、 M_2 、 $M_{12} = M_{21}$ 、 F_{S1} 、 F_{S2} ；6 个中面形变 ε_1 、 ε_2 、 ε_{12} 、 χ_1 、 χ_2 、 χ_{12} ；3 个中面位移 u 、 v 、 w 。各方程中的 A 、 B 、 k_1 、 k_2 则为 α 及 β 的已知函数。

§ 19 - 8 壳体的边界条件

壳体的边界分为壳面和壳边两种。在壳面上，壳体一般都不受任何约束，所以没有什么位移边界条件。另一方面，壳面上的面力是和体力一并归入荷载的，所以也没有什么应力边界条件。这就是说，壳面上没有任何边界条件，只须考虑壳边上的边界条件。

按照这样的理解，闭合壳体是没有边界条件的。但是，如果壳体在 α 或 β 方向是闭合的，则壳体中面上的 α 或 β 坐标线是闭合曲线，而中面上任意一点的位移、形变、内力都必须是单值的，所以位移、形变、内力都必须是坐标 α 或 β 的周期函数，而且函数的周期性应当恰能使得位移、形变、内力具有上述的单值性。这样，在闭合壳体中，边界条件就由周期性条件代替了。

我们假定壳体只具有垂直于 α 或 β 坐标线的壳边，如 § 19 - 3 中所述，因而在每一个边界上有 $\alpha = \alpha_0$ 或 $\beta = \beta_0$ ，其中 α_0 或 β_0 是常量（事实上，如果壳体具有与 α 或 β 坐标线斜交的边界，它的位移、形变、内力是很难求解的）。

先说明位移边界条件，以 $\alpha = \alpha_0$ 的边界为例。由于已经假定中面法线保持为直线而且没有伸缩 ($e_3 = 0$)，所以“中面法线与中面的交点的位移 u 、 v 、 w ”

和“中面法线绕 β 坐标线的转角 $\frac{\partial u_1}{\partial \gamma}$ ”完全确定这个边界在壳体变形以后的位置。于是，这个边界上的边界条件可以写做

$$\left. \begin{aligned} (u)_{\alpha=\alpha_0} &= f_1(\beta), & (v)_{\alpha=\alpha_0} &= f_2(\beta), \\ (w)_{\alpha=\alpha_0} &= f_3(\beta), & \left(\frac{\partial u_1}{\partial \gamma}\right)_{\alpha=\alpha_0} &= f_4(\beta), \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

其中 f_1 至 f_4 是 β 的已知函数。注意转角 $\frac{\partial u_1}{\partial \gamma}$ 可通过 (19 - 13) 中的第一式用中面位移表示为

$$\frac{\partial u_1}{\partial \gamma} = k_1 u - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha},$$

可见边界条件 (a) 可以用中面位移表示成为

$$\left. \begin{aligned} (u)_{\alpha=\alpha_0} &= f_1(\beta), & (v)_{\alpha=\alpha_0} &= f_2(\beta), \\ (w)_{\alpha=\alpha_0} &= f_3(\beta), & \left(k_1 u - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} &= f_4(\beta). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

对于受完全约束的边界，即所谓固定边，边界条件(b)简化为

$$\left. \begin{aligned} (u)_{\alpha=\alpha_0} &= 0, & (v)_{\alpha=\alpha_0} &= 0, \\ (w)_{\alpha=\alpha_0} &= 0, & \left(k_1 u - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

将(c)中的第一式代入第四式，则固定边的边界条件可以简写为

$$\left. \begin{aligned} (u)_{\alpha=\alpha_0} &= 0, & (v)_{\alpha=\alpha_0} &= 0, \\ (w)_{\alpha=\alpha_0} &= 0, & \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19-23)$$

同样可以得出 $\beta = \beta_0$ 的边界上的位移边界条件。为此，只须在上列各式中把 α 和 β 对调， u 和 v 对调， A 和 B 对调， k_1 和 k_2 对调。

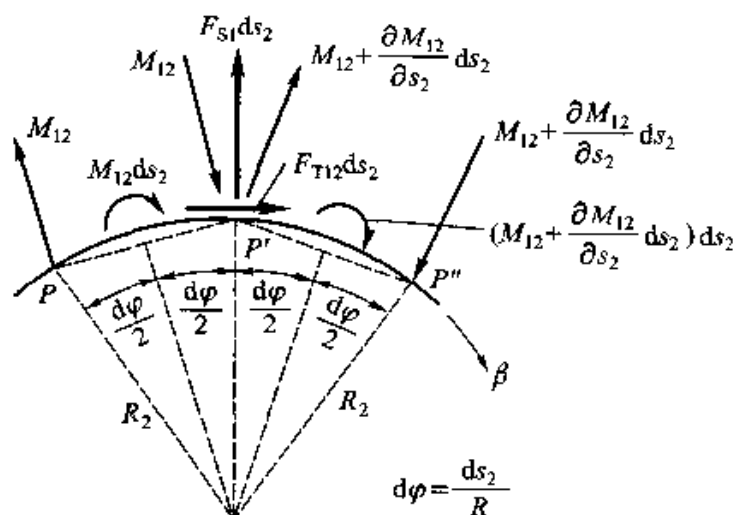


图 19-6

为了说明内力边界条件，先来说明扭矩的等效剪力和等效平错力。仍然以 $\alpha = \alpha_0$ 的边界为例，图 19-6。在该边界的微分弧线 $\overline{PP'}$ 上的扭矩 $M_{12} ds_2$ ，如果不计高阶微量，可以用在 P 点和 P' 点的、垂直于 $\overline{PP'}$ 的两个平行力 M_{12} 来代替。在相邻的微分弧线 $\overline{P'P''}$ 上的扭矩 $\left(M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s_2} ds_2\right) ds_2$ ，也可以用在 P' 点和 P'' 点的、垂直于 $\overline{P'P''}$ 的两个平行力 $M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s_2} ds_2$ 来代替。于是，不计二阶微量，在 P' 点的两个力沿剪力 $F_{S1} ds_2$ 的方向有投影

$$\left(M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s_2} ds_2\right) \cos \frac{d\varphi}{2} - M_{12} \cos \frac{d\varphi}{2}$$

$$\approx \frac{\partial M_{12}}{\partial s_2} ds_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} ds_2,$$

这是扭矩的等效剪力。另一方面，上述两个力在平错力 $F_{T12} ds_2$ 的方向共有投影

$$\begin{aligned} & \left(M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s_2} ds_2 \right) \sin \frac{d\varphi}{2} + M_{12} \sin \frac{d\varphi}{2} \\ & \approx M_{12} d\varphi = M_{12} \frac{ds_2}{R_2} = k_2 M_{12} ds_2. \end{aligned}$$

这是扭矩的等效平错力。

将等效剪力 $\frac{1}{B} \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} ds_2$ 归入剪力 $F_{S1} ds_2$ ，除以 ds_2 ，得中面单位宽度上的总剪力

$$F'_{S1} = F_{S1} + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta}; \quad (19-24)$$

将等效平错力 $k_2 M_{12} ds_2$ 归入平错力 $F_{T12} ds_2$ ，除以 ds_2 ，得中面单位宽度上的总平错力

$$F'_{T12} = F_{T12} + k_2 M_{12}. \quad (19-25)$$

于是可见，在 $\alpha = \alpha_0$ 的边界上，内力边界条件是

$$\begin{aligned} (F_{T1})_{\alpha=\alpha_0} &= f_5(\beta), & (F'_{T12})_{\alpha=\alpha_0} &= f_6(\beta), \\ (F'_{S1})_{\alpha=\alpha_0} &= f_7(\beta), & (M_1)_{\alpha=\alpha_0} &= f_8(\beta), \end{aligned}$$

或将(19-25)及(19-24)代入而得

$$\begin{aligned} (F_{T1})_{\alpha=\alpha_0} &= f_5(\beta), & (F_{T12} + k_2 M_{12})_{\alpha=\alpha_0} &= f_6(\beta), \\ \left(F_{S1} + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= f_7(\beta), & (M_1)_{\alpha=\alpha_0} &= f_8(\beta), \end{aligned}$$

其中的 f_5 至 f_8 是 β 的已知函数。对于完全不受约束也不受边界荷载的自由边，内力边界条件简化为

$$\left. \begin{aligned} (F_{T1})_{\alpha=\alpha_0} &= 0, & (F_{T12} + k_2 M_{12})_{\alpha=\alpha_0} &= 0, \\ \left(F_{S1} + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} \right)_{\alpha=\alpha_0} &= 0, & (M_1)_{\alpha=\alpha_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19-26)$$

同样可以得出 $\beta = \beta_0$ 的边界上的内力边界条件。

注意：方程(19-23)所示的四个位移边界条件，与方程(19-26)所示的四个内力边界条件，是依次互相对应的。在既非完全固定也非完全自由的各种边界上，四个边界条件中的任何一个都可能取两种对应条件之一。这样，从边界条件看来，总共可能有 $2^4 = 16$ 种不同的边界。

在上述16种边界中间，常遇到的只是简支边。图19-7示出 $\alpha = \alpha_0$ 的简支

边。这个边界在边界平面内(即 $\alpha = \alpha_0$ 的平面内)受到完全约束,因而位移 v 和 w 都等于零。在垂直于边界面的方向(即 α 方向),以及绕边界线的方向(即绕 β 线的方向),都不受任何约束,因而沿这两个方向的约束力 F_{T1} 及 M_1 都等于零。于是该简支边的边界条件应为

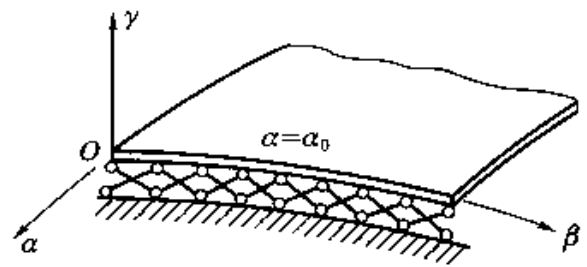


图 19-7

$$\left. \begin{aligned} (F_{T1})_{\alpha=\alpha_0} &= 0, & (v)_{\alpha=\alpha_0} &= 0, \\ (w)_{\alpha=\alpha_0} &= 0, & (M_1)_{\alpha=\alpha_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19-27)$$

§ 19-9 薄壳的无矩理论

上面所述的薄壳理论,通过“无矩假定”加以进一步的简化,就得到所谓“无矩理论”。无矩假定就是:假定整个薄壳的所有横截面上都没有弯矩和扭矩,也就是

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_{12} = 0. \quad (19-28)$$

这样,平衡微分方程(19-22)中的最后二式将给出

$$F_{S2} = 0, \quad F_{S1} = 0. \quad (19-29)$$

代入(19-22)中的前三式,即得无矩理论中的平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(BF_{T1}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}F_{T2} + \frac{\partial A}{\partial \beta}F_{T12} + \frac{\partial}{\partial \beta}(AF_{T12}) + ABq_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(AF_{T2}) - \frac{\partial A}{\partial \beta}F_{T1} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}F_{T12} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BF_{T12}) + ABq_2 &= 0, \\ k_1F_{T1} + k_2F_{T2} - q_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19-30)$$

在物理方程(19-19)中,舍去与弯矩、扭矩有关的后三代,只保留前三式:

$$\left. \begin{aligned} F_{T1} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \\ F_{T2} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \\ F_{T12} = F_{T21} &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\varepsilon_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

在几何方程(19-15)、(19-16)或(19-17)中,也舍去与曲率、扭率的改变有关的(也就是与弯矩、扭矩间接有关的)后三式,只保留前三式:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{v}{AB} + k_1 w, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{u}{AB} + k_2 w, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

再从式(a)及式(b)中消去中面形变 ε_1 、 ε_2 、 ε_{12} ，得出无矩理论中的弹性方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{v}{AB} + k_1 w &= \frac{F_{T1} - \mu F_{T2}}{E\delta}, \\ \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{u}{AB} + k_2 w &= \frac{F_{T2} - \mu F_{T1}}{E\delta}, \\ \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) &= \frac{2(1+\mu)F_{T12}}{E\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (19-31)$$

现在，在3个平衡方程(19-30)和3个弹性方程(19-31)中，只有6个未知函数，即3个薄膜内力 F_{T1} 、 F_{T2} 、 $F_{T12} = F_{T21}$ 和3个中面位移 u 、 v 、 w 。在适当的边界条件下，有可能求得这些未知函数。

因为弯矩、扭矩和横向剪力在整个薄壳中都已假定为零，所以“总剪力等于零”和“弯矩等于零”这两种内力边界条件都自然满足，不起边界条件的作用。另一方面，为了总剪力等于零和弯矩等于零，沿着这两个内力的方向就不应有任何约束，因而与此相应的位移边界条件(即挠度等于零和转角等于零)就必须放弃。于是，在任何边界上，都将只剩下2个边界条件。

例如，在自由边 $\alpha = \alpha_0$ 处的4个边界条件(19-26)中，只剩下前两个，即

$$(F_{T1})_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad (F_{T12} + k_2 M_{12})_{\alpha=\alpha_0} = 0.$$

注意 $M_{12} = 0$ ，可见上列边界条件简化为

$$(F_{T1})_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad (F_{T12})_{\alpha=\alpha_0} = 0. \quad (19-32)$$

又例如，在面定边 $\alpha = \alpha_0$ 处的4个边界条件(19-23)中，也只剩下

$$(u)_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad (v)_{\alpha=\alpha_0} = 0. \quad (19-33)$$

同样，在简支边 $\alpha = \alpha_0$ 处的4个边界条件中，只剩下

$$(F_{T1})_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad (v)_{\alpha=\alpha_0} = 0. \quad (19-34)$$

于是，按无矩理论计算薄壳，就是在上述边界条件下，由3个平衡方程(19-30)和3个弹性方程(19-31)求解3个内力 F_{T1} 、 F_{T2} 、 $F_{T12} = F_{T21}$ 和3个中面位移 u 、 v 、 w 。在某些特殊情况下，可以只用3个平衡方程(19-30)就能求得3个内力 F_{T1} 、 F_{T2} 、 $F_{T12} = F_{T21}$ ，这种问题被称为静定问题。

在这里，由于我们假定了某些内力等于零，并且舍去了某些基本方程和边界条件，得出的解答自然是近似的，因而这些解答所表示的“无矩状态”一般未必能符合实际情况。但是，在一定的条件下，这种无矩状态是可以完全实现

或者基本上实现的。

为了实现无矩状态，首先，必须薄壳的中面是平滑曲面，没有斜率、曲率的突变；其次，必须薄壳所受的荷载是连续分布的，没有任何突变（当然更没有集中荷载）；最后，必须薄壳边界上的挠度不受约束，绕边界线的转动也不受约束。在满足这些条件的情况下，薄壳的平板内力很小，可以不计，薄膜内力也和无矩理论给出的非常接近。反之，如果中面的斜率或曲率有突变，或者荷载有突变，则在突变的近处将有不能忽略的平板内力；如果边界上的挠度受到约束，或者绕边界线的转动受到约束，则在这种边界附近也将有不能忽略的平板内力。当然，随着平板内力的存在，薄膜内力也将与无矩理论给出的结果有显著的差异。

在无矩状态下，薄壳的内力只是薄膜内力，应力是沿薄壳厚度均匀分布的，材料的强度得到充分的利用。因此，为了节省材料，必须尽力争取无矩状态的实现，也就是必须争取满足上述三方面的条件。很明显，为了使得薄壳中面保持平滑而且没有曲率的突变，只须在设计、制造、施工的过程中充分注意，就比较容易做到。为了使得荷载连续分布而没有突变，只须采取垫板、铺沙等等的措施，也大致可以做到。但是，要使得薄壳边界的挠度不受约束，绕边界线的转动也不受约束，那是难以实现的，即使能实现，这种边界的支承也是不稳的。因此，在边界附近，往往不可避免地发生平板内力。这种局部的平板内力，称为边缘效应或边界影响。

由于边缘效应只是局部现象，所以我们可以首先用无矩理论算出薄壳绝大部分地区的内力，即所谓无矩内力，然后再考虑边缘效应，用比较简单的近似方法求出边界附近的平板内力。这样往往可以只用较少的计算工作就能得出工程上可用的成果。

习 题

19-1 试将圆柱坐标 ρ 、 φ 、 z 依次取为 α 、 β 、 γ ，求出拉梅系数 H_1 、 H_2 、 H_3 ，并证明它们满足关系式(19-3)及(19-4)，然后由(19-6)式导出圆柱坐标中的几何方程。

答案： $H_1 = 1$ ， $H_2 = \rho$ ， $H_3 = 1$

$$e_1 = \varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad e_2 = \varepsilon_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho},$$

$$e_3 = \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad e_{23} = \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z},$$

$$e_{31} = \gamma_{\varphi \rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho}, \quad e_{12} = \gamma_{\rho \varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}.$$

19-2 在圆球坐标中，任意一点 P 的位置是用 r 、 θ 、 φ 表示的，其中 r 是径向距离， θ 是余纬角， φ 是经度角，图 19-8。试将这三个坐标依次取为 α 、 β 、 γ ，求出拉梅系数 H_1 、

H_2 、 H_3 ，并证明它们满足关系式(19-3)及(19-4)，然后由(19-6)式导出圆球坐标中的几何方程。

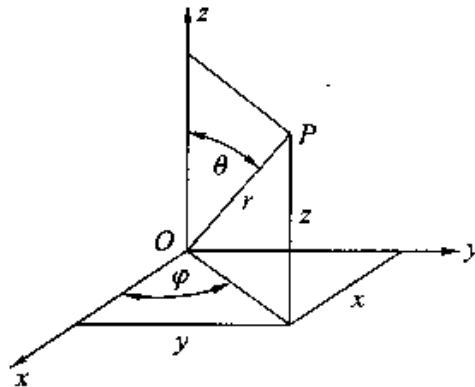


图 19-8

答案: $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin \theta$,

$$e_1 = \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_2 = \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$

$$e_3 = \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r},$$

$$e_{23} = \gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi},$$

$$e_{31} = \gamma_{\varphi r} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r},$$

$$e_{12} = \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}.$$

19-3 试导出平衡微分方程(19-21)中的第三式及第四式。

参 考 教 材

- [1] 符拉索夫著. 壳体的一般理论[M]. 薛振东, 朱世靖译. 北京: 人民教育出版社, 1964: 第五章及第六章.
- [2] 科尔库诺夫著. 弹性壳体计算的基本理论[M]. 张维岳译. 北京: 高等教育出版社, 1966: 第一章.

第二十章 柱 壳

§ 20 - 1 柱壳的无矩理论

以柱面为中面的薄壳，称为柱形薄壳，简称为柱壳。因为这种薄壳在纵向（柱面的母线方向）没有曲率，在计算、设计、制造、施工方面都比较简单，所以得到广泛的使用。环向闭合的柱壳，常用于气体或液体的容器，例如气缸、水管、水塔、调压井等等。环向开敞的柱壳，则广泛使用于各种工业与民用建筑的顶盖结构。

对于柱壳，通常都把 α 坐标放在纵向，即柱面的母线方向； β 坐标放在环向，即柱面的导线方向，如图 20 - 1 所示。于是中面沿 α 方向的曲率为 $k_1 = 0$ ；中面沿 β 方向的曲率 $k_2 = 1/R$ 只是 β 的函数，不随 α 变化。把 α 和 β 两个坐标都取为长度的量纲，则有 $A = B = 1$ 。高斯条件 (19 - 11) 和科达齐条件 (19 - 12) 都总是满足的，因而在分析中并不起什么作用。

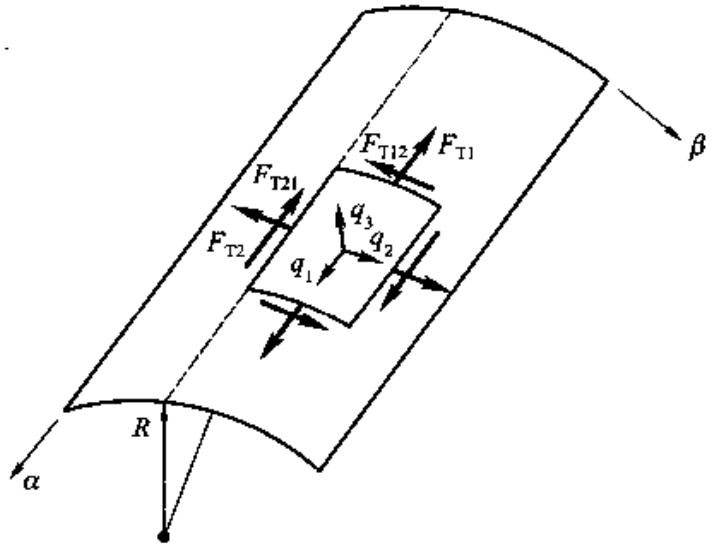


图 20 - 1

在无矩理论的平衡方程 (19 - 30) 中，命 $A = B = 1$ ， $k_1 = 0$ ， $k_2 = 1/R$ ，就得到柱壳的无矩理论平衡方程如下：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{T1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial \beta} + q_1 &= 0, \\ \frac{\partial F_{T2}}{\partial \beta} + \frac{\partial F_{T21}}{\partial \alpha} + q_2 &= 0, \\ F_{T2} &= Rq_3, \end{aligned} \right\} \quad (20 - 1)$$

其中 q_1 、 q_2 及 q_3 为柱壳所受荷载分别在纵向、环向及法向的分量， F_{T1} 、 F_{T2} 及 $F_{T12} = F_{T21}$ 分别为纵向拉压力、环向拉压力及平错力，如图所示。同样可以由方

程(19-31)得出柱壳的无矩理论弹性方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= \frac{F_{T1} - \mu F_{T2}}{E\delta}, \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} &= \frac{F_{T2} - \mu F_{T1}}{E\delta}, \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= \frac{2(1 + \mu) F_{T12}}{E\delta}, \end{aligned} \right\} \quad (20-2)$$

其中 u 、 v 及 w 为柱壳中面内各点的纵向、环向及法向位移。

具体计算时,可先由平衡方程(20-1)中的第三式求出环向拉压力 F_{T2} , 然后代入第二式,对 α 积分,求出平错力 F_{T12} , 再将 F_{T12} 代入第一式,对 α 积分,求出纵向拉压力 F_{T1} 。在某些情况下,积分时出现的任意函数,可以由内力的边界条件(或再借助于对称条件)求得。求出内力以后,即可由(20-2)中的第一式对 α 的积分求得纵向位移 u , 然后代入第三式,对 α 积分,求出环向位移 v , 再将 v 代入第二式,求出法向位移 w 。这种可以先由平衡方程求出全部内力然后再求位移的问题,也和结构力学中的这种问题一样地被称为静定问题。

在另一些情况下,内力边界条件和对称条件不足以决定任意函数,因而就不可能先求出内力再求位移。这时,只能在内力表达式中保留着任意函数,然后借助于位移边界条件来加以确定。这种问题也就被称为超静定问题。

§ 20-2 容器柱壳的无矩计算

作为第一个例题,设有盛满液体的圆筒(R 为常量),下端支承而上端自由,图 20-2。命液体的密度为 ρ , 则柱壳所受的荷载为

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = \rho g(L - \alpha)。$$

在这里,把 $\alpha = 0$ 放在下端,是为了便于考虑边缘效应,见 § 20-8。

由(20-1)中的第三式得环向拉力

$$F_{T2} = Rq_3 = \rho g R(L - \alpha)。$$

代入(20-1)中的第二式,注意 $q_2 = 0$, 并且

R 是常量,即得 $\frac{\partial F_{T12}}{\partial \alpha} = 0$, 即 $F_{T12} = f(\beta)$ 。注

意在上端有边界条件

$$(F_{T12})_{\alpha=L} = 0,$$

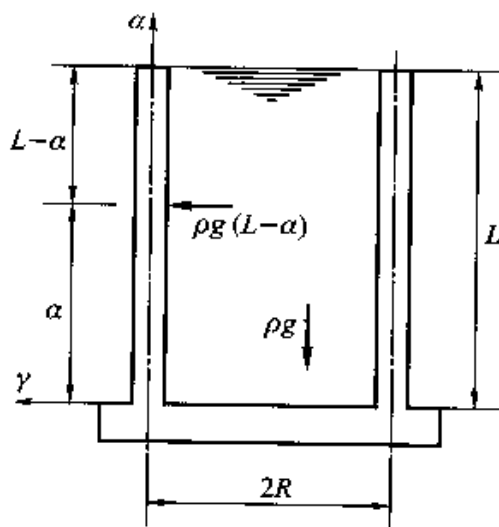


图 20-2

可见

$$F_{T12} = f(\beta) = 0。$$

代入(20-1)中的第一式, 并命 $q_1 = 0$, 得 $\frac{\partial F_{T1}}{\partial \alpha} = 0$, 即 $F_{T1} = f_1(\beta)$ 。

因为上端有边界条件

$$(F_{T1})_{\alpha=L} = 0,$$

所以得

$$F_{T1} = f_1(\beta) = 0。$$

于是内力中只剩下环向拉力, 而环向拉应力为

$$\sigma_2 = \frac{F_{T2}}{\delta} = \frac{\rho g R(L - \alpha)}{\delta}。$$

现在来求出中面位移。注意 $F_{T1} = 0$, 由(20-2)中的第一式得

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\frac{\mu F_{T2}}{E\delta} = -\frac{\mu \rho g R(L - \alpha)}{E\delta}。$$

对 α 积分, 注意 R 为常量, 并注意下端有边界条件

$$(u)_{\alpha=0} = 0,$$

即得

$$u = -\frac{\mu \rho g R}{E\delta} \left(L - \frac{\alpha}{2} \right) \alpha。$$

将此式及 $F_{T12} = 0$ 代入(20-2)中的第三式, 得 $\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0$, 即 $v = f_2(\beta)$ 。注意下端有边界条件

$$(v)_{\alpha=0} = 0,$$

可见

$$v = f_2(\beta) = 0。$$

将此式及 $F_{T1} = 0$ 代入(20-2)中的第二式, 即得

$$w = \frac{F_{T2} R}{E\delta} = \frac{\rho g R^2 (L - \alpha)}{E\delta}。$$

在柱壳的下端, 中面的法向位移为

$$(w)_{\alpha=0} = \frac{\rho g R^2 L}{E\delta}, \quad (20-3)$$

而中面的转角为

$$(\theta_1)_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = -\frac{\rho g R^2}{E\delta}。 \quad (20-4)$$

由此可见, 必须柱壳的下端不受法向约束及转动约束, (20-3)及(20-4)

两式所示的法向位移及转角可以自由发生，以上所得的无矩内力才能实现。如果柱壳下端受有筒底的约束，则在下端附近必将发生局部性的弯矩和横向剪力，见 § 20-8。

作为第二个例题，设有两端支承的、具有任意横截面的筒壳，长度为 L ，受有均匀内压力 q_0 ，图 20-3。假定两端的支承板在其平面内的刚度很大，而弯曲刚度很小，从而有边界条件

$$(F_{T1})_{\alpha=0} = 0, \quad (F_{T1})_{\alpha=L} = 0, \quad (a)$$

$$(v)_{\alpha=0} = 0, \quad (v)_{\alpha=L} = 0. \quad (b)$$

荷载的分量显然为 $q_1 = q_2 = 0$ ， $q_3 = q_0$ 。

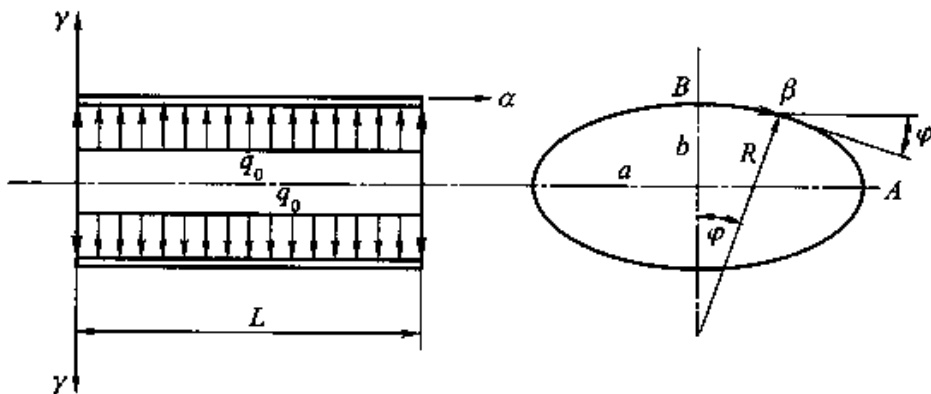


图 20-3

首先求内力。由(20-1)中的第三式得

$$F_{T2} = Rq_3 = q_0R, \quad (c)$$

其中 q_0 为常量而 R 为 β 的函数。代入(20-1)中的第二式，得

$$\frac{\partial F_{T12}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial F_{T2}}{\partial \beta} = -q_0 \frac{dR}{d\beta}.$$

对 α 积分，并利用对称条件

$$(F_{T12})_{\alpha=L/2} = 0,$$

即得

$$F_{T12} = q_0 \left(\frac{L}{2} - \alpha \right) \frac{dR}{d\beta}. \quad (d)$$

代入(20-1)中的第一式，得

$$\frac{\partial F_{T1}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial F_{T12}}{\partial \beta} = -q_0 \left(\frac{L}{2} - \alpha \right) \frac{d^2R}{d\beta^2}.$$

对 α 积分，并利用边界条件(a)，即得

$$F_{T1} = -\frac{q_0 \alpha (L - \alpha)}{2} \frac{d^2R}{d\beta^2}. \quad (e)$$

其次来求出中面位移。由(20-2)中的第一式得

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{F_{T1} - \mu F_{T2}}{E\delta} = -\frac{q_0}{E\delta} \left[\frac{\alpha(L-\alpha)}{2} \frac{d^2 R}{d\beta^2} + \mu R \right].$$

对 α 积分, 并利用对称条件

$$(u)_{\alpha=L/2} = 0,$$

即得

$$u = \frac{\mu q_0 R}{E\delta} \left(\frac{L}{2} - \alpha \right) + \frac{q_0}{24E\delta} (4\alpha^3 - 6L\alpha^2 + L^3) \frac{d^2 R}{d\beta^2}. \quad (f)$$

代入(20-2)中的第三式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= \frac{2(1+\mu)F_{T12}}{E\delta} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ &= \frac{(2+\mu)q_0}{E\delta} \left(\frac{L}{2} - \alpha \right) \frac{dR}{d\beta} - \\ &\quad \frac{q_0}{24E\delta} (4\alpha^3 - 6L\alpha^2 + L^3) \frac{d^3 R}{d\beta^3}, \end{aligned}$$

对 α 积分, 并利用边界条件(b), 即得

$$\begin{aligned} v &= \frac{(2+\mu)q_0\alpha(L-\alpha)}{2E\delta} \frac{dR}{d\beta} - \\ &\quad \frac{q_0\alpha(\alpha^3 - 2L\alpha^2 + L^3)}{24E\delta} \frac{d^3 R}{d\beta^3}. \end{aligned} \quad (g)$$

代入(20-2)中的第二式, 即得

$$\begin{aligned} w &= \frac{q_0 R}{E\delta} \left[R - \alpha(L-\alpha) \frac{d^2 R}{d\beta^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha}{24} (\alpha^3 - 2L\alpha^2 + L^3) \frac{d^4 R}{d\beta^4} \right]. \end{aligned} \quad (h)$$

设柱壳的横截面中线为椭圆, 其半轴为 a 及 b , 图 20-3, 则其曲率半径为

$$R = \frac{b^2}{a(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (20-5)$$

式中 φ 是椭圆法线与短轴的夹角, 也就是椭圆切线与长轴的夹角, ε 是椭圆的偏心率, 而

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

根据关系式 $d\beta = R d\varphi$, 可以求得

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\beta} &= \frac{1}{R} \frac{dR}{d\varphi} = -\frac{3\varepsilon^2 \sin 2\varphi}{2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)}, \\ \frac{d^2 R}{d\beta^2} &= \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dR}{d\beta} \right) = -\frac{3a\varepsilon^2 (\cos 2\varphi - \varepsilon^2 \cos^3 \varphi)}{b^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

$$\frac{d^3 R}{d\beta^3} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d^2 R}{d\beta^2} \right) = \frac{6a^2 \varepsilon^2}{b^4} \left[1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \cos^2 \varphi \right] \sin 2\varphi$$

$$\frac{d^4 R}{d\beta^4} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d^3 R}{d\beta^3} \right) = \frac{12a^3 \varepsilon^2}{b^6} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \right) \cos 2\varphi - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) (\cos^2 \varphi - 3\sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi \right]$$

有了这些表达式，即可求得柱壳的内力及中面位移。内力的分布大致如图 20-4 所示。

读者试证：最大及最小的 F_{T1} 为

$$(F_{T1})_{\max} = \frac{3q_0 L^2}{8b} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right),$$

$$(F_{T1})_{\min} = -\frac{3q_0 L^2 \alpha}{8b^2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right);$$

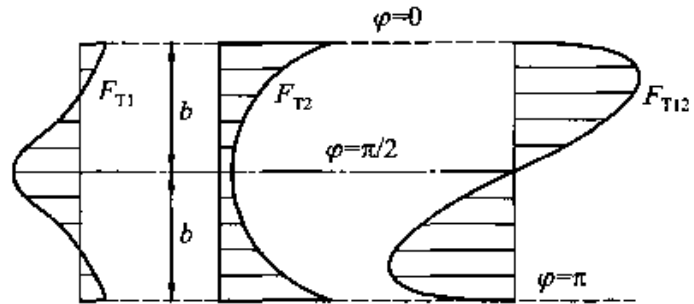


图 20-4

最大的 F_{T2} 为 $q_0 a^2/b$ ，最小的 F_{T2} 为 $q_0 b^2/a$ ；最大及最小的 F_{T12} 为

$$(F_{T12})_{\max} = \frac{3q_0 L (a^2 - b^2)}{4ab}, \quad (F_{T12})_{\min} = -\frac{3q_0 L (a^2 - b^2)}{4ab};$$

最大及最小的中面法向位移为

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{E\delta b^2} \left[1 + \frac{3L^2 \varepsilon^2}{4a^2} + \frac{5L^4 \varepsilon^2}{32a^4} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \right],$$

$$w_{\min} = -\frac{q_0 a^4}{E\delta b^2} \left[-\frac{b^6}{a^6} + \frac{3L^2 b^2 \varepsilon^2}{4a^4} + \frac{5L^4 \varepsilon^2}{32a^2 b^2} \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \right) \right].$$

对于圆形柱壳， $a = b = R$ ，上列解答简化为

$$F_{T1} = 0, \quad F_{T2} = q_0 R = q_0 a, \quad F_{T12} = 0, \quad w = \frac{q_0 R^2}{E\delta} = \frac{q_0 a^2}{E\delta}. \quad (20-6)$$

和前一例题一样，必须柱壳在两端不受法向约束及转动约束，法向位移和转角可以自由发生，以上所得的无矩内力才能实现。实际上，柱壳在两端总是受有这种约束，因而在两端必然将发生局部性的弯矩和横向剪力。

§ 20-3 顶盖柱壳的无矩计算

作为顶盖用的柱壳，图 20-5，一般是两端支承在横隔上。横隔可以是连

续的墙壁，也可以是拱，或者是支承在柱顶上的平面刚架、平面桁架等等。这些横隔在其平面内的刚度很大，但在垂直于平面方向的刚度却是很小。因此，可以认为柱壳在其两端的曲线边界上不受纵向拉压力，用图中所示的坐标系，就是

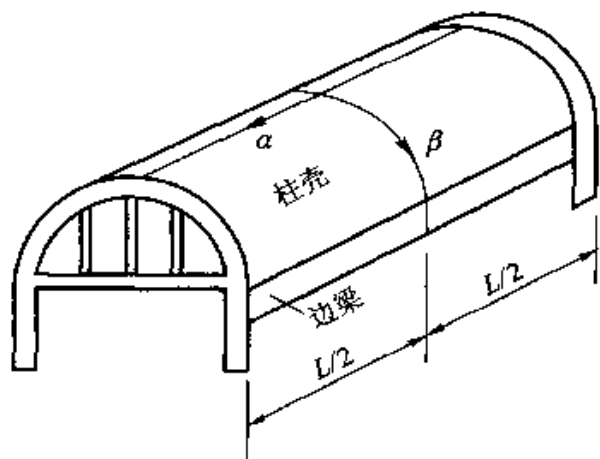


图 20 - 5

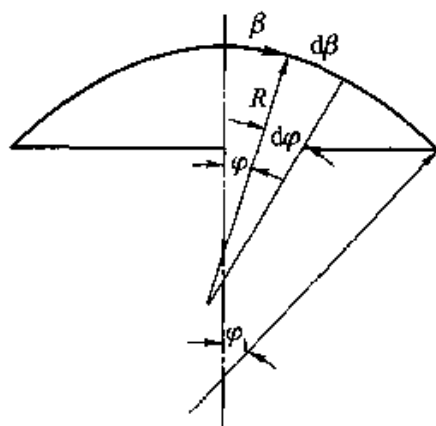


图 20 - 6

$$(F_{T1})_{\alpha = \pm L/2} = 0 \quad (a)$$

柱壳的直线边界可以是自由边，或者与边梁刚连。

顶盖柱壳所受的荷载主要是铅直荷载。命柱壳在每单位面积上所受的铅直荷载为 q_0 ，则有

$$q_1 = 0, \quad q_2 = q_0 \sin \varphi, \quad q_3 = -q_0 \cos \varphi \quad (b)$$

其中 φ 是柱壳中面法线与铅直线的夹角，图 20 - 6。为了运算方便，下面用 φ 角来代替 β 作为环向坐标。利用式 (b) 及几何关系 $d\beta = R d\varphi$ ，可将平衡方程 (20 - 1) 改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{T1}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial F_{T12}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial F_{T12}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial F_{T2}}{\partial \varphi} + q_0 \sin \varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$F_{T2} = -q_0 R \cos \varphi \quad (d)$$

将式 (d) 代入 (c) 中的第二式，注意 R 也是 φ 的函数，得到

$$\frac{\partial F_{T12}}{\partial \alpha} = -q_0 \sin \varphi - \frac{1}{R} \frac{\partial F_{T2}}{\partial \varphi} = \frac{q_0}{R} \frac{dR}{d\varphi} \cos \varphi - 2q_0 \sin \varphi。$$

对 α 积分，并利用对称条件 $(F_{T12})_{\alpha=0} = 0$ ，得到

$$F_{T12} = q_0 \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{d\varphi} \cos \varphi - 2 \sin \varphi \right) \alpha \quad (e)$$

代入 (c) 中的第一式，得到

$$\frac{\partial F_{T1}}{\partial \alpha} = -\frac{1}{R} \frac{\partial F_{T12}}{\partial \varphi} = -\frac{q_0 \alpha}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{d\varphi} \cos \varphi - 2 \sin \varphi \right)。$$

对 α 积分，并利用边界条件(a)，即得

$$F_{T1} = \frac{q_0}{2R} \left(\frac{L^2}{4} - \alpha^2 \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{d\varphi} \cos \varphi - 2 \sin \varphi \right)。$$
 (f)

对于任何形状的柱壳，均可用(d)、(e)、(f)三式求得无矩内力。

假定柱壳的直线边界是自由边，则有内力边界条件

$$(F_{T2})_{\varphi=\varphi_1} = 0, \quad (F_{T12})_{\varphi=\varphi_1} = 0, \quad (g)$$

其中 φ_1 是直线边界处的 φ 角，图 20-6。但是，由式(d)及式(e)可见，边界条件(g)是不能满足的。即使柱壳的横截面中线在直线边界处是沿铅直方向(如半圆或半椭圆)，因而有 $\varphi_1 = \pi/2$ ，(g)中的第一式可以满足，第二式仍然不能满足，因为这时将得到

$$(F_{T12})_{\varphi=\varphi_1} = -2q_0\alpha。$$

如果柱壳在直线边界上有边梁和它相连，则边梁在与柱壳连结之处将受有纵向的分布荷载，大小等于 $(F_{T12})_{\varphi=\varphi_1}$ ，而方向相反，同时还可能受有横向分布荷载，大小等于 $(F_{T2})_{\varphi=\varphi_1}$ ，而方向相反。边梁由这些荷载引起的位移，和柱壳在直线边界处的位移，一般是不相同的，也就是不能相容的。因此，柱壳将受到边梁的约束而引起或大或小的弯曲内力。

由以上所述可见，不论柱壳的直线边界如何，前面导出的无矩内力公式，在直线边界处，都不能符合实际情况。但实践证明，当柱壳的纵向长度很小的时候(例如只有宽度的一半或者更小一些)，无矩内力的公式可以在整个柱壳中大致反映实际情况。

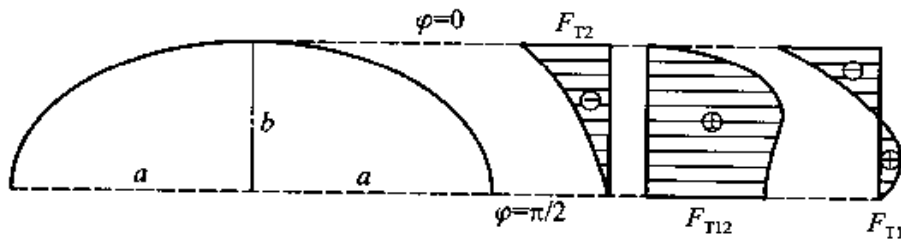


图 20-7

当柱壳的横截面为半椭圆时，图 20-7，利用公式(20-5)，可由(d)、(e)、(f)三式得到内力的表达式如下：

$$F_{T2} = -q_0 a^2 b^2 \frac{\cos \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}},$$

$$F_{T12} = -q_0 \alpha \frac{2a^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \sin \varphi,$$

$$F_{T1} = -\frac{q_0(L^2 - 4\alpha^2)\cos\varphi}{8a^2b^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{1/2}} \{ 3a^2[b^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\varphi] - (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2 \}。$$

各个内力的分布大致如图 20-7 所示。

§ 20-4 弯曲问题的基本微分方程

在薄壳的平衡微分方程(19-22)中, 命 $A = B = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$, 就得到柱壳的平衡微分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{T1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial \beta} + q_1 &= 0, \\ \frac{\partial F_{T2}}{\partial \beta} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial \alpha} + \frac{F_{S2}}{R} + q_2 &= 0, \\ -\frac{F_{T2}}{R} + \frac{\partial F_{S1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_{S2}}{\partial \beta} + q_3 &= 0, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_2}{\partial \beta} - F_{S2} &= 0, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - F_{S1} &= 0。 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

上列第二式中的 F_{S2}/R 一项, 表示横向剪力 F_{S2} 对环向平衡的影响。在柱壳中, 这个影响通常是很小的, 可以略去不计。这样, 柱的壳平衡微分方程可以改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{T1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial \beta} + q_1 &= 0, & \frac{\partial F_{T2}}{\partial \beta} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial \alpha} + q_2 &= 0, \\ -\frac{F_{T2}}{R} + \frac{\partial F_{S1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_{S2}}{\partial \beta} + q_3 &= 0, \\ F_{S2} &= \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_2}{\partial \beta}, & F_{S1} &= \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha}。 \end{aligned} \right\} \quad (20-7)$$

在薄壳的几何方程(19-15)中, 命 $A = B = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$, 得到柱壳的几何方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R}, & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \\ \chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, & \chi_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, & \chi_{12} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}。 \end{aligned} \right\} \quad (20-8)$$

物理方程仍然如(19-19)所示。

在柱壳的弯曲问题中，有 8 个内力，而位移却只有 3 个，因此，宜用位移法求解（按位移求解）。为了导出位移法中的基本微分方程，首先将几何方程（20-8）代入物理方程（19-19），得出弹性方程

$$\left. \begin{aligned} F_{\tau_1} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \right) \right], \\ F_{\tau_2} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right], \\ F_{112} &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \\ M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right), \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right), \\ M_{12} &= -(1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (20-9)$$

再将（20-9）中的后三式代入（20-7）中的后二式，得到

$$F_{s_2} = -D \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 w, \quad F_{s_1} = -D \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 w, \quad (20-10)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ 。最后，将（20-9）式及（20-10）式代入（20-7）中的前三

式，并注意 $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ ，即得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= -\frac{1-\mu^2}{E\delta} q_1, \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) v + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{R^2} \frac{dR}{d\beta} w &= -\frac{1-\mu^2}{E\delta} q_2, \\ \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R^2} + \frac{\delta^2}{12} \nabla^4 w &= \frac{1-\mu^2}{E\delta} q_3. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

这是用中面位移表示的柱壳平衡微分方程，也就是用位移法求解柱壳弯曲问题时所需用的基本微分方程。

微分方程（b）是非常难以求解的，因为它们的系数中含有 R 和 $\frac{dR}{d\beta}$ ，而这两者一般是 β 的函数，使得该微分方程不是常系数的，而是变系数的。如果柱壳的中面是圆柱面，柱壳是圆柱壳，则 R 成为常量（而且 $\frac{dR}{d\beta}$ 成为零），该微分方程成为常系数的，求解就比较容易一些。同时，圆柱壳的制造和施工也比较方

便，因而用得最多。根据这两方面的理由，下面我们讨论柱壳的弯曲问题时，只以圆柱壳为限。于是基本微分方程(b)简化为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= -\frac{1-\mu^2}{E\delta} q_1, \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) v + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} &= -\frac{1-\mu^2}{E\delta} q_2, \\ \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R^2} + \frac{\delta^2}{12} \nabla^4 w &= \frac{1-\mu^2}{E\delta} q_3. \end{aligned} \right\} \quad (20-11)$$

在边界条件下求得中面位移 u 、 v 、 w 后，即可用(20-9)式及(20-10)式求得内力。

§ 20-5 圆柱壳在法向荷载下的弯曲

工程上用到的薄壳，特别是用于容器的薄壳，它们所受的荷载主要是法向荷载。另一方面，计算法向荷载作用下的薄壳，也比较简单一些。因此，这里先对圆柱壳受法向荷载的问题进行讨论。在(20-11)式中命 $q_1 = q_2 = 0$ ，即得这种问题的基本微分方程

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) v + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R^2} + \frac{\delta^2}{12} \nabla^4 w &= \frac{1-\mu^2}{E\delta} q_3. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

引用位移函数 $F = F(\alpha, \beta)$ ，把中面位移表示成为

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) F, \\ v &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (2+\mu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] F, \\ w &= R \nabla^4 F, \end{aligned} \right\} \quad (20-12)$$

则(a)中的前两个方程总能满足，而第三个方程要求

$$\nabla^8 F + \frac{E\delta}{R^2 D} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} = \frac{q_3}{RD} \quad (20-13)$$

再将(20-12)式代入(20-9)式及(20-10)式，即可将内力用位移函数 F 表示如下：

$$\left. \begin{aligned}
 F_{T1} &= E\delta \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, & F_{T2} &= E\delta \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4}, \\
 F_{T12} &= -E\delta \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^3 \partial \beta}, \\
 M_1 &= -RD \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^4 F, \\
 M_2 &= -RD \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \nabla^4 F, \\
 M_{12} &= -(1-\mu)RD \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^4 F, \\
 F_{S1} &= -RD \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^6 F, & F_{S2} &= -RD \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^6 F.
 \end{aligned} \right\} \quad (20-14)$$

于是边界条件总可以用 F 表示。在边界条件下由微分方程(20-13)解出 F , 即可用(20-12)式求得中面位移, 用(20-14)式求得内力。

当环向开敞、四边简支的圆柱壳受有任意法向荷载时, 可以用重三角级数求解。设圆柱壳的纵向边长为 a , 环向边长为 b , 则边界条件为

$$\begin{aligned}
 (v, w, F_{T1}, M_1)_{\alpha=0} &= 0, & (v, w, F_{T1}, M_1)_{\alpha=a} &= 0, \\
 (u, w, F_{T2}, M_2)_{\beta=0} &= 0, & (u, w, F_{T2}, M_2)_{\beta=b} &= 0.
 \end{aligned}$$

观察(20-12)及(20-14)两式, 可见, 如果能够选取 $F(\alpha, \beta)$, 使它在四个边界上都等于零, 而且在垂直于边界方向的偶阶导数也都等于零, 则上列边界条件可以满足。于是我们很自然地会想到, 可以把纳维对简支边矩形薄板的解法推广应用于这里的薄壳, 也就是把 F 取为如下的重三角级数:

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b}. \quad (b)$$

代入微分方程(20-13), 得

$$\begin{aligned}
 &\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left\{ \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^4 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{E\delta}{R^2 D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \right\} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} = \frac{q_3}{RD}. \quad (c)
 \end{aligned}$$

参阅(13-25)式, 将式(c)右边的 q_3 也展为和左边同样形式的级数, 得到

$$q_3 = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^a \int_0^b q_3 \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} d\alpha d\beta \right] \times \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b}. \quad (d)$$

将式(d)代入式(c)的右边, 比较两边的系数, 即得出 A_{mn} , 从而由式(b)得出

$$F = \frac{4}{abRD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \int_0^b q_3 \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} d\alpha d\beta}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^4 + \frac{E\delta}{R^2 D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4} \times \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b}. \quad (e)$$

不论法向荷载如何分布，都不难求式中的积分，从而得出 F ，并从而求得中面位移及内力的重三角级数表达式。但是，由于重三角级数收敛很慢，因而数字计算很繁，不便应用于工程设计。

当圆柱壳在 $\alpha=0$ 及 $\alpha=a$ 的边界上为简支时，不论它在环向是开敞的还是闭合的，都可以推广应用莱维对矩形薄板的解法，把位移函数取为单三角级数如下：

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\beta) \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \quad (f)$$

这样，总可以满足圆柱壳两端的边界条件

$$(F_{T1}, v, w, M_1)_{\alpha=0} = 0, \quad (F_{T1}, v, w, M_1)_{\alpha=a} = 0。$$

将法向荷载 $q_3(\alpha, \beta)$ 展为与式(f)右边相同的三角级数，得

$$q_3 = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^a q_3(\alpha, \beta) \sin \frac{m\pi\alpha}{a} d\alpha \right] \sin \frac{m\pi\alpha}{a}。$$

再将此式及式(f)一并代入微分方程(20-13)，比较方程两边的系数，即得 $\psi_m(\beta)$ 的八阶常微分方程如下：

$$\left[\left(\frac{d^2}{d\beta^2} - \lambda_m^2 \right)^4 + \frac{E\delta}{R^2 D} \lambda_m^4 \right] \psi_m(\beta) = \frac{2}{RD a} \int_0^a q_3(\alpha, \beta) \sin \lambda_m \alpha d\alpha,$$

其中 $\lambda_m = m\pi/a$ 。这一微分方程的特解 $\psi_m^*(\beta)$ ，不难根据它右边积分的结果而选得。至于它的补充解，则须根据它的特征方程

$$(r_m^2 - \lambda_m^2)^4 + \frac{E\delta}{R^2 D} \lambda_m^4 = 0 \quad (g)$$

来求得。由于 $\frac{E\delta}{R^2 D} \lambda_m^4$ 总是正的，所以这个方程将具有四对复根。假定这四对复根是

$$a_m \pm ib_m, \quad -a_m \pm ib_m, \quad c_m \pm id_m, \quad -c_m \pm id_m,$$

其中 a_m 、 b_m 、 c_m 、 d_m 均为实数，则 $\psi_m(\beta)$ 的解答将为

$$\begin{aligned} \psi_m(\beta) = & \psi_m^*(\beta) + C_{1m} \cosh a_m \beta \sin b_m \beta + C_{2m} \cosh a_m \beta \cos b_m \beta + \\ & C_{3m} \sinh a_m \beta \cos b_m \beta + C_{4m} \sinh a_m \beta \sin b_m \beta + \\ & C_{5m} \cosh c_m \beta \sin d_m \beta + C_{6m} \cosh c_m \beta \cos d_m \beta + \\ & C_{7m} \sinh c_m \beta \cos d_m \beta + C_{8m} \sinh c_m \beta \sin d_m \beta。 \end{aligned} \quad (h)$$

当圆柱壳在环向为开敞时，解答(h)中的任意常数可用 $\beta=0$ 及 $\beta=b$ 处的边界条件来确定。当圆柱壳在环向为闭合时，解答(h)中的任意常数可用 β 方向的周期性条件来确定，也就是由下列八元联立方程来确定：

$$\left[\frac{d^n}{d\beta^n} \psi_m(\beta) \right]_{\beta=0} = \left[\frac{d^n}{d\beta^n} \psi_m(\beta) \right]_{\beta=2\pi R}, \quad (n=0, 1, 2, \dots, 7)$$

因为中面位移及内力只与 $\psi_m(\beta)$ 及其一阶至七阶导数有关, 所以上列周期性条件就保证位移及内力的单值性。这样确定 $\psi_m(\beta)$ 以后, 即可由式 (f) 得出 $F(\alpha, \beta)$, 从而用 (20-12) 式求得中面位移, 用 (20-14) 式求得内力。

当环向闭合的圆柱壳在两端有非简支边时, 可以用 β 的三角级数求解。取位移函数为

$$F(\alpha, \beta) = \psi_0(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\alpha) \cos \frac{m\beta}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi'_n(\alpha) \sin \frac{n\beta}{R}, \quad (i)$$

可以满足 β 方向的周期性条件。将法向荷载 $q_3(\alpha, \beta)$ 也展为同样的三角级数, 与式 (i) 一并代入偏微分方程 (20-13), 比较两边的系数, 可以得出 ψ_0 、 ψ_m 及 ψ'_n 的八阶常微分方程。解出 ψ_0 、 ψ_m 及 ψ'_n , 并用圆柱壳两端的边界条件确定其中的任意常数, 即可用 (20-12) 式及 (20-14) 式求得中面位移和内力。

§ 20-6 轴对称弯曲问题

当圆柱壳只受有绕其中心轴对称的法向荷载 $q_3 = q_3(\alpha)$, 而且边界的情况也绕该轴对称时, 位移和内力也将是绕该轴对称的, 它们的表达式将只是 α 的函数。这时, 位移函数 F 可以取为只是 α 的函数, 即 $F = F(\alpha)$, 而偏微分方程 (20-13) 简化为常微分方程

$$\frac{d^3 F}{d\alpha^3} + \frac{E\delta}{R^2 D} \frac{d^4 F}{d\alpha^4} = \frac{q_3}{RD} \quad (a)$$

与此相应, (20-12) 中的第三式简化为

$$w = R \frac{d^4 F}{d\alpha^4} \quad (b)$$

利用此式, 方程 (a) 又可以变换为

$$\frac{d^4 w}{d\alpha^4} + \frac{E\delta}{R^2 D} w = \frac{q_3}{D} \quad (c)$$

这是 w 的四阶常微分方程, 可以按照每个边界上关于 w 的两个边界条件来求解。

利用式 (b), 注意 $F = F(\alpha)$, 可以由 (20-14) 式得出内力的表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} F_{T1} &= 0, & F_{T2} &= \frac{E\delta}{R} w, & F_{T12} &= 0, \\ M_1 &= -D \frac{d^2 w}{d\alpha^2}, & M_2 &= -\mu D \frac{d^2 w}{d\alpha^2} = \mu M_1, \\ M_{12} &= 0, & F_{S1} &= -D \frac{d^3 w}{d\alpha^3}, & F_{S2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

于是可以由 w 的解答求得所有的内力。

为了简化解答，引用一个量纲为 L^{-1} 的常数

$$\lambda = \left(\frac{E\delta}{4R^2D} \right)^{1/4} = \left[\frac{3(1-\mu^2)}{R^2\delta^2} \right]^{1/4}, \quad (20-15)$$

并引用量纲一的坐标 ξ 以代替 α ：

$$\xi = \lambda\alpha. \quad (20-16)$$

这样，微分方程(c)就变换成为

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = \frac{4R^2}{E\delta} q_3. \quad (20-17)$$

它的解答可以写成如下的形式：

$$w = C_1 \sin \xi \sinh \xi + C_2 \sin \xi \cosh \xi + C_3 \cos \xi \sinh \xi + C_4 \cos \xi \cosh \xi + w^*, \quad (20-18)$$

其中 w^* 是任一特解，可以根据法向荷载 $q_3(\alpha)$ 的函数形式按照微分方程(20-17)的要求来选择，常数 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 决定于边界条件。内力的表达式(d)则变换成为

$$\left. \begin{aligned} F_{T1} = 0, \quad F_{T2} = \frac{E\delta}{R} w, \quad F_{T12} = 0, \\ M_1 = -\lambda^2 D \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad M_2 = \mu M_1, \\ M_{12} = 0, \quad F_{S1} = -\lambda^3 D \frac{d^3 w}{d\xi^3}, \quad F_{S2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20-19)$$

作为例题，设有受均匀内压力 q_0 的圆筒，图 20-8。为了便于利用对称性，把中央横截面(对称面)取为 $\alpha = 0$ ，如图所示。因为 $q_3 = q_0$ 是常量，所以(20-18)中的特解可以取为

$$w^* = \frac{R^2}{E\delta} q_3 = \frac{q_0 R^2}{E\delta}.$$

由于对称， w 应为 ξ 的偶函数，可见在(20-18)中应取 $C_2 = C_3 = 0$ 。于是有

$$w = C_1 \sin \xi \sinh \xi + C_4 \cos \xi \cosh \xi + \frac{q_0 R^2}{E\delta}. \quad (e)$$

假定圆筒是两端简支，则边界条件为

$$(w)_{\alpha = \pm l} = 0, \quad (M_1)_{\alpha = \pm l} = 0.$$

按照(20-16)式及(20-19)式，上列条件可以变换成为

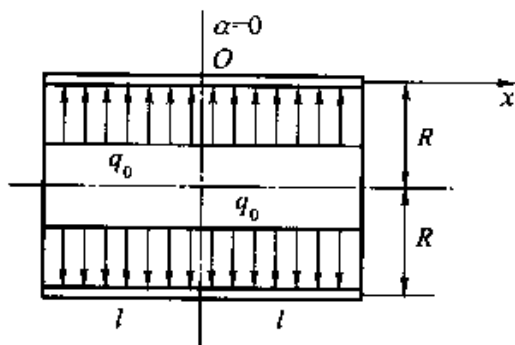


图 20-8

$$(w)_{\xi=\pm\lambda l} = 0, \quad \left(\frac{d^2 w}{d\xi^2}\right)_{\xi=\pm\lambda l} = 0。$$

将式(e)代入, 得出 C_1 和 C_4 的两个方程:

$$C_1 \sin \lambda l \sinh \lambda l + C_4 \cos \lambda l \cosh \lambda l + \frac{q_0 R^2}{E\delta} = 0,$$

$$C_1 \cos \lambda l \cosh \lambda l - C_4 \sin \lambda l \sinh \lambda l = 0。$$

求解 C_1 及 C_4 , 代入式(e), 即得挠度的表达式

$$w = \frac{q_0 R^2}{E\delta} \left(1 - \frac{2 \sin \lambda l \sinh \lambda l}{\cos 2\lambda l + \cosh 2\lambda l} \sin \xi \sinh \xi - \frac{2 \cos \lambda l \cosh \lambda l}{\cos 2\lambda l + \cosh 2\lambda l} \cos \xi \cosh \xi \right)。 \quad (f)$$

有了挠度的表达式, 即可用(20-19)式求得内力。例如,

$$M_1 = -\lambda^2 D \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \frac{q_0}{\lambda^2} \left(\frac{\sin \lambda l \sinh \lambda l}{\cos 2\lambda l + \cosh 2\lambda l} \cos \xi \cosh \xi - \frac{\cos \lambda l \cosh \lambda l}{\cos 2\lambda l + \cosh 2\lambda l} \sin \xi \sinh \xi \right)。$$

在圆筒的中间($\alpha = \xi = 0$), 挠度和弯矩都是最大:

$$w_{\max} = \frac{q_0 R^2}{E\delta} \left(1 - \frac{2 \cos \lambda l \cosh \lambda l}{\cos 2\lambda l + \cosh 2\lambda l} \right),$$

$$(M_1)_{\max} = \frac{q_0}{\lambda^2} \frac{\sin \lambda l \sinh \lambda l}{\cos 2\lambda l + \cosh 2\lambda l}。$$

假定圆筒是两端夹支, 则边界条件为

$$(w)_{\alpha=\pm l} = 0, \quad \left(\frac{dw}{d\alpha}\right)_{\alpha=\pm l} = 0,$$

或通过(20-16)式变换成为

$$(w)_{\xi=\pm\lambda l} = 0, \quad \left(\frac{dw}{d\xi}\right)_{\xi=\pm\lambda l} = 0。$$

将式(e)代入, 得

$$C_1 \sin \lambda l \sinh \lambda l + C_4 \cos \lambda l \cosh \lambda l + \frac{q_0 R^2}{E\delta} = 0,$$

$$C_1 (\sin \lambda l \cosh \lambda l + \cos \lambda l \sinh \lambda l) + C_4 (\cos \lambda l \sinh \lambda l - \sin \lambda l \cosh \lambda l) = 0。$$

求解 C_1 和 C_4 , 代入式(e), 可得挠度及弯矩的表达式

$$w = \frac{q_0 R^2}{E\delta} \left(1 - 2 \frac{\sin \lambda l \cosh \lambda l - \cos \lambda l \sinh \lambda l}{\sin 2\lambda l + \sinh 2\lambda l} \sin \xi \sinh \xi - 2 \frac{\sin \lambda l \cosh \lambda l + \cos \lambda l \sinh \lambda l}{\sin 2\lambda l + \sinh 2\lambda l} \cos \xi \cosh \xi \right),$$

$$M_1 = \frac{q_0}{\lambda^2} \left(\frac{\sin \lambda l \cosh \lambda l - \cos \lambda l \sinh \lambda l}{\sin 2\lambda l + \sinh 2\lambda l} \cos \xi \cosh \xi - \frac{\sin \lambda l \cosh \lambda l + \cos \lambda l \sinh \lambda l}{\sin 2\lambda l + \sinh 2\lambda l} \sin \xi \sinh \xi \right)。$$

$$\frac{\sin \lambda l \cosh \lambda l + \cos \lambda l \sinh \lambda l}{\sin 2\lambda l + \sinh 2\lambda l} \sin \xi \sinh \xi \Big)。$$

圆筒中间的挠度和两端的弯矩是

$$(w)_{\alpha=0} = \frac{q_0 R^2}{E\delta} \left(1 - 2 \frac{\sin \lambda l \cosh \lambda l + \cos \lambda l \sinh \lambda l}{\sin 2\lambda l + \sinh 2\lambda l} \right),$$

$$(M_1)_{\alpha=\pm l} = -\frac{q_0}{2\lambda^2} \frac{\sinh 2\lambda l - \sin 2\lambda l}{\sinh 2\lambda l + \sin 2\lambda l}。$$

假定圆筒的两端是自由端，则边界条件为

$$(M_1)_{\alpha=\pm l} = 0, \quad (F_{s1})_{\alpha=\pm l} = 0。$$

按照(20-16)式及(20-19)式，上列条件可以变换成为

$$\left(\frac{d^2 w}{d\xi^2} \right)_{\xi=\pm\lambda l} = 0, \quad \left(\frac{d^3 w}{d\xi^3} \right)_{\xi=\pm\lambda l} = 0。$$

将式(e)代入以后，显然将得到 C_1 和 C_4 的两个齐次线性方程，从而得到 $C_1 = C_4 = 0$ 。于是得出解答

$$w = \frac{q_0 R^2}{E\delta}, \quad F_{T1} = 0,$$

$$F_{T2} = \frac{E\delta w}{R} = q_0 R, \quad F_{T12} = 0,$$

$$M_1 = M_2 = M_{12} = F_{s1} = F_{s2} = 0。$$

和 § 20-2 中的无矩解答(20-6)相同。

§ 20-7 轴对称弯曲问题的简化解答

在轴对称的弯曲问题中，基本微分方程(20-17)的解答也可以取为如下的形式：

$$w = e^{-\xi} (C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi) + e^{\xi} (C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi) + w^*。 \quad (a)$$

为了分析边缘效应，设有半无限长的圆筒，受有沿边界均匀分布的弯矩 M_0 及剪力 F_{s0} ，图 20-9。因为这里有 $q_3 = 0$ ，所以特解可以取为 $w^* = 0$ 。另一方面，按照圣维南原理，在远离这些自成平衡的荷载之处，应力可以不计，因而内力可以不计。由(20-19)中的第二式可见，中面位移 w 也可以不计，也就是说，当 ξ 趋于无限大时， w 应当趋于零。因此，式(a)中的 C_3 和 C_4 应当等于零。于是解答(a)简化为

$$w = e^{-\xi} (C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi)。 \quad (b)$$

边界条件是

$$(M_1)_{\xi=0} = -\lambda^2 D \left(\frac{d^2 w}{d\xi^2} \right)_{\xi=0} = M_0,$$

$$(F_{S1})_{\xi=0} = -\lambda^3 D \left(\frac{d^3 w}{d\xi^3} \right)_{\xi=0} = F_{S0}$$

将式(b)代入, 求解 C_1 及 C_2 , 再代回式(b), 即得解答

$$w = \frac{1}{2\lambda^3 D} e^{-\xi} [-\lambda M_0 (\cos \xi - \sin \xi) - F_{S0} \cos \xi], \quad (c)$$

为了便于应用上列解答, 引用如下的四个特殊函数:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi) &= e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi), & f_2(\xi) &= e^{-\xi} \sin \xi, \\ f_3(\xi) &= e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi), & f_4(\xi) &= e^{-\xi} \cos \xi. \end{aligned} \right\} \quad (20-20)$$

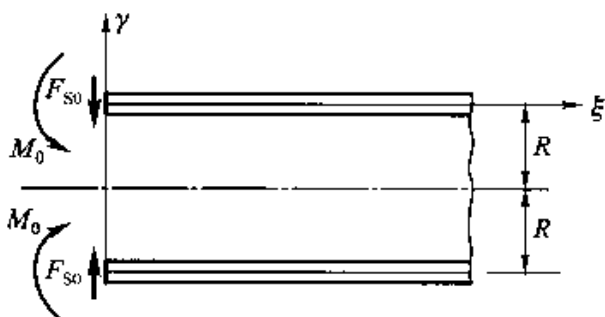


图 20-9

注意它们之间的微分关系

$$\left. \begin{aligned} f_1'(\xi) &= -2f_2(\xi), & f_2'(\xi) &= f_3(\xi), \\ f_3'(\xi) &= -2f_4(\xi), & f_4'(\xi) &= -f_1(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (20-21)$$

并利用表达式(20-19), 可将中面位移 w 、转角 θ_1 (即 $\frac{dw}{d\alpha}$)、弯矩 M_1 及剪力 F_{S1} 用上列四个特殊函数表示如下:

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{M_0}{2\lambda^2 D} f_3(\xi) - \frac{F_{S0}}{2\lambda^3 D} f_4(\xi), \\ \theta_1 &= \frac{dw}{d\alpha} = \lambda \frac{dw}{d\xi} = \frac{F_{S0}}{2\lambda^2 D} f_1(\xi) + \frac{M_0}{\lambda D} f_4(\xi), \\ M_1 &= M_0 f_1(\xi) + \frac{F_{S0}}{\lambda} f_2(\xi), \\ F_{S1} &= F_{S0} f_3(\xi) - 2\lambda M_0 f_2(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (20-22)$$

四个特殊函数的数值, 可在表 20-1 中按 ξ 的数值查得。

由表 20-1 可见, 当 $\xi = \lambda\alpha$ 充分增大时, 四个特殊函数取值很小, 这就表示, 法向位移及弯曲内力都是局部性的。当 $\xi = \lambda\alpha > \pi$ 时, 每个特殊函数的绝

对值都小于它的最大绝对值的 5%。这时,

$$\alpha > \pi/\lambda = \pi \left[\frac{R^2 \delta^2}{3(1-\mu^2)} \right]^{1/4} = 2.0 \sqrt{R\delta} \text{ 至 } 2.5 \sqrt{R\delta}。$$

这就是说, 在离开受力端的距离超过 $2.0 \sqrt{R\delta}$ 至 $2.5 \sqrt{R\delta}$ 之处, 法向位移和弯曲内力都可以不计。例如, 设 $R = 100 \text{ cm}$, $\delta = 1 \text{ cm}$, 则在离开受力端远于 20-25 cm 处, 法向位移及弯曲内力即可不计。公式 (20-22) 可以用来分析边缘效应。

表 20-1 函数 f_1 、 f_2 、 f_3 、 f_4 的数值

ξ	$f_1(\xi)$	$f_2(\xi)$	$f_3(\xi)$	$f_4(\xi)$
0	1.000	0.000	1.000	1.000
0.1	0.991	0.090	0.810	0.900
0.2	0.965	0.163	0.640	0.802
0.3	0.927	0.219	0.489	0.708
0.4	0.878	0.261	0.356	0.617
0.5	0.823	0.291	0.242	0.532
0.6	0.763	0.310	0.143	0.453
0.7	0.700	0.320	0.060	0.380
0.8	0.635	0.322	-0.009	0.313
0.9	0.571	0.319	-0.066	0.253
1.0	0.508	0.310	-0.111	0.199
1.1	0.448	0.297	-0.146	0.151
1.2	0.390	0.281	-0.172	0.109
1.3	0.336	0.263	-0.190	0.073
1.4	0.285	0.243	-0.201	0.042
1.5	0.238	0.223	-0.207	0.016
1.6	0.196	0.202	-0.208	-0.006
1.7	0.158	0.181	-0.205	-0.024
1.8	0.123	0.161	-0.199	-0.038
1.9	0.093	0.142	-0.190	-0.048
2.0	0.067	0.123	-0.179	-0.056
2.1	0.044	0.106	-0.168	-0.062
2.2	0.024	0.090	-0.155	-0.065
2.3	0.008	0.075	-0.142	-0.067
2.4	0.006	0.061	-0.128	-0.067
2.5	-0.017	0.049	-0.115	-0.066
2.6	-0.025	0.038	-0.102	-0.064
2.7	-0.032	0.029	-0.090	-0.061
2.8	-0.036	0.020	-0.078	-0.057

续表

ξ	$f_1(\xi)$	$f_2(\xi)$	$f_3(\xi)$	$f_4(\xi)$
2.9	-0.040	0.013	-0.067	-0.053
3.0	-0.042	0.007	-0.056	-0.049
3.1	-0.043	0.002	-0.047	-0.045
3.2	-0.043	-0.002	-0.038	-0.041
3.3	-0.042	-0.006	-0.031	-0.036
3.4	-0.041	-0.009	-0.024	-0.032
3.5	-0.039	-0.011	-0.018	-0.028
3.6	-0.037	-0.012	-0.012	-0.025
3.7	-0.034	-0.013	-0.008	-0.021
3.8	-0.031	-0.014	-0.004	-0.018
3.9	-0.029	-0.014	-0.001	-0.016
4.0	-0.026	-0.014	-0.002	-0.012

§ 20-8 容器柱壳的简化计算

对于很多的容器柱壳，进行计算时，都可以利用上一节中所述的简化解答，或者再和无矩解答相叠加。得出的成果一般都能符合工程上对精度的要求，而所费的工作量却很小。

例如，设有很长的圆筒，在其某一横截面上受有沿环向均匀分布的法向荷载 F ，图 20-10。假定荷载至圆筒两端的距离较远（例如大于 $2.5\sqrt{R\delta}$ ），即可利用前一节中的简化解答。由对称性可见，在荷载 F 右边的相邻横截面上，剪力为 $F_{s0} = F/2$ 。于是圆筒右半部分的 w 、 θ_1 、 M_1 、 F_{s1} 可按 (20-22) 式写出：

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{M_0}{2\lambda^2 D} f_3(\xi) - \frac{F}{4\lambda^3 D} f_4(\xi), \\ \theta_1 &= \frac{F}{4\lambda^2 D} f_1(\xi) + \frac{M_0}{\lambda D} f_4(\xi), \\ M_1 &= M_0 f_1(\xi) + \frac{F}{2\lambda} f_2(\xi), \\ F_{s1} &= \frac{F}{2} f_3(\xi) - 2\lambda M_0 f_2(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

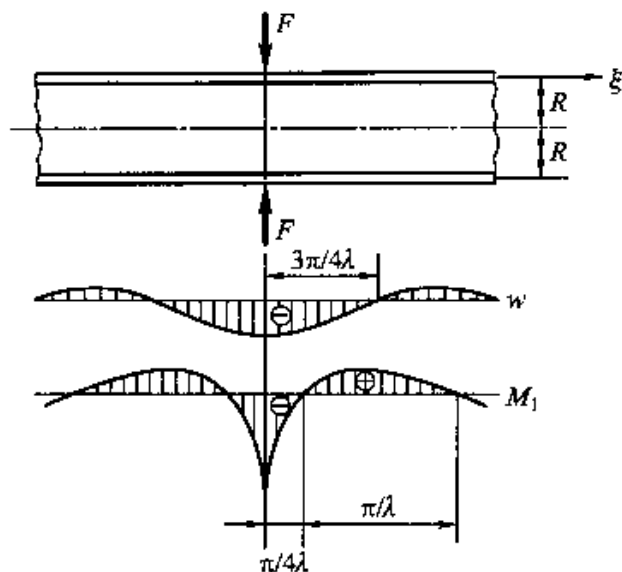


图 20 - 10

为了求得 M_0 ，可利用对称条件

$$(\theta_1)_{\xi=0} = 0。$$

将(a)中的第二式代入，注意在 $\xi = 0$ 时有 $f_1 = f_4 = 1$ ，即得

$$\frac{F}{4\lambda^2 D} + \frac{M_0}{\lambda D} = 0，$$

从而得到 $M_0 = -F/4\lambda$ 。代回式(a)，并利用(20-20)式，即得

$$w = \frac{F}{8\lambda^3 D} [f_3(\xi) - 2f_4(\xi)] = -\frac{F}{8\lambda^3 D} f_1(\xi)，$$

$$\theta_1 = \frac{F}{4\lambda^2 D} [f_1(\xi) - f_4(\xi)] = \frac{F}{4\lambda^2 D} f_2(\xi)，$$

$$M_1 = -\frac{F}{4\lambda} [f_1(\xi) - 2f_2(\xi)] = -\frac{F}{4\lambda} f_3(\xi)，$$

$$F_{s1} = \frac{F}{2} [f_3(\xi) + f_2(\xi)] = \frac{F}{2} f_4(\xi)。$$

在荷载作用处，挠度 w 及弯矩 M_1 的绝对值最大，分别为 $F/8\lambda^3 D$ 及 $F/4\lambda$ 。挠度及弯矩的变化大致如图 20 - 10 所示。

又例如，对于图 20 - 2 中的圆筒，已在 § 20 - 2 中求得无矩解答中的中面法向位移及转角为

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\rho g R^2 (L - \alpha)}{E\delta} = \frac{\rho g R^2}{E\delta} \left(L - \frac{\xi}{\lambda} \right)， \\ \theta_1 &= \frac{dw}{d\alpha} = -\frac{\rho g R^2}{E\delta}。 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

设该圆筒的下端为夹支边，则在该端将有弯矩 M_0 及剪力 F_{s0} 。假定 $L > 2.5\sqrt{R\delta}$ ，将

式(b)所示的无矩解答与(20-22)式相叠加, 得到

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\rho g R^2}{E\delta} \left(L - \frac{\xi}{\lambda} \right) - \frac{M_0}{2\lambda^2 D} f_3(\xi) - \frac{F_{s0}}{2\lambda^3 D} f_4(\xi), \\ \theta_1 &= -\frac{\rho g R^2}{E\delta} + \frac{F_{s0}}{2\lambda^2 D} f_1(\xi) + \frac{M_0}{\lambda D} f_4(\xi), \\ M_1 &= M_0 f_1(\xi) + \frac{F_{s0}}{\lambda} f_2(\xi), \\ F_{s1} &= F_{s0} f_3(\xi) - 2\lambda M_0 f_2(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

在固定端, 有边界条件

$$(w)_{\xi=0} = 0, \quad (\theta_1)_{\xi=0} = 0。$$

将(c)中的前二式代入, 并注意在 $\xi=0$ 时有 $f_1=f_3=f_4=1$, 即得

$$\frac{\rho g R^2 L}{E\delta} - \frac{M_0}{2\lambda^2 D} - \frac{F_{s0}}{2\lambda^3 D} = 0, \quad -\frac{\rho g R^2}{E\delta} + \frac{F_{s0}}{2\lambda^2 D} + \frac{M_0}{\lambda D} = 0。$$

求解 M_0 及 F_{s0} , 得到

$$M_0 = -\frac{2\rho g R^2 D \lambda}{E\delta} (\lambda L - 1) = -\frac{\rho g R \delta L}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \left(1 - \frac{1}{\lambda L} \right),$$

$$F_{s0} = \frac{2\rho g R^2 D \lambda^2}{E\delta} (2\lambda L - 1) = \frac{\rho g R \delta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} (2\lambda L - 1)。$$

代回式(c), 利用表 20-1, 极易求得圆筒的位移及内力。中面法向位移 w 及弯矩 M_1 沿纵向的变化大致如图 20-11 所示。

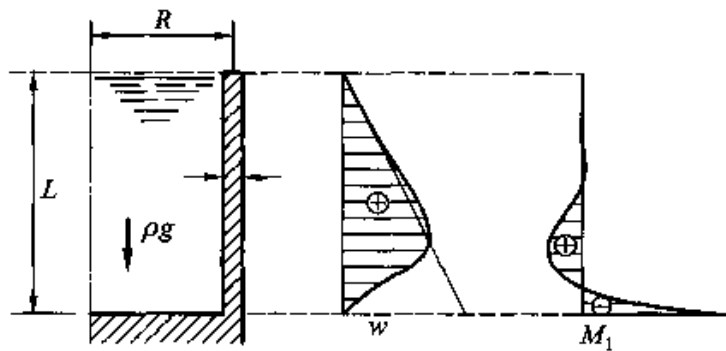


图 20-11

§ 20-9 圆柱壳在任意荷载下的弯曲

现在假定圆柱壳受的是任意荷载, 因此, 在计算时, 只能应用圆柱壳的

般形式的基本微分方程，即方程(20-11)。为了求解该方程，仍然可以引用位移函数 $F(\alpha, \beta)$ ，但须将中面位移表示成为如下的形式：

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) F + \mu^* , \\ v &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (2 + \mu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] F + v^* , \\ w &= R \nabla^4 F + w^* , \end{aligned} \right\} \quad (20-23)$$

其中 $u^* = u^*(\alpha, \beta)$ 、 $v^* = v^*(\alpha, \beta)$ 、 $w^* = w^*(\alpha, \beta)$ 为微分方程(20-11)的任一特解。这些特解可以按照 q_1 、 q_2 、 q_3 的函数形式根据微分方程(20-11)的要求来选取。将(20-23)式代入方程(20-11)，可见其中的前两个方程总能满足，而第三个方程要求

$$\nabla^8 F + \frac{E\delta}{R^2 D} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} = 0 \quad (20-24)$$

为了用位移函数 F 来表示内力，只须将(20-23)式代入弹性方程(20-9)。这样就得到

$$\left. \begin{aligned} F_{T_1} &= E\delta \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u^*}{\partial \alpha} + \mu \left(\frac{\partial v^*}{\partial \beta} + \frac{w^*}{R} \right) \right] , \\ F_{T_2} &= E\delta \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} + \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial v^*}{\partial \beta} + \frac{w^*}{R} \right) + \mu \frac{\partial u^*}{\partial \alpha} \right] , \\ F_{T_{12}} &= -E\delta \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \beta} + \frac{\partial v^*}{\partial \alpha} \right) , \end{aligned} \right\} \quad (20-25)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -RD \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \left(\nabla^4 F + \frac{w^*}{R} \right) , \\ M_2 &= -RD \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \left(\nabla^4 F + \frac{w^*}{R} \right) , \\ M_{12} &= -(1-\mu) RD \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\nabla^4 F + \frac{w^*}{R} \right) , \\ F_{S_1} &= -D \frac{\partial}{\partial \alpha} (R \nabla^6 F + \nabla^2 w^*) , \\ F_{S_2} &= -D \frac{\partial}{\partial \beta} (R \nabla^6 F + \nabla^2 w^*) . \end{aligned} \right\} \quad (20-26)$$

通过(20-23)式、(20-25)式及(20-26)式，该柱壳的边界条件都可以用位移函数 F 来表示。在边界条件下由微分方程(20-24)解出 F 以后，就可以用(20-23)式求得中面位移，用(20-25)式及(20-26)式求得薄膜内力及平板内力。

随着边界条件及荷载方向的不同，须用不同的方法进行具体求解。下一节中将以常见情况下的顶盖柱壳为例，说明上述方法的应用。

§ 20-10 顶盖柱壳的三角级数解答

一般的顶盖柱壳，都是在两端简支的。当它受有任意荷载时，都可以用单三角级数求解它的位移和内力。图 20-12 就表示这样一个柱壳，它的纵向边长是 a ，环向边长是 $2\beta_1$ ，在 $\alpha=0$ 及 $\alpha=a$ 处的边界是简支边，在 $\beta=\pm\beta_1$ 处的边界是任意边，受有任意荷载 $q_1(\alpha, \beta)$, $q_2(\alpha, \beta)$, $q_3(\alpha, \beta)$ 。

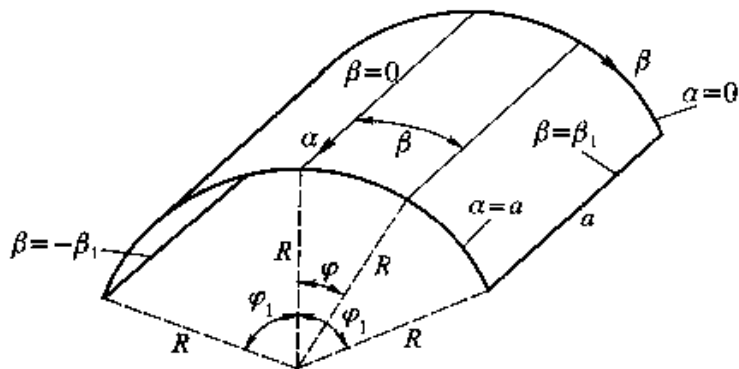


图 20-12

把位移函数取为 α 的单三角级数如下：

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\beta) \sin \lambda_m \alpha, \quad (\text{a})$$

其中 $\lambda_m = m\pi/a$ 。另一方面，把中面位移的特解也取为 α 的单三角级数如下：

$$\left. \begin{aligned} u^*(\alpha, \beta) &= \sum_{m=0}^{\infty} U_m^*(\beta) \cos \lambda_m \alpha, \\ v^*(\alpha, \beta) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m^*(\beta) \sin \lambda_m \alpha, \\ w^*(\alpha, \beta) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m^*(\beta) \sin \lambda_m \alpha_c \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

现在，观察(20-23)式、(20-25)式及(20-26)式，可见有

$$(F_{T1}, v, w, M_1)_{\alpha=0} = 0, \quad (F_{T1}, v, w, M_1)_{\alpha=a} = 0.$$

这就是说，柱壳两端的边界条件是满足的。

为了能从基本微分方程(20-11)求得 U_m^* 、 V_m^* 、 W_m^* ，还必须把荷载分量 q_1 、 q_2 、 q_3 也展为如下的三角级数：

$$\left. \begin{aligned} q_1(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\beta) \cos \lambda_n \alpha, \\ q_2(\alpha, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\beta) \sin \lambda_n \alpha, \\ q_3(\alpha, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\beta) \sin \lambda_n \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

其中的 X_m, Y_m, Z_m 可以按照傅立叶级数展开公式计算如下:

$$\left. \begin{aligned} X_m(\beta) &= \frac{2}{a} \int_0^a q_1(\alpha, \beta) \cos \lambda_m \alpha d\alpha, \\ Y_m(\beta) &= \frac{2}{a} \int_0^a q_2(\alpha, \beta) \sin \lambda_m \alpha d\alpha, \\ Z_m(\beta) &= \frac{2}{a} \int_0^a q_3(\alpha, \beta) \sin \lambda_m \alpha d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

现在, 将式(b)所示的 u^*, v^*, w^* 作为 u, v, w 代入(20-11)式, 同时将式(c)也代入, 就得到 U_m^*, V_m^*, W_m^* 所应满足的常微分方程

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1-\mu}{2} \frac{d^2}{d\beta^2} - \lambda_m^2 \right) U_m^* + \frac{1+\mu}{2} \lambda_m \frac{d}{d\beta} V_m^* + \frac{\mu \lambda_m}{R} W_m^* &= -\frac{1-\mu^2}{E\delta} X_m, \\ -\frac{1+\mu}{2} \lambda_m \frac{d}{d\beta} U_m^* + \left(\frac{d^2}{d\beta^2} - \frac{1-\mu}{2} \lambda_m^2 \right) V_m^* + \frac{1}{R} \frac{d}{d\beta} W_m^* &= -\frac{1-\mu^2}{E\delta} Y_m, \\ -\mu \lambda_m U_m^* + \frac{d}{d\beta} V_m^* + \frac{1}{R} W_m^* + \frac{R\delta^2}{12} \left(\frac{d^4}{d\beta^4} - 2\lambda_m^2 \frac{d^2}{d\beta^2} + \lambda_m^4 \right) W_m^* &= \frac{(1-\mu^2)R}{E\delta} Z_m. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

对于任一整数 m , 都可以按照式(e)选取 U_m^*, V_m^*, W_m^* 。

例如, 设柱壳只受有自重, 在每单位面积上为常量 q_0 , 则有

$$q_1 = 0, \quad q_2 = q_0 \sin \varphi = q_0 \sin \frac{\beta}{R}, \quad q_3 = -q_0 \cos \varphi = -q_0 \cos \frac{\beta}{R}.$$

代入式(d), 得

$$\begin{aligned} X_m &= 0, & Y_m &= \frac{4q_0}{\lambda_m a} \sin \frac{\beta}{R} = \frac{4q_0}{m\pi} \sin \frac{\beta}{R}, \\ Z_m &= -\frac{4q_0}{\lambda_m a} \cos \frac{\beta}{R} = -\frac{4q_0}{m\pi} \cos \frac{\beta}{R}. \end{aligned} \quad (m = 1, 3, 5, \dots)$$

取

$$U_m^* = A_m \cos \frac{\beta}{R}, \quad V_m^* = B_m \sin \frac{\beta}{R}, \quad W_m^* = C_m \cos \frac{\beta}{R}$$

代入式(e), 可以得出常数 A_m, B_m, C_m 的三个线性方程, 从而求得这三个常数。

又例如, 设柱壳受有铅直荷载, 沿 α 方向均匀分布, 而沿 β 方向按 $\cos \varphi =$

$\cos \frac{\beta}{R}$ 变化(雪荷载的简单表示), 则荷载分量为

$$q_1 = 0, \quad q_2 = q_0 \sin \frac{\beta}{R} \cos \frac{\beta}{R} = \frac{q_0}{2} \sin \frac{2\beta}{R},$$

$$q_3 = -q_0 \cos^2 \frac{\beta}{R} = -\frac{q_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\beta}{R} \right),$$

其中 q_0 为 $\beta = 0$ 处的荷载集度。代入式(d), 得到

$$X_m = 0, \quad Y_m = \frac{2}{m\pi} q_0 \sin \frac{2\beta}{R}, \quad Z_m = -\frac{2}{m\pi} q_0 \left(1 + \cos \frac{2\beta}{R} \right). \quad (m = 1, 3, 5, \dots)$$

取

$$U_m^* = A_m + B_m \cos \frac{2\beta}{R}, \quad V_m^* = C_m \sin \frac{2\beta}{R},$$

$$W_m^* = D_m + E_m \cos \frac{2\beta}{R}.$$

代入式(e), 可以得出常数 A_m, B_m, C_m, D_m, E_m 的五个线性方程, 从而求得这五个常数。

为了求出函数 $\psi_m(\beta)$, 将式(a)代入(20-24), 得常微分方程

$$\left[\left(\frac{d^2}{d\beta^2} - \lambda_m^2 \right)^4 + \frac{E\delta}{R^2 D} \lambda_m^4 \right] \psi_m(\beta) = 0.$$

参阅 § 20-5 中的式(h), 可见这一常微分方程的解答可以取为

$$\begin{aligned} \psi_m(\beta) = & C_{1m} \cosh a_m \beta \sin b_m \beta + C_{2m} \cosh a_m \beta \cos b_m \beta + C_{3m} \sinh a_m \beta \cos b_m \beta \\ & + C_{4m} \sinh a_m \beta \sin b_m \beta + C_{5m} \cosh c_m \beta \sin d_m \beta + C_{6m} \cosh c_m \beta \cos d_m \beta \\ & + C_{7m} \sinh c_m \beta \cos d_m \beta + C_{8m} \sinh c_m \beta \sin d_m \beta, \end{aligned} \quad (f)$$

其中的 a_m, b_m, c_m, d_m 决定于特征方程

$$(r_m^2 - \lambda_m^2)^4 + \frac{E\delta}{R^2 D} \lambda_m^4 = 0$$

的四对复根

$$r_m = a_m \pm ib_m, \quad -a_m \pm ib_m, \quad c_m \pm id_m, \quad -c_m \pm id_m$$

将式(a)及式(b)代入(20-23)式、(20-25)式及(20-26)式, 得

$$u = \sum_m U_m \cos \lambda_m \alpha, \quad v = \sum_m V_m \sin \lambda_m \alpha, \quad w = \sum_m W_m \sin \lambda_m \alpha,$$

$$F_{T1} = \frac{E\delta}{1-\mu^2} \sum_m \left(-\lambda_m U_m + \mu \frac{d}{d\beta} V_m + \frac{\mu}{R} W_m \right) \sin \lambda_m \alpha,$$

$$F_{T2} = \frac{E\delta}{1-\mu^2} \sum_m \left(-\mu \lambda_m U_m + \frac{d}{d\beta} V_m + \frac{1}{R} W_m \right) \sin \lambda_m \alpha,$$

$$F_{T12} = \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \sum_m \left(\frac{d}{d\beta} U_m + \lambda_m V_m \right) \cos \lambda_m \alpha,$$

$$M_1 = D \sum_m \left(\lambda_m^2 W_m - \mu \frac{d^2}{d\beta^2} W_m \right) \sin \lambda_m \alpha,$$

$$M_2 = D \sum_m \left(\mu \lambda_m^2 W_m - \frac{d^2}{d\beta^2} W_m \right) \sin \lambda_m \alpha,$$

$$M_{12} = (1 - \mu) D \sum_m \left(-\lambda_m \frac{d}{d\beta} W_m \right) \cos \lambda_m \alpha,$$

$$F_{S2} = D \sum_m \left(\lambda_m^2 \frac{d}{d\beta} W_m - \frac{d^3}{d\beta^3} W_m \right) \sin \lambda_m \alpha,$$

$$F_{S1} = D \sum_m \left(\lambda_m^3 W_m - \lambda_m \frac{d^2}{d\beta^2} W_m \right) \cos \lambda_m \alpha,$$

其中

$$U_m = \lambda_m \frac{d^2}{d\beta^2} \psi_m + \mu \lambda_m^3 \psi_m + U_m^*,$$

$$V_m = (2 + \mu) \lambda_m^2 \frac{d}{d\beta} \psi_m - \frac{d^3}{d\beta^3} \psi_m + V_m^*,$$

$$W_m = R \left(\lambda_m^4 \psi_m - 2 \lambda_m^2 \frac{d^2}{d\beta^2} \psi_m + \frac{d^4}{d\beta^4} \psi_m \right) + W_m^*.$$

由上列各式可见，用中面位移或内力表示的、在 $\beta = \pm\beta_1$ 处的边界条件，可以改用 U_m 、 V_m 、 W_m 来表示，从而用 ψ_m 来表示。这样就可以得出常数 C_{1m} 至 C_{8m} 的八元联立方程组，用来决定这些常数，从而决定 ψ_m ，然后用上列各式求得中面位移及内力。

§ 20-11 顶盖柱壳的半无矩理论及梁理论

由上一节中可见，顶盖柱壳的计算是相当繁的。因此，在建筑工程上出现了种种不同的简化算法。这些简化算法，是针对不同的实际情况，采用一些由精确计算或实践经验得来的附加假定，把薄壳理论中的方程再度简化而得出的。本节中主要是介绍符拉索夫首先提出的所谓半无矩理论，附带提一下梁理论。

图 20-13 所示的顶盖柱壳是两端简支、纵边自由、复盖面积为长 a 宽 b 的矩形。如果比值 a/b 大于 1.5，纵向荷载 $q_1 = 0$ ，环向荷载及法向荷载都只沿环向变化，即 $q_2 = q_2(\beta)$ ， $q_3 = q_3(\beta)$ ，就可以按照半无矩理论进行计算。

在半无矩理论中，采用如下的附加假定：(1) 在内力方面，在 α 为常量的横截面上，弯矩和扭矩可以不计，也就是取 $M_1 = M_{12} = 0$ (因此有“半无矩”理论

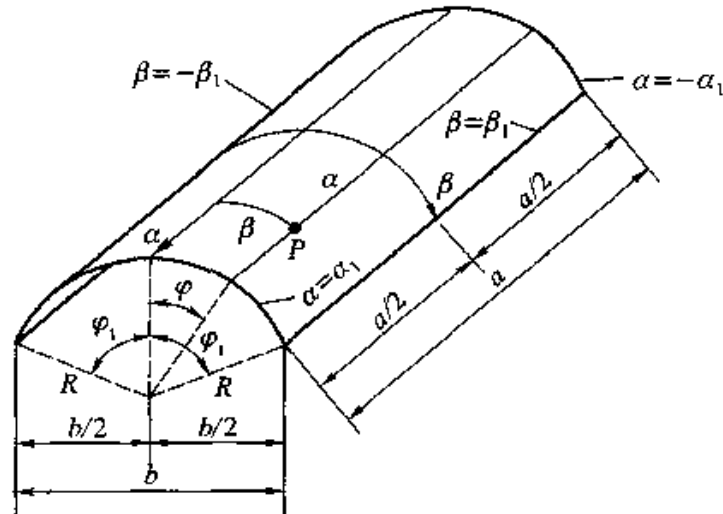


图 20-13

这个称呼)。(2)在形变方面,可以不计中面的环向线应变和切应变,也就是取 $\epsilon_2 = \epsilon_{12} = 0$,并且可以不计环向曲率的改变,也就是取 $\chi_2 = 0$ (于是 α 为常量的横截面的中线不变形,而且保持垂直于纵线)。(3)在弹性方面,可以不计泊松比的影响,也就是取 $\mu = 0$ 。

在上述附加假定之下,平衡微分方程(20-7)中的最后一式成为 $F_{s_1} = 0$,而其余四式成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{T_1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_{T_{12}}}{\partial \beta} = 0, & \quad \frac{\partial F_{T_2}}{\partial \beta} + \frac{\partial F_{T_{12}}}{\partial \alpha} + q_2(\beta) = 0, \\ -\frac{F_{T_2}}{R} + \frac{\partial F_{s_2}}{\partial \beta} + q_3(\beta) = 0, & \quad \frac{\partial M_2}{\partial \beta} - F_{s_2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

物理方程(19-19)成为

$$\left. \begin{aligned} F_{T_1} = E\delta\epsilon_1, & \quad F_{T_2} = 0, & \quad F_{T_{12}} = 0, \\ \chi_1 = 0, & \quad M_2 = 0, & \quad \chi_{12} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

这六个方程中的后五个都必须放弃,因为 F_{T_2} 、 $F_{T_{12}}$ 、 χ_1 、 M_2 、 χ_{12} 并没有被假定等于零(实际情况也不容许假定它们等于零)。

几何方程(20-8)成为

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, & \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= 0, \\ \chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} &= 0, & \chi_{12} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned}$$

这些方程中的第四个和最后一个可以用来由 w 求得 χ_1 及 χ_{12} ,但在分析问题时可不过问。将其中第一个方程代入(b)中的第一式,可以消去 ϵ_1 而得到

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{F_{T_1}}{E\delta} = 0.$$

于是由物理方程及几何方程得出可用而又需用的方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{F_{T1}}{E\delta} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} &= 0. \end{aligned} \quad (c)$$

现在, 式(a)及式(c)中共有 8 个方程, 包含 8 个未知函数 F_{T1} 、 F_{T2} 、 F_{T12} 、 F_{T21} 、 M_2 、 F_{S2} 、 u 、 v 、 w , 可以在适当的边界条件下求解。

这里的边界条件, 按照(19-27)式, 本来应当是

$$(F_{T1}, v, w, M_1)_{\alpha = \pm \alpha_1} = 0, \quad (d)$$

$$(F_{T2}, F_{T12}, F_{S2}, M_2)_{\beta = \pm \beta_1} = 0. \quad (e)$$

由于假定了 $M_1 = 0$, $(M_1)_{\alpha = \pm \alpha_1} = 0$ 已经满足, $\alpha = \pm \alpha_1$ 处的边界条件成为不充分。但是, 所缺的边界条件可以由对称条件 $(F_{T12})_{\alpha=0} = 0$ 及 $(u)_{\alpha=0} = 0$ 来补充, 也就是用如下的条件来代替条件(d):

$$(F_{T1}, v, w)_{\alpha = \pm \alpha_1} = 0, \quad (F_{T12})_{\alpha=0} = 0, \quad (u)_{\alpha=0} = 0. \quad (f)$$

于是, 微分方程(a)和(c)可以在边界条件(e)和(f)之下求解。

为了计算方便, 引用量纲为一的坐标

$$\xi = \frac{\alpha}{R}, \quad \varphi = \frac{\beta}{R}.$$

注意

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\quad) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi}(\quad), \quad \frac{\partial}{\partial \beta}(\quad) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\quad),$$

则微分方程(a)和(c)可以变换成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{T1}}{\partial \xi} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial F_{T2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial \xi} + Rq_2(\varphi) &= 0, \\ -F_{T2} + \frac{\partial F_{S2}}{\partial \varphi} + Rq_3(\varphi) &= 0, & \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - RF_{S2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{RF_{T1}}{E\delta} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

而边界条件(e)和(f)可以变换成为

$$(F_{T2}, F_{T12}, F_{S2}, M_2)_{\varphi = \pm \varphi_1} = 0, \quad (20-27)$$

$$(F_{T1}, v, w)_{\xi = \pm \xi_1} = 0, \quad (F_{T12})_{\xi=0} = 0, \quad (u)_{\xi=0} = 0, \quad (20-28)$$

其中 $\xi_1 = \alpha_1/R = a/2R$ 。

由于这里对柱壳假定了 $\mu = 0$, 又假定了 α 为常量的横截面的中线不变形而且保持垂直于纵线, 和材料力学中对于直梁的假定相同, 所以我们可以猜测柱

壳的这种横截面上的正应力 σ_1 ，和直梁横截面上的弯应力一样，是和这种横截面上的弯矩 M 成正比。但是，由于柱壳所受的荷载沿纵向均匀分布，弯矩图是按对称的抛物线变化，所以 M 是正比于 $\alpha^2 - \alpha_1^2$ ，也就是正比于 $\xi^2 - \xi_1^2$ 。再注意柱壳这种横截面上的内力 M_1 已经被假定等于零，可见上述的这个弯矩 M 只是 F_{T1} 即 $\delta\sigma_1$ 的合成，而 F_{T1} 也就正比于 $\xi^2 - \xi_1^2$ 。据此，我们假设

$$F_{T1} = (\xi^2 - \xi_1^2)f(\varphi)。 \quad (h)$$

顺便指出，这个 F_{T1} 已经满足了边界条件

$$(F_{T1})_{\xi = \pm \xi_1} = 0。$$

将式(h)代入(g)中的第五式，得出 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ ，然后对 ξ 积分，并用边界条件

$$(u)_{\xi=0} = 0$$

来确定出现的任意函数 $f_1(\varphi)$ ，即得

$$u = \frac{R}{E\delta} \frac{(\xi^2 - 3\xi_1^2)\xi}{3} f(\varphi)。 \quad (i)$$

将式(i)代入(g)中的第七式，得出 $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ ，然后对 ξ 积分，并用边界条件

$$(v)_{\xi = \pm \xi_1} = 0$$

来确定出现的任意函数 $f_2(\varphi)$ ，即得

$$v = -\frac{R}{E\delta} \frac{(\xi^2 - \xi_1^2)(\xi^2 - 5\xi_1^2)}{12} f'(\varphi)。 \quad (j)$$

将式(j)代入(g)中的第六式，得

$$w = \frac{R}{E\delta} \frac{(\xi^2 - \xi_1^2)(\xi^2 - 5\xi_1^2)}{12} f''(\varphi)， \quad (k)$$

它已经满足了边界条件

$$(w)_{\xi = \pm \xi_1} = 0。$$

再将式(k)代入(g)中的第八式，得 $f'''(\varphi) = 0$ ，从而得

$$f(\varphi) = C_1\varphi^3 + C_2\varphi^2 + C_3\varphi + C_4。 \quad (l)$$

代入式(i)至式(k)，即得中面位移的表达式

$$u = \frac{R}{E\delta} \frac{(\xi^2 - 3\xi_1^2)\xi}{3} (C_1\varphi^3 + C_2\varphi^2 + C_3\varphi + C_4)， \quad (20-29)$$

$$v = -\frac{R}{E\delta} \frac{(\xi^2 - \xi_1^2)(\xi^2 - 5\xi_1^2)}{12} (3C_1\varphi^2 + 2C_2\varphi + C_3)， \quad (20-30)$$

$$w = \frac{R}{E\delta} \frac{(\xi^2 - \xi_1^2)(\xi^2 - 5\xi_1^2)}{6} (3C_1\varphi + C_2)。 \quad (20-31)$$

另一方面，将式(l)代入式(h)，得

$$F_{T1} = (\xi^2 - \xi_1^2)(C_1\varphi^3 + C_2\varphi^2 + C_3\varphi + C_4); \quad (20-32)$$

代入(g)中的第一式, 又可得

$$F_{T12} = -\xi \left(\frac{C_1}{2}\varphi^4 + \frac{2C_2}{3}\varphi^3 + C_3\varphi^2 + 2C_4\varphi + C_5 \right), \quad (20-33)$$

它已经满足了边界条件

$$(F_{T12})_{\xi=0} = 0。$$

有了 F_{T12} 的表达式(20-33), 即可通过积分, 依次用(g)中的第二式、第三式及第四式求得 F_{T2} 、 F_{S2} 及 M_2 的表达式如下:

$$F_{T2} = \frac{C_1}{10}\varphi^5 + \frac{C_2}{6}\varphi^4 + \frac{C_3}{3}\varphi^3 + C_4\varphi^2 + C_5\varphi + C_6 - R \int q_2(\varphi) d\varphi, \quad (20-34)$$

$$F_{S2} = \frac{C_1}{60}\varphi^6 + \frac{C_2}{30}\varphi^5 + \frac{C_3}{12}\varphi^4 + \frac{C_4}{3}\varphi^3 + \frac{C_5}{2}\varphi^2 + C_6\varphi + C_7 - R \iint q_2(\varphi) d\varphi^2 - R \int q_3(\varphi) d\varphi, \quad (20-35)$$

$$M_2 = R \left(\frac{C_1}{420}\varphi^7 + \frac{C_2}{180}\varphi^6 + \frac{C_3}{60}\varphi^5 + \frac{C_4}{12}\varphi^4 + \frac{C_5}{6}\varphi^3 + \frac{C_6}{2}\varphi^2 + C_7\varphi + C_8 \right) - R^2 \iiint q_2(\varphi) d\varphi^3 - R^2 \iint q_3(\varphi) d\varphi^2. \quad (20-36)$$

在这三个表达式中, 积分式的附加常数都可以取为零, 因为其中的 C_6 、 C_7 、 C_8 已经起了附加常数的作用。

总起来讲, 8个表达式(20-29)至(20-36)所示的8个未知函数已经满足了微分方程(g)和边界条件(20-28)。

8个任意常数 C_1 至 C_8 , 可以由边界条件(20-27)完全确定。在对称荷载的作用下, $q_2(\varphi)$ 是 φ 的奇函数, $q_3(\varphi)$ 是 φ 的偶函数, 因而 u 、 w 、 F_{T1} 、 F_{T2} 、 M_2 是 φ 的偶函数, 而 v 、 F_{T12} 、 F_{S2} 是 φ 的奇函数, 这时有 $C_1 = C_3 = C_5 = C_7 = 0$, 只须由四个方程求解 C_2 、 C_4 、 C_6 、 C_8 。在反对称荷载的作用下, $q_2(\varphi)$ 是 φ 的偶函数, $q_3(\varphi)$ 是 φ 的奇函数, 因而 u 、 w 、 F_{T1} 、 F_{T2} 、 M_2 是 φ 的奇函数, 而 v 、 F_{T12} 、 F_{S2} 是 φ 的偶函数, 这时有 $C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 0$, 也只须由4个方程求解 C_1 、 C_3 、 C_5 、 C_7 。对于一般的荷载, 可以把它分解成为对称和反对称的两组, 分别计算, 然后叠加。

本节中提供的解答, 系本书编者自行导出, 稍微不同于符拉索夫和日莫契金给出的解答(见日莫契金所著的《弹性理论》第七章第55及56节), 因为他们平衡微分方程(a)的第二式中保留了含有 F_{S2} 的一项, 使得方程和解答比较复杂些, 而在柱壳中, 这一项的影响很小, 本来是可以不计的。

用梁理论来计算顶盖柱壳, 是一个古老的近似算法, 但在目前还经常被采用。计算时, 把整个柱壳当做在两端支承的直梁, 用材料力学中的公式算出这个直梁的弯应力 σ_1 和切应力 τ_{12} , 从而算出内力 $F_{T1} = \delta\sigma_1$ 和 $F_{T12} = \delta\tau_{12}$, 然

后把柱壳分成弧形截条，当做拱圈，不计 M_1 及 M_{12} (因而 F_{s1} 也就等于零)，用结构力学中的方法计算内力 F_{r2} 、 F_{s2} 和 M_2 。

这个近似计算法的优点是：(1)在力学方面，只须应用材料力学和结构力学中的公式，可以完全不用弹性力学中的理论和公式；在数学方面，只须应用简单的积分公式，不须求解微分方程。(2)柱壳所受的荷载，可以是沿纵向也有变化的。(3)如果柱壳和边梁互相刚连，也可以把边梁和柱壳一起当做一根直梁来进行计算。

这个近似计算法的缺点是，只适用于较长的柱壳。由计算成果的分析比较，可见，为了不致发生工程上不容许的误差，柱壳复盖面积的边长比值 a/b 必须在 3.0 以上。

在 §20-3 中已经指出，对顶盖柱壳应用无矩理论，必须复盖面积的边长比值 a/b 小于 0.5。在本节中又已看到，对顶盖柱壳应用半无矩理论及梁理论，必须此项边长比值分别大于 1.5 及 3.0。于是，对于此项比值在 0.5 到 1.5 之间的顶盖柱壳，也就是复盖面积近似于正方形的顶盖柱壳，只好应用前一节中所述的计算方法。但是，既然复盖面积近似于正方形，就宜用双曲扁壳以代替柱壳，因为前者更能发挥壳的作用，在材料经济方面优于后者。双曲扁壳的计算方法见第二十二章。

习 题

20-1 设有水平圆筒，其半径为 R ，长度为 L ，图 20-14，每单位面积的重量为 q_0 ，在两端受横隔支承，两端的边界条件可以取为

$$(F_{T1})_{x=\pm L/2} = 0,$$

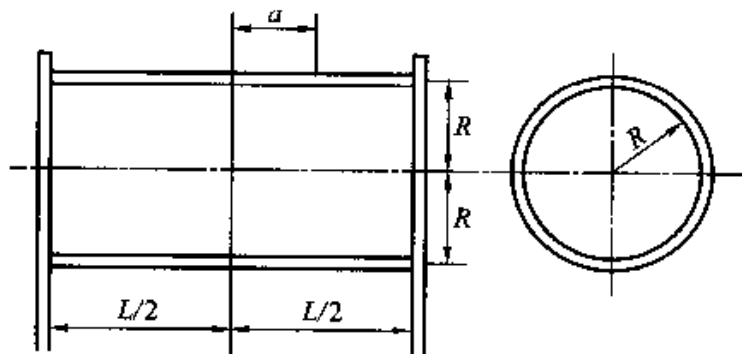


图 20-14

试求自重引起的无矩内力及纵向位移。

$$\text{答案: } F_{T1} = -\frac{q_0}{R} \left(\frac{L^2}{4} - a^2 \right) \cos \varphi,$$

$$u = -\frac{q_0}{E\delta R} \left(\frac{L^2}{4} - \frac{a^2}{3} - \mu R^2 \right) a \cos \varphi.$$

20-2 同上的圆筒问题, 但两端为固定端, 两端的边界条件可以取为

$$(u)_{\alpha=0, \pi/2} = 0.$$

答案: $F_{T1} = -\frac{q_0}{R} \left(\frac{L^2}{12} - a^2 + \mu R^2 \right) \cos \varphi_0.$

$$u = -\frac{q_0}{E\delta R} \left(\frac{L^2}{12} - \frac{a^2}{3} \right) a \cos \varphi_0.$$

20-3 设图 20-14 所示的水平圆筒, 其两端为固定端, 盛满密度为 ρ 的液体, 而圆筒中心线处的压力为 q_0 , 试求液体压力引起的无矩内力及纵向位移。

提示: $q_3 = q_0 - \rho g R \cos \varphi_0.$

答案: $F_{T1} = \mu q_0 R + \rho g \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{L^2}{24} - \mu R^2 \right) \cos \varphi,$

$$u = -\frac{\rho g}{6E\delta} \left(\frac{L^2}{4} - \alpha^2 \right) a \cos \varphi_0.$$

20-4 半径为 R 的圆筒, 其母线与铅直线成角 ψ , 内盛密度为 ρ 的液体图 20-15, 试求圆筒的无矩内力。

提示: 在 $a \leq R \tan \psi \cos \varphi$ 处, $q_3 = 0$;

在 $a \geq R \tan \psi \cos \varphi$ 处, $q_3 = \rho g (a \cos \psi - R \sin \psi \cos \varphi).$

答案: $F_{T12} = \rho g R (R \tan \psi \cos \varphi - a) \sin \psi \sin \varphi,$

$$F_{T1} = \frac{\rho g}{2} [a^2 \cos \varphi - 2R a \tan \psi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + R^2 \tan^2 \psi (\cos^2 \varphi - 2\sin^2 \varphi) \cos \varphi] \sin \psi.$$

20-5 设有开敞的四边简支的圆柱面薄壳, 半径为 6 m, 厚度为 0.1 m, 纵向边长及环向边长均为 $a = 3$ m, $\mu = 0.3$, 在中点受法向集中荷载 F , 试求最大法向位移, 并与曲率半径为无限大时(即薄板)的法向位移相比。

提示: 首先导出薄壳受集中荷载时, 法向位移的重三角级数表达式。

答案: 最大法向位移分别为 $0.0051 \frac{F a^2}{D}$ 及 $0.0116 \frac{F a^2}{D}.$

20-6 设有较短的圆筒 ($l < 2.0 \sqrt{R\delta}$), 图 20-16, 两端自由, 在中央受有沿环向均匀分布的法向荷载 F , 试求中面的法向位移 w 及各个内力。

答案: 在荷载作用处, $w = -\frac{FR^2 \lambda \cosh^2 \lambda l + \cos^2 \lambda l}{E\delta \sinh 2\lambda l + \sin 2\lambda l}.$

20-7 圆筒受均布内压力 q_0 , 图 20-17。设圆筒的长度很大, 试求靠近一端处的中面法向位移及各个内力, 假定: (1) 该端为简支端, (2) 该端为固定端。

答案: (1) $w = \frac{q_0 R^2}{E\delta} [1 - f_a(\xi)],$

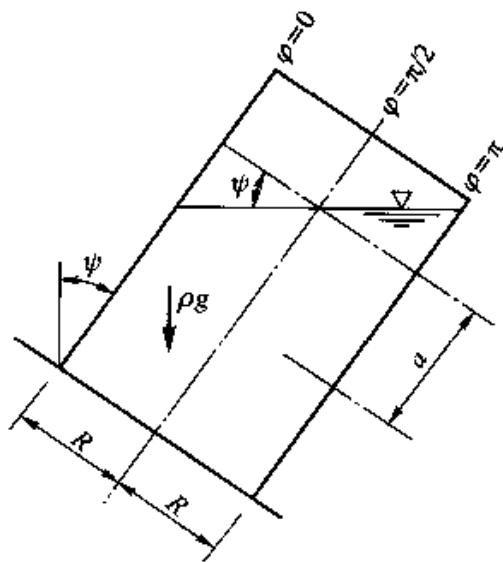


图 20-15

$$(2) \quad w = \frac{q_0 R^2}{E\delta} [1 - f_1(\xi)]。$$

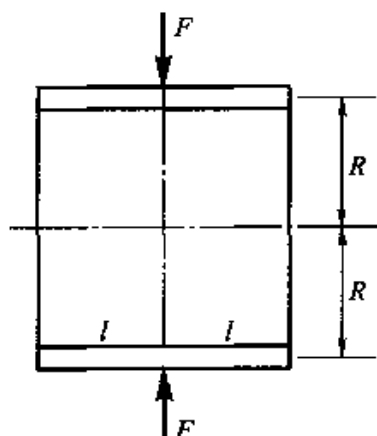


图 20-16

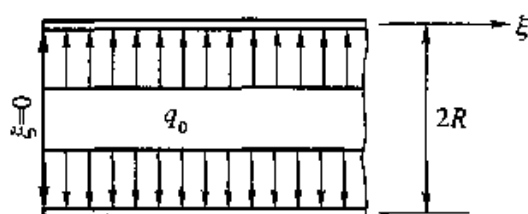


图 20-17

20-8 如图 20-13 所示的顶盖柱壳, 设纵向边长 $a = 3.6R$, $\varphi_1 = 60^\circ$ (即 $b = \sqrt{3}R$), 每单位面积受铅直荷载 q_0 , 试按半无矩理论计算内力

答案: F_{11} 的最大正值为 $25.57q_0R$, 最大负值为 $-12.79q_0R$; F_{12} 总是负的, 最大负值为 $-1.66q_0R$; M_2 总是正的, 最大正值为 $0.144q_0R^2$ 。

参 考 教 材

- [1] 诺沃日洛夫著. 薄壳理论[M]. 白鹏飞, 陈抡元, 崔孝秉, 冯家骢, 张孝寅译, 北京: 科学出版社, 1959: 第二章中的 §18 及 §19.
- [2] 铁木辛柯, 沃诺斯基著. 板壳理论[M]. 《板壳理论》翻译组译. 北京: 科学出版社, 1977: 第十五章中的第 114 至 117 节.

第二十一章 旋 转 壳

§ 21 - 1 中面的几何性质

以旋转面为中面的薄壳，称为旋转壳。旋转面是由平面曲线绕其平面内某一轴旋转而成的曲面，图 21 - 1a。这平面曲线上任意一点旋转而成的圆周，如圆周 MP ，称为平行圆或纬线。这平面曲线在旋转时的任一位置，例如 MN ，称为子午线或经线。子午线所在的平面，如 $MNOT$ ，称为子午面，图 21 - 1a 及图 21 - 1b。

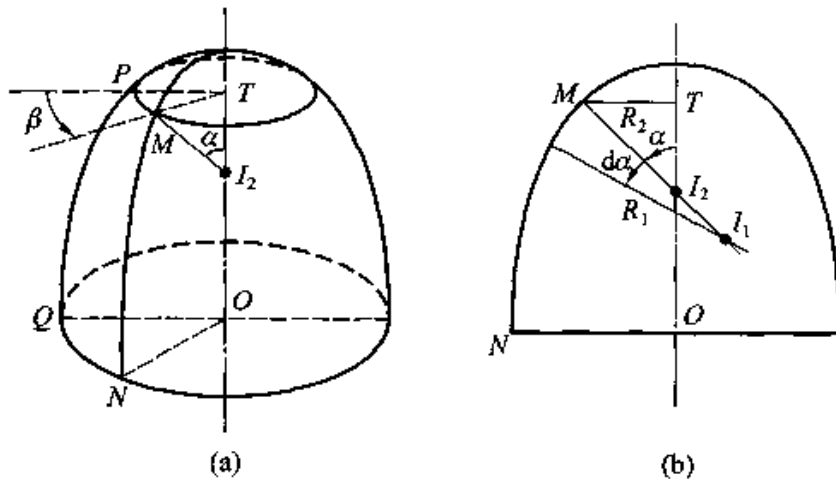


图 21 - 1

因为纬线和经线是旋转面的主曲率线，所以我们取纬线和经线为坐标线，以任意一点 M 处的中面法线与旋转轴所成的角为该点的 α 坐标，以该点处的子午面与某一基准子午面 $PQOT$ 所成的角为该点的 β 坐标。

这样，中面在 M 点 (α, β) 的法线，被邻近一点 $(\alpha + d\alpha, \beta)$ 处的法线所截的一段长度 MI_1 ，就是 R_1 ，图 20 - 1b。中面在 M 点 (α, β) 的法线被旋转轴所截的一段长度 MI_2 ，就是 R_2 ，因为这个法线和邻近一点 $(\alpha, \beta + d\beta)$ 处的法线相交在 I_2 。当然，中面在 α 方向和 β 方向的曲率就是

$$k_1 = \frac{1}{R_1}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2}. \quad (21 - 1)$$

在 M 点， α 方向的微分弧长是 $ds_1 = R_1 d\alpha$ ， β 方向的微分弧长是 $ds_2 =$

$R_2 \sin \alpha d\beta$ 。因此，中面在 α 及 β 方向的拉梅系数为

$$A = \frac{ds_1}{d\alpha} = R_1, \quad B = \frac{ds_2}{d\beta} = R_2 \sin \alpha. \quad (21-2)$$

注意 k_1 、 k_2 、 R_1 、 R_2 、 A 、 B 都只是 α 的函数，不随 β 变化，可见科达齐条件(19-12)中的第一式

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(k_1 A) = k_2 \frac{\partial A}{\partial \beta}$$

自然满足，而第二式

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(k_2 B) = k_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

成为 $\frac{d}{d\alpha}(\sin \alpha) = \frac{1}{R_1} \frac{dB}{d\alpha}$ ，也就是

$$\frac{dB}{d\alpha} = R_1 \frac{d}{d\alpha}(\sin \alpha) = R_1 \cos \alpha, \quad (21-3)$$

也可以根据(21-2)中的第二式改写成为

$$\frac{d}{d\alpha}(R_2 \sin \alpha) = R_1 \cos \alpha. \quad (21-4)$$

高斯条件(19-11)，

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = -k_1 k_2 AB,$$

则成为 $\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dB}{d\alpha} \right) = -\sin \alpha$ ，积分以后得出

$$\frac{dB}{d\alpha} = R_1 (\cos \alpha + C).$$

注意，在 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 处， B 将取极值， $\frac{dB}{d\alpha}$ 应当成为零，可见 $C = 0$ ，而上式成为与(21-3)式相同。利用(21-3)式或(21-4)式，可以使后面的某些运算得到简化。

§ 21-2 旋转壳的无矩理论

在薄壳无矩理论平衡方程(19-30)中，命 $A = R_1$ ， $B = R_2 \sin \alpha$ ， $k_1 = \frac{1}{R_1}$ ，

$k_2 = \frac{1}{R_2}$ ，并利用公式(21-3)，即得旋转壳的无矩理论平衡方程如下：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{\partial F_{T1}}{\partial \alpha} + \frac{\cot \alpha}{R_2} (F_{T1} - F_{T2}) + \frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial F_{T12}}{\partial \beta} + q_1 &= 0, \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial F_{T12}}{\partial \alpha} + \frac{2 \cot \alpha}{R_2} F_{T12} + \frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial F_{T2}}{\partial \beta} + q_2 &= 0, \\ \frac{F_{T1}}{R_1} + \frac{F_{T2}}{R_2} &= q_3. \end{aligned} \right\} \quad (21-5)$$

在这里, q_1 、 q_2 、 q_3 分别为经线方向(即 α 方向)、纬线方向(即 β 方向)、法线方向(即 γ 方向)的荷载, 都是 α 及 β 的已知函数; F_{T1} 及 F_{T2} 分别为经线方向及纬线方向的拉压力, $F_{T12} = F_{T21}$ 为经线及纬线方向的平错力, 都是 α 及 β 的未知函数。

由(21-5)中的第三式解出 F_{T2} , 得

$$F_{T2} = R_2 q_3 - \frac{R_2}{R_1} F_{T1}. \quad (21-6)$$

再代入(21-5)中的前二式, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{\partial F_{T1}}{\partial \alpha} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cot \alpha F_{T1} + \frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial F_{T12}}{\partial \beta} &= q_3 \cot \alpha - q_1, \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial F_{T12}}{\partial \alpha} + \frac{2 \cot \alpha}{R_2} F_{T12} - \frac{1}{R_1 \sin \alpha} \frac{\partial F_{T1}}{\partial \beta} &= -q_2 - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial q_3}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (21-7)$$

现在, 引用两个内力函数 $U(\alpha, \beta)$ 及 $V(\alpha, \beta)$, 命

$$F_{T1} = \frac{U}{R_2 \sin^2 \alpha}, \quad F_{T12} = \frac{V}{R_2^2 \sin^2 \alpha}. \quad (21-8)$$

代入(21-7), 并利用关系式(21-4), 即得

$$\frac{R_2^2 \sin \alpha}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) R_2^3 \sin^2 \alpha, \quad (21-9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{R_2}{\sin \alpha} \frac{\partial U}{\partial \beta} = - \left(q_2 \sin \alpha + \frac{\partial q_3}{\partial \beta} \right) R_1 R_2^2 \sin \alpha. \quad (21-10)$$

将二式分别对 α 及 β 求导, 然后相减, 再除以 $R_1 R_2 \sin \alpha$, 得出仅含 U 的微分方程

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{R_2^2 \sin \alpha}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R_1 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = F(\alpha, \beta), \quad (21-11)$$

其中

$$F(\alpha, \beta) = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) R_2^3 \sin^2 \alpha \right] + R_2 \left(\frac{\partial^2 q_3}{\partial \beta^2} + \frac{\partial q_2}{\partial \beta} \sin \alpha \right). \quad (21-12)$$

于是, 按无矩理论求解旋转壳的内力, 可以进行如下: 首先根据该壳的几

何性质及所受荷载由(21-12)式求出 $F(\alpha, \beta)$, 从而由(21-11)式求解 $U(\alpha, \beta)$ 。然后, 一方面由(21-8)中第一式求出 $F_{\tau 1}$, 从而用(21-6)式求出 $F_{\tau 2}$; 另一方面, 由(21-9)式求解 $V(\alpha, \beta)$, 从而用(21-8)中的第二式求出 $F_{\tau 12}$ 。

在薄壳的无矩理论弹性方程(19-31)中, 命 $A = R_1$, $B = R_2 \sin \alpha$, $k_1 = \frac{1}{R_1}$, $k_2 = \frac{1}{R_2}$, 并利用公式(21-3)或(21-4), 即得旋转壳的无矩理论弹性方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + w &= \frac{R_1}{E\delta} (F_{\tau 1} - \mu F_{\tau 2}), \\ \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + u \cot \alpha + w &= \frac{R_2}{E\delta} (F_{\tau 2} - \mu F_{\tau 1}), \\ \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} - v \cot \alpha + \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= \frac{2R_2(1+\mu)}{E\delta} F_{\tau 12}, \end{aligned} \right\} \quad (21-13)$$

其中 u 、 v 、 w 分别为经线方向、纬线方向及法线方向的中面位移。

从(21-13)的前二式中消去 w , 并利用(21-6)式消去 $F_{\tau 2}$, 保留(21-13)中的第三式, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - u \cot \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} &= \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2\mu R_1 R_2}{R_1} \frac{F_{\tau 1}}{E\delta} - \frac{R_2(R_2 + \mu R_1)}{E\delta} q_3, \\ \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - v \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} &= \frac{2(1+\mu)}{E\delta} R_2 F_{\tau 12}. \end{aligned} \right\} \quad (21-14)$$

再引用两个位移函数 $\xi(\alpha, \beta)$ 及 $\eta(\alpha, \beta)$, 命

$$u = \xi \sin \alpha, \quad v = \eta R_2 \sin \alpha, \quad (21-15)$$

则方程(21-14)成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \frac{R_2}{\sin \alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} &= \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2\mu R_1 R_2}{R_1 \sin \alpha} \frac{F_{\tau 1}}{E\delta} - \frac{R_2(R_2 + \mu R_1)}{E\delta \sin \alpha} q_3, \\ \frac{R_2^2 \sin \alpha}{R_1} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial \beta} &= \frac{2(1+\mu) R_2}{E\delta} F_{\tau 12}. \end{aligned} \right\} \quad (21-16)$$

将二式分别对 β 及 α 求导, 然后相减, 再除以 $R_1 R_2 \sin \alpha$, 得出仅含 η 的微分方程

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{R_2^2 \sin \alpha}{R_1} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R_1 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta^2} = f(\alpha, \beta), \quad (21-17)$$

其中

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[2(1+\mu) \frac{\partial}{\partial \alpha} (R_2 F_{\tau 12}) - \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2\mu R_1 R_2}{R_1 \sin \alpha} \frac{\partial F_{\tau 1}}{\partial \beta} \right] +$$

$$\frac{R_2(R_2 + \mu R_1)}{\sin \alpha} \frac{\partial q_3}{\partial \beta} \Big] \frac{1}{E\delta^3} \quad (21-18)$$

如果引用微分算子

$$L(\dots) = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{R_2^2 \sin \alpha}{R_1} \frac{\partial (\dots)}{\partial \alpha} \right] + \frac{1}{R_1 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial \beta^2}, \quad (21-19)$$

则微分方程(21-11)及(21-17)可以简写为如下的形式:

$$L(U) = F(\alpha, \beta), \quad (21-20)$$

$$L(\eta) = f(\alpha, \beta). \quad (21-21)$$

这样,按无矩理论求解旋转壳的内力和位移的问题,就归结为求解性质上完全相同的两个微分方程,解决了内力的问题,也就解决了位移的问题。

§ 21-3 轴对称问题的无矩计算

如果旋转壳所受的约束和荷载都是绕旋转轴对称的,则其内力及位移都将是绕旋转轴对称的。轴对称荷载的表达式是

$$q_1 = q_1(\alpha), \quad q_2 = 0, \quad q_3 = q_3(\alpha). \quad (a)$$

轴对称内力的表达式是

$$F_{T1} = F_{T1}(\alpha), \quad F_{T2} = F_{T2}(\alpha), \quad F_{T12} = 0. \quad (b)$$

这时,由(21-8)式可见 $U = U(\alpha)$ 而 $V = 0$ 。于是方程(21-10)总能满足,而方程(21-9)简化为

$$\frac{dU}{d\alpha} = (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) R_1 R_2 \sin \alpha.$$

对 α 积分,得到

$$U = \int_{\alpha'}^{\alpha} (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) R_1 R_2 \sin \alpha d\alpha + C, \quad (c)$$

其中 C 是任意常数,而积分的下限 α' 可以根据计算的方便任意选择,通常都使其等于上边界的 α 坐标,图 21-2a。

将式(c)代入(21-8)中的第一式,得到经线方向的拉压力为

$$F_{T1} = \frac{1}{R_2 \sin^2 \alpha} \left[\int_{\alpha'}^{\alpha} (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) R_1 R_2 \sin \alpha d\alpha + C \right]. \quad (d)$$

命边界 $\alpha = \alpha'$ 处的 R_2 为 R_2' , 经线方向的拉压力为 F_{T1}' , 图 21-2a, 则由式(d)得到

$$C = F_{T1}' R_2' \sin^2 \alpha'.$$

代回式(d), 即得

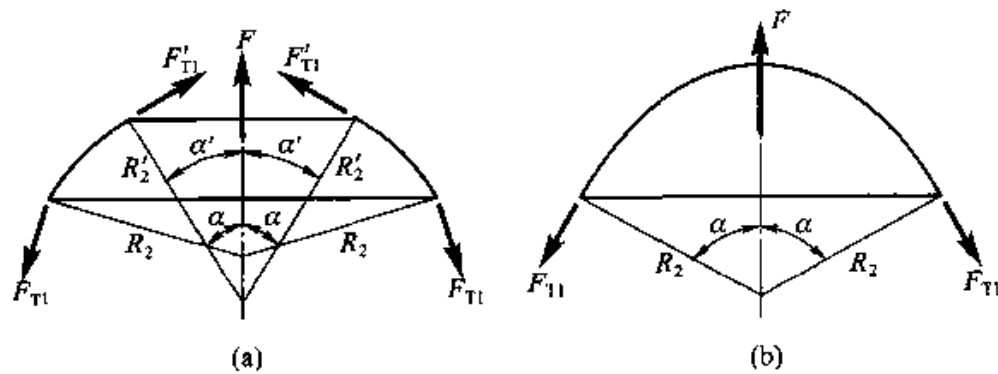


图 21-2

$$F_{T1} = \frac{R_2' \sin^2 \alpha'}{R_2 \sin^2 \alpha} F_{T1}' + \frac{1}{R_2 \sin^2 \alpha} \int_{\alpha'}^{\alpha} (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) R_1 R_2 \sin \alpha d\alpha, \quad (21-22)$$

从而由(21-6)式得到

$$F_{T2} = R_2 q_3 - \frac{R_2' \sin^2 \alpha'}{R_1 \sin^2 \alpha} F_{T1}' - \frac{1}{R_1 \sin^2 \alpha} \int_{\alpha'}^{\alpha} (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) R_1 R_2 \sin \alpha d\alpha. \quad (21-23)$$

如果旋转壳的顶部是闭合的, 图 21-2b, 则 $\alpha' = 0$, 而(21-22)及(21-23)两式简化为

$$F_{T1} = \frac{1}{R_2 \sin^2 \alpha} \int_0^{\alpha} (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) R_1 R_2 \sin \alpha d\alpha, \quad (21-24)$$

$$F_{T2} = R_2 q_3 - \frac{1}{R_1 \sin^2 \alpha} \int_0^{\alpha} (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) R_1 R_2 \sin \alpha d\alpha. \quad (21-25)$$

在顶点, $\alpha = 0$, 上列两式成为不定式, 因而不易直接得出 F_{T1} 及 F_{T2} 的确定数值。但是, 只要中面是平滑曲面, 则在该处的经向和纬向将合而为一, 因而有 $R_1 = R_2$, $F_{T1} = F_{T2}$, 于是可以由(21-6)式得到 $F_{T2} = R_2 q_3 - F_{T2}$, 从而得到

$$F_{T1} = F_{T2} = \frac{R_1 q_3}{2} = \frac{R_2 q_3}{2}. \quad (21-26)$$

公式(21-22)可以用另一形式的公式来代替。为此, 试考虑图 21-2a 所示部分壳体的平衡。命该部分壳体所受荷载的合力为 F (由于轴对称, 它总是沿着对称轴), 则由对称轴方向的平衡条件有

$$(2\pi R_2 \sin \alpha) F_{T1} \sin \alpha - (2\pi R_2' \sin \alpha') F_{T1}' \sin \alpha' - F = 0,$$

其中的 F 是以沿 y 的正向时为正, 以沿 y 的负向时为负。由此得

$$F_{T1} = \frac{R_2' \sin^2 \alpha'}{R_2 \sin^2 \alpha} F_{T1}' + \frac{F}{2\pi R_2 \sin^2 \alpha}. \quad (21-27)$$

在旋转壳顶部为闭合的情况下, $\alpha' = 0$, 上式简化为

$$F_{T1} = \frac{F}{2\pi R_2 \sin^2 \alpha} \quad (21-28)$$

当荷载的合力 F 比较容易计算时, 宜用(21-27)式及(21-28)式分别代替(21-22)式及(21-24)式, 求得 F_{T1} 以后, 再直接用(21-6)式求出 F_{T2} , 因为这样就无须进行积分的运算。读者试由(21-27)式导出(21-22)式, 从而证明, 两者的形式虽然不同, 但实质上都表示对称轴方向的平衡条件。

现在来讨论位移。由于位移也是轴对称的, 即 $u = u(\alpha)$ 而 $v = 0$, 因而由(21-15)式可见 $\xi = \xi(\alpha)$ 而 $\eta = 0$ 。再参阅式(b), 可见(21-16)中的第二式成为恒等式, 而第一式简化为

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2\mu R_1 R_2}{R_1 \sin \alpha} \frac{F_{T1}}{E\delta} - \frac{R_2(R_2 + \mu R_1)}{E\delta \sin \alpha} q_3$$

对 α 积分以后, 代入(21-15)中的第一式, 即得经线方向的位移为

$$u = C_1 \sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{E\delta} \int \left[\frac{R_1^2 + R_2^2 + 2\mu R_1 R_2}{R_1 \sin \alpha} F_{T1} - \frac{R_2(R_2 + \mu R_1)}{\sin \alpha} q_3 \right] d\alpha, \quad (21-29)$$

其中的 C_1 是任意常数, 决定于边界条件。将上式代入(21-13)中的第二式, 即可求得法向位移 w 。

§ 21 - 4 容器旋转壳的无矩计算

作为轴对称问题的计算实例, 设有闭合的容器旋转壳, 受有均布内压力 q_0 , 图 21-3。将 $q_1 = 0$ 及 $q_3 = q_0$ 代入(21-24)式, 得

$$F_{T1} = \frac{q_0}{R_2 \sin^2 \alpha} \int_0^\alpha R_2 \sin \alpha R_1 \cos \alpha d\alpha$$

利用关系式(21-4), 可由上式得出

$$F_{T1} = \frac{q_0}{R_2 \sin^2 \alpha} \int_0^\alpha R_2 \sin \alpha d(R_2 \sin \alpha) = \frac{q_0}{R_2 \sin^2 \alpha} \frac{(R_2 \sin \alpha)^2}{2} = \frac{q_0 R_2}{2}, \quad (21-30)$$

并由(21-6)式得出

$$F_{T2} = q_0 R_2 - \frac{q_0 R_2^2}{2R_1} = \frac{q_0 R_2}{2} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (21-31)$$

如果旋转壳具有圆球壳部分, 其半径为 R , 则在这一部分有 $R_1 = R_2 = R$,

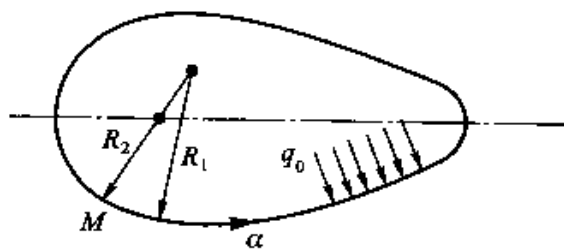


图 21-3

于是由上列二式得

$$F_{r1} = \frac{q_0 R}{2}, \quad F_{r2} = \frac{q_0 R}{2} \quad (21-32)$$

如果旋转壳具有圆柱壳部分, 其半径为 R , 则在这一部分有 $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, 于是由(21-30)式及(21-31)式得

$$F_{r1} = \frac{q_0 R}{2}, \quad F_{r2} = q_0 R \quad (21-33)$$

由于这种薄壳没有边界, 因此, 如果薄壳的斜率和曲率都没有突变之处, 则无矩状态得以实现, 而以上的内力解答就能符合实际情况(即使有些误差, 那也只是 δ/R 阶的)。这时, 材料的强度得到充分的利用。但是, 由于这种壳体的任何一部分都不能展成平面, 壳体不得不用很多块组成, 而且其中的每一块都需要预先加工到一定的曲率, 这在制造上是比较困难的。因此, 通常都采用两端以圆盖封住的圆柱形容器, 图 21-4, 它的大部分都可以由平板弯成, 两端的圆盖也比较扁平, 不难通过冲压或模锻制成。

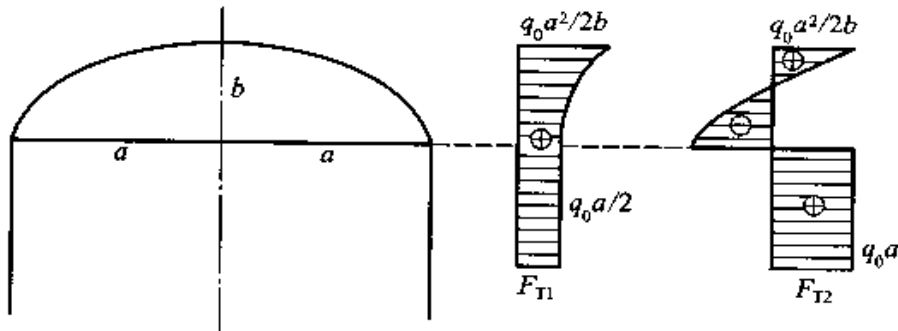


图 21-4

设图 21-4 所示的圆盖为半椭圆壳, 其半轴为 a 及 b , 则其经线方向及纬线方向的曲率半径分别为

$$R_1 = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}},$$

$$R_2 = \frac{a^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}} \circ$$

代入(21-30)式及(21-31)式, 得到

$$F_{r1} = \frac{q_0 a^2}{2} \frac{1}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}}, \quad (a)$$

$$F_{r2} = \frac{q_0 a^2}{2b^2} \frac{b^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}} \quad (b)$$

由式(a)可见, 内力 F_{r1} 总是正的: 在顶点, $\alpha = 0$, $F_{r1} = q_0 a^2 / 2b$; 在与圆柱壳连接处, $\alpha = \pi/2$, $F_{r1} = q_0 a / 2$ 。由式(b)可见: 在顶点, $\alpha = 0$, $F_{r2} = q_0 a^2 / 2b$;

在与圆柱壳连接处, $\alpha = \pi/2$,

$$F_{T_2} = \frac{q_0 a}{2} \left(2 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (c)$$

在通常采用的扁平圆盖中, $a > \sqrt{2}b$, 所以圆盖在与圆柱壳连接处的 F_{T_2} 是负的 (压力)。内力的变化大致如图 21-4 所示。

与圆盖相连接的圆柱壳, 它的半径当然也是 a 。将 $R = a$ 代入 (21-33) 式, 得到圆柱壳的内力为 $F_{T_1} = q_0 a/2$, $F_{T_2} = q_0 a$, 如图 21-4 所示。于是可见, 不论圆盖的 b 值如何, 圆盖与圆柱壳二者在连接处的 F_{T_1} 总是相同, 而 F_{T_2} 总是不同。因此, 二者在连接处的环向线应变或法向位移不可能相同。由于二者的相互约束, 必然将出现局部的弯曲应力。

作为轴对称问题的另一个实例, 试考察图 21-5 所示的圆锥形容器。在锥壳中, α 角成为常量, 不能起坐标的作用, 更无从对它进行积分。因此, 对于锥壳中面上的任一点 M , 我们改用 y 为它的坐标, 并由图可见, 经线方向及纬线方向的曲率半径分别为

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = \frac{y}{\cos \varphi} \tan \varphi = \frac{y \sin \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

其中 φ 为圆锥顶角的一半。为了避免对 α 积分的问题, 我们不应用 (21-24) 式而应用

(21-28) 式。注意 (21-28) 式中的 F 应为 $Mabcd$ 部分液体的重量, 可见

$$\begin{aligned} F &= \rho g \left[\pi (y \tan \varphi)^2 (h - y) + \frac{1}{3} \pi (y \tan \varphi)^2 y \right] \\ &= \rho g \pi y^2 \tan^2 \varphi \left(h - \frac{2}{3} y \right), \end{aligned}$$

其中 ρ 为液体的密度。代入 (21-28) 式, 注意 $\sin \alpha = \cos \varphi$, 即得

$$F_{T_1} = \frac{F}{2\pi R_2 \sin^2 \alpha} = \frac{\rho g \pi y^2 \tan^2 \varphi \left(h - \frac{2}{3} y \right)}{2\pi \frac{y \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cos^2 \varphi} = \frac{\rho g \sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} \left(hy - \frac{2}{3} y^2 \right). \quad (d)$$

代入 (21-6) 式, 注意 $R_1 = \infty$ 而 $q_3 = \rho g (h - y)$, 即得

$$\begin{aligned} F_{T_2} &= R_2 q_3 - \frac{R_2}{R_1} F_{T_1} = R_2 \rho g (h - y) \\ &= \frac{y \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \rho g (h - y) = \rho g \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} (hy - y^2). \quad (e) \end{aligned}$$

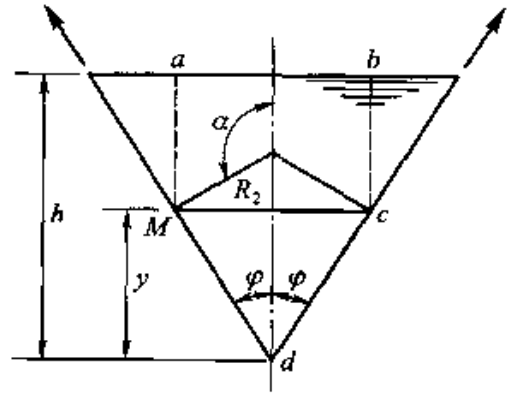


图 21-5

为了求得最大的 F_{T1} , 命 $\frac{\partial F_{T1}}{\partial y} = 0$, 得到 $y = \frac{3}{4}h$, 从而得到

$$(F_{T1})_{\max} = \frac{3}{16}\rho gh^2 \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \quad (f)$$

为了求得最大的 F_{T2} , 命 $\frac{\partial F_{T2}}{\partial y} = 0$, 得到 $y = \frac{h}{2}$, 从而得到

$$(F_{T2})_{\max} = \frac{\rho gh^2}{4} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \quad (g)$$

在锥壳的尖顶处, 中面的斜率有很大的突变。因此, 在尖顶的附近, 必然会发生很大的弯曲内力。

§ 21-5 顶盖旋转壳的无矩计算

作为顶盖旋转壳的实例, 试考虑图 21-6 所示的顶盖球壳。设球壳每单位面积上所受的铅直荷载为常量 q_0 。则经线方向及法线方向的荷载分量分别为

$$q_1 = q_0 \sin \alpha, \quad q_3 = -q_0 \cos \alpha. \quad (a)$$

代入(21-24)式, 命 $R_1 = R_2 = R$, 得

$$\begin{aligned} F_{T1} &= \frac{1}{R \sin^2 \alpha} \int_0^\alpha (-q_0 \cos^2 \alpha - q_0 \sin^2 \alpha) R^2 \sin \alpha d\alpha \\ &= -\frac{q_0 R}{\sin^2 \alpha} \int_0^\alpha \sin \alpha d\alpha = -\frac{q_0 R}{1 + \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (21-34)$$

代入(21-6)式, 命 $R_1 = R_2 = R$, 得

$$\begin{aligned} F_{T2} &= Rq_3 - F_{T1} = -q_0 R \cos \alpha + \frac{q_0 R}{1 + \cos \alpha} \\ &= -q_0 R \left(\cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right). \end{aligned} \quad (21-35)$$

由(21-34)式可见, F_{T1} 总是负的(压力), 它的绝对值随 α 的增大而增大。由(21-35)式可见, 对于较小的 α 值, F_{T2} 也是负的(压力)。当 α 增大到 $51^\circ 50'$ 时, F_{T2} 等于零。当 α 继续增大时, F_{T2} 成为正的(拉力)。内力的变化如下表所示。要使得球壳内不发生拉力, 必须使 α 小于 $51^\circ 50'$ 。

α	0	30°	45°	$51^\circ 50'$	60°	70°	80°	90°
$F_{T1}/q_0 R$	-0.5	-0.535	-0.586	-0.618	-0.667	-0.745	-0.841	-1
$F_{T2}/q_0 R$	-0.5	-0.331	-0.227	0	0.167	0.403	0.667	1

如果球壳在支承处不受法向约束和转动约束, 如图 21-6 所示, 则无矩状态得以实现, 而以上算出的无矩内力可以正确反映实际情况。

现在来分析球壳的位移。在位移 u 的表达式 (21-29) 中, 命 $R_1 = R_2 = R$, 并将式 (a) 中的 q_3 及 (21-34) 式中的 F_{T1} 代入, 得到

$$u = \sin \alpha \left\{ C_1 + \frac{(1+\mu)q_0R^2}{E\delta} \int \left[\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2}{\sin \alpha(1+\cos \alpha)} \right] d\alpha \right\}$$

积分以后, 得到

$$u = \sin \alpha \left\{ C_1 + \frac{(1+\mu)q_0R^2}{E\delta} \left[\ln(1+\cos \alpha) - \frac{1}{1+\cos \alpha} \right] \right\} \quad (b)$$

由位移边界条件

$$(u)_{\alpha=\alpha''} = 0$$

求出 C_1 , 再代回式 (b), 即得

$$u = \frac{(1+\mu)q_0R^2}{E\delta} \left[\ln \frac{1+\cos \alpha}{1+\cos \alpha''} + \frac{1}{1+\cos \alpha''} - \frac{1}{1+\cos \alpha} \right] \sin \alpha \quad (21-36)$$

在轴对称的情况下, (21-13) 中的第二式简化为

$$w = \frac{R_2}{E\delta} (F_{T2} - \mu F_{T1}) - u \cot \alpha$$

将 (21-34) 至 (21-36) 三式代入, 并命 $R_2 = R$, 即得法向位移

$$w = -\frac{q_0R^2}{E\delta} \left(\cos \alpha - \frac{1+\mu}{1+\cos \alpha} \right) - \frac{(1+\mu)q_0R^2}{E\delta} \cos \alpha \left(\ln \frac{1+\cos \alpha}{1+\cos \alpha''} + \frac{1}{1+\cos \alpha''} - \frac{1}{1+\cos \alpha} \right) \quad (21-37)$$

在用球壳作为屋顶时, 为了避免支承墙受到水平推力, 通常都在球壳的边缘上安置支承环, 如图 21-7 所示。这样就可以使得支承墙只受有铅直力, 大小等于支承环受墙顶所施的反力 F_V 。根据支承环的 ds 部分在铅直方向的平衡条件, 由图 21-7a 及 b 可见有

$$F_V ds + F_{T1}'' \sin \alpha'' ds = 0,$$

从而得到上述反力为

$$F_V = -F_{T1}'' \sin \alpha'' = \frac{q_0 R \sin \alpha''}{1 + \cos \alpha''}$$

命支承环的拉力为 F_T 。根据支承环的 ds 部分在水平方向的平衡条件, 由图

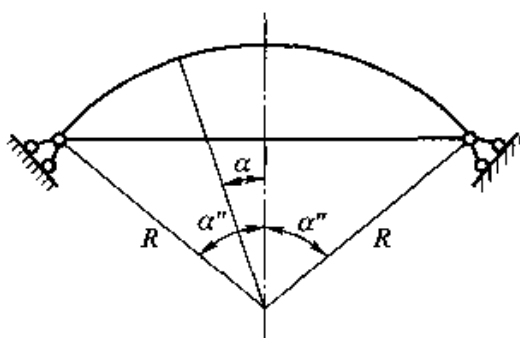


图 21-6

21-7a 及 c 可见有

$$F_T d\beta + F_{T1}'' \cos \alpha'' ds = 0。$$

于是得

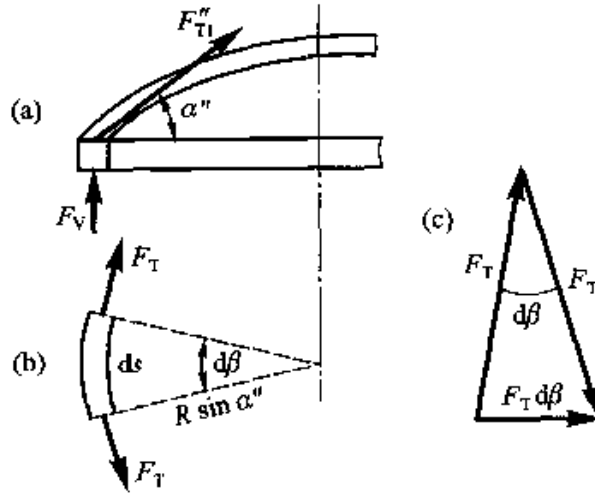


图 21-7

$$F_T = -F_{T1}'' \cos \alpha'' \frac{ds}{d\beta} = -F_{T1}'' \cos \alpha'' R \sin \alpha'' = q_0 R^2 \frac{\sin \alpha'' \cos \alpha''}{1 + \cos \alpha''}。$$

由于球壳和支承环在互相连接处的形变或位移都不相同，在该处总会出现局部的弯曲内力。

§ 21-6 非轴对称问题的无矩计算

当旋转壳受有任意荷载时，为了保证环向的周期性条件，宜用 β 的三角级数求解。这样，首先须将荷载分量的表达式展为 β 的三角级数如下：

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} (X_m \cos m\beta + X'_m \sin m\beta), \\ q_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} (Y_m \sin m\beta + Y'_m \cos m\beta), \\ q_3 &= \sum_{m=0}^{\infty} (Z_m \cos m\beta + Z'_m \sin m\beta), \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中的 X_m 、 Y_m 、 Z_m 、 X'_m 、 Y'_m 、 Z'_m 只是 α 的函数。

试考虑式 (a) 中所示的任意一组分荷载，即

$$q_1 = X_m \cos m\beta, \quad q_2 = Y_m \sin m\beta, \quad q_3 = Z_m \cos m\beta。 \quad (b)$$

把微分方程 (21-11) 的解答取为

$$U(\alpha, \beta) = U_m(\alpha) \cos m\beta, \quad (c)$$

连同式(b)一并代入方程(21-11), 删去方程两边的因子 $\cos m\beta$, 就得到 U_m 的二阶常微分方程

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{R_2^2 \sin \alpha}{R_1} \frac{dU_m}{d\alpha} \right) - \frac{m^2 U_m}{R_1 \sin^2 \alpha} = F_m(\alpha), \quad (d)$$

其中

$$F_m(\alpha) = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \frac{d}{d\alpha} [(Z_m \cos \alpha - X_m \sin \alpha) R_2^3 \sin^2 \alpha] - m(mZ_m - Y_m \sin \alpha) R_2. \quad (e)$$

由微分方程(d)解出 $U_m(\alpha)$ 以后, 用式(c)求出 $U(\alpha, \beta)$, 即可由(21-10)式求得 $V(\alpha, \beta)$, 由(21-8)式求得 F_{T1} 及 F_{T12} , 并由(21-6)式求得 F_{12} 。显然, 这些内力的表达式将具有如下的形式:

$$F_{T1} = N_{1m} \cos m\beta, \quad F_{T2} = N_{2m} \cos m\beta, \quad F_{T12} = S_m \sin m\beta, \quad (f)$$

其中的 N_{1m} 、 N_{2m} 、 S_m 已经是 α 的已知函数。

将式(f)中的 F_{T12} 和 F_{T1} , 以及式(b)中的 q_3 , 代入(21-18)式, 将得到如下形式的函数 $f(\alpha, \beta)$:

$$f(\alpha, \beta) = f_m(\alpha) \sin m\beta, \quad (g)$$

其中

$$f_m(\alpha) = \frac{1}{E\delta} \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[2(1+\mu) \frac{d}{d\alpha} (R_2 S_m) + m \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2\mu R_1 R_2}{R_1 \sin \alpha} N_{1m} - m \frac{R_2 (R_2 + \mu R_1)}{\sin \alpha} Z_m \right]. \quad (h)$$

再将式(g)代入偏微分方程(21-17), 把它的解答取为

$$\eta = \eta_m(\alpha) \sin m\beta, \quad (i)$$

就得到 η_m 的二阶常微分方程

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{R_2^2 \sin \alpha}{R_1} \frac{d\eta_m}{d\alpha} \right) - \frac{m^2}{R_1 \sin^2 \alpha} \eta_m = f_m(\alpha). \quad (j)$$

这一方程和方程(d)形式相同, 差别仅在于右边的自由项。由此解出 $\eta_m(\alpha)$ 以后, 由式(i)求出 η , 即可由(21-16)中的第一式求得 ξ , 再由(21-15)式求得 u 和 n , 由(21-13)中的第一式求得 w 。显然, 这些位移的表达式将具有如下的形式:

$$u = u_m(\alpha) \cos m\beta, \quad v = v_m(\alpha) \sin m\beta, \quad w = w_m(\alpha) \cos m\beta,$$

其中的 u_m 、 v_m 、 w_m 已是 α 的已知函数。

当 $m=0$ 时, 微分方程(d)的左边只有前一项, 通过对 α 的两次积分, 可以求得 U_m , 即 $U_0(\alpha)$ 。实际上, 由式(b)可见, 这时的荷载是

$$q_1 = q_1(\alpha), \quad q_2 = 0, \quad q_3 = q_3(\alpha),$$

相应的问题是轴对称的，已在 § 21-3 中加以讨论。

当 $m=1$ 时，可以命

$$U_m(\alpha) = U_1(\alpha) = \frac{W(\alpha)}{R_2 \sin \alpha} \quad (k)$$

代入式(d)，并利用关系式 $\frac{d}{d\alpha}(R_2 \sin \alpha) = R_1 \cos \alpha$ ，即得

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{R_1 \sin \alpha} \frac{dW}{d\alpha} \right) = R_1 F_1(\alpha) \quad (l)$$

通过对 α 的两次积分，可以求得 $W(\alpha)$ ，然后由式(k)求出 $U_1(\alpha)$ ，即 $U_m(\alpha)$ ，从而由式(c)求得 $U(\alpha, \beta)$ ，并由(21-9)式的积分求得 $V(\alpha, \beta)$ ，从而由(21-8)式及(21-6)式求得内力。积分时出现的任意常数可由 F_{11} 及 F_{112} 的边界条件求得。

当 $m > 1$ 时，一般只能求得微分方程(d)的级数式解答。但如旋转壳的中面为二次曲面，则可求得较简单的解答。对于二次曲面，主曲率半径可以表示成为

$$R_1 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \alpha)^{3/2}}, \quad R_2 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \alpha)^{1/2}}, \quad (m)$$

其中 R_0 为曲面在 $\alpha=0$ 处的曲率半径，即

$$R_0 = (R_1)_{\alpha=0} = (R_2)_{\alpha=0}$$

参数 γ 的范围是：椭球面， $\gamma > -1$ (其中圆球面的 $\gamma = 0$)；抛物面， $\gamma = -1$ ；双曲面， $\gamma < -1$ 。

利用由式(m)得来的关系式

$$\frac{R_2^3}{R_1} = R_0^2 = \text{常量},$$

可以简化微分方程(d)。为此，将该方程乘以 $R_2^3 \sin^2 \alpha$ ，改写为

$$\frac{R_2^2 \sin \alpha}{R_1} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{R_2^2 \sin \alpha}{R_1} \frac{dU_m}{d\alpha} \right) - m^2 R_0^2 U_m = F_m(\alpha) R_2^3 \sin^2 \alpha$$

现在，引用新的变量

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{R_1 d\alpha}{R_2^2 \sin \alpha} = \frac{1}{R_0} \int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + \gamma \sin^2 \alpha}} \\ &= \frac{1}{R_0} \ln \frac{\sqrt{1 + \gamma \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \alpha} + \cos \alpha}, \end{aligned} \quad (n)$$

则上列方程简化为

$$\frac{d^2 U_m}{d\xi^2} - m^2 R_0^2 U_m = F_m(\alpha) R_2^3 \sin^2 \alpha$$

这一方程的解答是

$$U_m = A_1 e^{mR_0\xi} + A_2 e^{-mR_0\xi} + F_m(\xi),$$

其中 $F_m(\xi)$ 是任一特解, A_1 及 A_2 是任意常数。通过关系式(n), 上列解答可以恢复用 α 表示成为

$$U_m = C_1 \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \alpha + \cos \alpha}} \right)^m + C_2 \left(\frac{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \alpha + \cos \alpha}}{\sin \alpha} \right)^m + f_m(\alpha), \quad (o)$$

其中的特解 $f_m(\alpha)$ 可以用变更积分常数法求得。于是可由式(c)得出 $U(\alpha, \beta)$, 然后应用 § 21-2 中所述的方法求得 $V(\alpha, \beta)$ 以及各个内力。

对于球面, $\gamma = 0$, 解答(o)简化为

$$\begin{aligned} U_m &= C_1 \left(\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)^m + C_2 \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^m + f_m(\alpha) \\ &= C_1 \tan^m \frac{\alpha}{2} + C_2 \cot^m \frac{\alpha}{2} + f_m(\alpha)。 \end{aligned}$$

对于抛物面, $\gamma = -1$, 解答(o)简化为

$$\begin{aligned} U_m &= C_1 \left(\frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha} \right)^m + C_2 \left(\frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^m + f_m(\alpha) \\ &= B_1 \tan^m \alpha + B_2 \cot^m \alpha + f_m(\alpha)。 \end{aligned}$$

§ 21-7 球壳的轴对称弯曲

关于旋转壳的弯曲问题, 我们将限于讨论球壳的轴对称弯曲, 因为这种问题在工程上比较常见, 而非球壳的问题或是球壳的一般弯曲问题的分析, 数学运算都非常繁复。

在薄壳的平衡微分方程(19-22)中, 命 $k_1 = k_2 = 1/R$, $A = R$, $B = R \sin \alpha$, 并注意在轴对称情况下有 $F_{T12} = M_{12} = F_{S2} = 0$, 而且内力 F_{T1} 、 F_{T2} 、 M_1 、 M_2 、 F_{S1} 都不随 β 变化, 可见其中的第二及第四方程成为恒等式, 而其余三个方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}(F_{T1} \sin \alpha) - F_{T2} \cos \alpha + F_{S1} \sin \alpha + q_1 R \sin \alpha &= 0, \\ \frac{d}{d\alpha}(F_{S1} \sin \alpha) - (F_{T1} + F_{T2}) \sin \alpha + q_3 R \sin \alpha &= 0, \\ \frac{d}{d\alpha}(M_1 \sin \alpha) - M_2 \cos \alpha - F_{S1} R \sin \alpha &= 0。 \end{aligned} \right\} \quad (21-38)$$

为了简化求解的方程, 这里将不用最简单的几何方程(19-15), 而用较复杂的几何方程(19-17)。在方程(19-17)中, 命 $k_1 = k_2 = 1/R$, $A = R$, $B =$

$R \sin \alpha$, 并注意在轴对称情况下有 $v = 0$, 而且 u 和 w 不随 β 变化, 可见其中的第三及第六方程分别给出 $\varepsilon_{12} = 0$ 及 $\chi_{12} = 0$, 而第一及第二方程简化为

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\alpha} + w \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} (u \cot \alpha + w), \quad (a)$$

第四及第五方程则简化为

$$\chi_1 = -\frac{1}{R^2} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dw}{d\alpha} - u \right), \quad \chi_2 = -\frac{\cot \alpha}{R^2} \left(\frac{dw}{d\alpha} - u \right). \quad (b)$$

在薄壳的物理方程(19-19)中, 第三及第六方程成为恒等式, 只剩下四个方程

$$F_{T1} = \frac{E\delta}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad F_{T2} = \frac{E\delta}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad (c)$$

$$M_1 = D(\chi_1 + \mu\chi_2), \quad M_2 = D(\chi_2 + \mu\chi_1). \quad (d)$$

从(a)、(b)、(c)、(d)中消去形变 ε_1 、 ε_2 、 χ_1 、 χ_2 , 得出弹性方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\alpha} + w &= \frac{R}{E\delta} (F_{T1} - \mu F_{T2}), \\ u \cot \alpha + w &= \frac{R}{E\delta} (F_{T2} - \mu F_{T1}), \\ M_1 &= \frac{D}{R^2} \left[\frac{d}{d\alpha} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right) + \mu \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right) \cot \alpha \right], \\ M_2 &= \frac{D}{R^2} \left[\left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right) \cot \alpha + \mu \frac{d}{d\alpha} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21-39)$$

现在, 求解球壳的轴对称弯曲问题, 就是在边界条件下由(21-38)中的三个方程和(21-39)中的四个方程求解 F_{T1} 、 F_{T2} 、 M_1 、 M_2 、 F_{S1} 、 u 、 w 这七个未知函数。

用拉以斯纳提出的混合法来求解。第一个基本未知函数取为横向剪力 F_{S1} , 第二个基本未知函数取为中面法线绕 β 坐标线的转角 φ , 即 $\frac{\partial u_1}{\partial \gamma}$ 。按照(19-13)中的第一式, 我们有

$$\varphi = \frac{\partial u_1}{\partial \gamma} = k_1 u - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{1}{R} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right). \quad (21-40)$$

下面把 M_1 及 M_2 用 φ 表示, 把 F_{T1} 及 F_{T2} 用 F_{S1} 表示, 然后导出求解 F_{S1} 和 φ 的微分方程。

按照(21-39)中的后两式及(21-40)式, M_1 及 M_2 可用 φ 表示成为

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{D}{R} \left(\frac{d\varphi}{d\alpha} + \mu \varphi \cot \alpha \right), \\ M_2 &= \frac{D}{R} \left(\varphi \cot \alpha + \mu \frac{d\varphi}{d\alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (21-41)$$

为了把 F_{T1} 和 F_{T2} 用 F_{S1} 来表示, 首先由(21-38)中的第一式解出 F_{T2} , 得到

$$F_{T2} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{d}{d\alpha} (F_{T1} \sin \alpha) + F_{S1} \tan \alpha + q_1 R \tan \alpha. \quad (e)$$

代入(21-38)中的第二式, 然后两边都乘以 $-\cos \alpha$, 写成

$$\begin{aligned} & \left[\sin \alpha \frac{d}{d\alpha} (F_{T1} \sin \alpha) + (F_{T1} \sin \alpha) \cos \alpha \right] - \left[\cos \alpha \frac{d}{d\alpha} (F_{S1} \sin \alpha) - (F_{S1} \sin \alpha) \sin \alpha \right] \\ & = R (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) \sin \alpha. \end{aligned}$$

假定球壳顶部并无孔洞, 将上式对 α 积分, 从 0 到 α , 得到

$$\left[\sin \alpha (F_{T1} \sin \alpha) - \cos \alpha (F_{S1} \sin \alpha) \right]_0^\alpha = R \int_0^\alpha (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha,$$

即

$$F_{T1} \sin^2 \alpha - F_{S1} \sin \alpha \cos \alpha = R \int_0^\alpha (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha.$$

于是可将 F_{T1} 用 F_{S1} 表示成为

$$F_{T1} = F_{S1} \cot \alpha + \frac{R}{\sin^2 \alpha} \int_0^\alpha (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha. \quad (21-42)$$

代入式(e), 即可将 F_{T2} 也用 F_{S1} 来表示:

$$F_{T2} = \frac{dF_{S1}}{d\alpha} + q_3 R - \frac{R}{\sin^2 \alpha} \int_0^\alpha (q_3 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha. \quad (21-43)$$

为了导出 F_{S1} 和 φ 的微分方程, 首先将(21-41)式代入(21-38)中的第三式, 得出

$$\frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} + \frac{d\varphi}{d\alpha} \cot \alpha - \varphi (\cot^2 \alpha + \mu) - \frac{R^2}{D} F_{S1} = 0. \quad (21-44)$$

其次, 将(21-39)中的前两式相减, 得出

$$\frac{du}{d\alpha} - u \cot \alpha = \frac{R}{E\delta} (1 + \mu) (F_{T1} - F_{T2}), \quad (f)$$

并将(21-39)中的第二式对 α 求导, 得出

$$\frac{du}{d\alpha} \cot \alpha - u \csc^2 \alpha + \frac{dw}{d\alpha} = \frac{R}{E\delta} \frac{d}{d\alpha} (F_{T2} - \mu F_{T1}), \quad (g)$$

再从式(f)及式(g)中消去 $\frac{du}{d\alpha}$, 得出

$$u - \frac{dw}{d\alpha} = \frac{R}{E\delta} \left[(1 + \mu) (F_{T1} - F_{T2}) \cot \alpha - \frac{d}{d\alpha} (F_{T2} - \mu F_{T1}) \right].$$

最后再将(21-42)式及(21-43)式代入, 并利用(21-40)式, 即得

$$\frac{d^2 F_{S1}}{d\alpha^2} + \frac{dF_{S1}}{d\alpha} \cot \alpha - F_{S1} (\cot^2 \alpha - \mu) + E\delta \varphi + R \left[(1 + \mu) q_1 + \frac{dq_3}{d\alpha} \right] = 0.$$

(21-45)

方程(21-44)和(21-45)就是混合法的微分方程。在边界条件下由这两个微分方程解出 F_{s1} 和 φ ，即可用(21-42)式及(21-43)式求得 F_{T1} 及 F_{T2} ，并用(21-41)式求得 M_1 及 M_2 。

§ 21-8 球壳轴对称弯曲问题的简化解答

按无矩理论计算旋转壳时，和计算柱壳时一样，计算结果对薄壳的绝大部分都足够精确，但在靠近边界处，由于边缘效应，误差较大，必须对无矩解答进行必要的修正。为此，我们来分析球壳在自成平衡的轴对称边界力作用下的弯曲，图 21-8。

在这里，由于 $q_1 = q_3 = 0$ ，(21-42)及(21-43)两式简化为

$$F_{T1} = F_{s1} \cot \alpha, \quad F_{T2} = \frac{dF_{s1}}{d\alpha}. \quad (a)$$

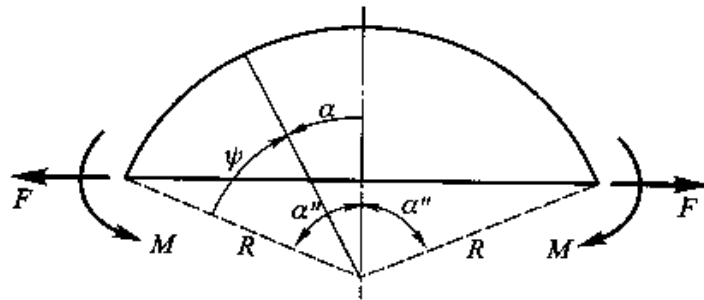


图 21-8

微分方程(21-45)简化为

$$\frac{d^2 F_{s1}}{d\alpha^2} + \frac{dF_{s1}}{d\alpha} \cot \alpha - F_{s1} (\cot^2 \alpha - \mu) = -E\delta\varphi_c. \quad (b)$$

微分方程(21-44)可写成相似的形式如下：

$$\frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} + \frac{d\varphi}{d\alpha} \cot \alpha - \varphi (\cot^2 \alpha + \mu) = \frac{R^2}{D} F_{s1}. \quad (c)$$

将式(b)中的 φ 代入式(c)，或将式(c)中的 F_{s1} 代入式(b)，得出 F_{s1} 或 φ 的四阶常微分方程，可以在边界条件下求解 F_{s1} 或 φ ，然后再求出内力 F_{T1} 、 F_{T2} 、 M_1 、 M_2 。

这样得出的解答，只能表示成为无穷级数的形式，而且对于工程上常见的薄壳，级数收敛很慢，不便应用。但是，由这样的级数解答，可见 F_{s1} 和 φ 有如下的特征：

$$F_{s1} \ll \frac{dF_{s1}}{d\alpha} \ll \frac{d^2 F_{s1}}{d\alpha^2}, \quad \varphi \ll \frac{d\varphi}{d\alpha} \ll \frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2}.$$

在离开壳顶较远而离开边界较近之处(正是无矩解答需要修正之处),通常是 $\alpha > 40^\circ$ 因而 $\cot \alpha < 1.2$, 于是可以采用施塔耶尔芒在 1924 年和盖开勒在 1926 年分别提出的办法, 在式(b)中略去 $\frac{dF_{s1}}{d\alpha}$ 的项和 F_{s1} 的项, 在式(c)中略去 $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ 的项和 φ 的项, 使该二式简化为易于求解的形式:

$$\frac{d^2 F_{s1}}{d\alpha^2} = -E\delta\varphi, \quad \frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} = \frac{R^2}{D} F_{s1} \quad (d)$$

从二式中消去 φ , 得

$$\frac{d^4 F_{s1}}{d\alpha^4} + \frac{E\delta R^2}{D} F_{s1} = 0。$$

引用量纲为一的常数

$$m = \left(\frac{E\delta R^2}{4D} \right)^{1/4} = \left[3(1-\mu^2) \frac{R^2}{\delta^2} \right]^{1/4}, \quad (21-46)$$

则上列微分方程变换成为

$$\frac{d^4 F_{s1}}{d\alpha^4} + 4m^4 F_{s1} = 0。 \quad (e)$$

由(21-46)式可见, 对于薄壳说来, m 是远大于 1 的数字。

为了进一步简化解答, 我们用 ψ 角来代替 α 角作为自变量, 图 21-8。利用变换式

$$\psi = \alpha'' - \alpha, \quad (21-47)$$

可将微分方程(e)变换成为

$$\frac{d^4 F_{s1}}{d\psi^4} + 4m^4 F_{s1} = 0。$$

把这一微分方程的解答取为如下的形式:

$$F_{s1} = e^{-m\psi} (C_1 \cos m\psi + C_2 \sin m\psi) + e^{m\psi} (C_3 \cos m\psi + C_4 \sin m\psi),$$

其中的 C_1 至 C_4 是任意常数。注意 m 是较大的数字而 F_{s1} 是局部性的(它随着 ψ 的增大而消减), 可见 C_3 及 C_4 应当等于零, 而上列解答简化为

$$F_{s1} = e^{-m\psi} (C_1 \cos m\psi + C_2 \sin m\psi)。 \quad (f)$$

由(d)中的第一式可以求得

$$\varphi = -\frac{1}{E\delta} \frac{d^2 F_{s1}}{d\alpha^2} = -\frac{1}{E\delta} \frac{d^2 F_{s1}}{d\psi^2} = -\frac{2m^2}{E\delta} e^{-m\psi} (C_1 \sin m\psi - C_2 \cos m\psi)。 \quad (g)$$

在(21-41)式中, 注意 $\varphi \ll \frac{d\varphi}{d\alpha}$, 即可由式(g)得出

$$M_1 = \frac{D}{R} \frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{D}{R} \frac{d\varphi}{d\psi}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2m^3 D}{E\delta R} e^{-m\psi} [(C_1 + C_2) \cos m\psi + (C_2 - C_1) \sin m\psi] \\
 &= \frac{R}{2m} e^{-m\psi} [(C_1 + C_2) \cos m\psi + (C_2 - C_1) \sin m\psi], \quad (\text{h})
 \end{aligned}$$

$$M_2 = \frac{D}{R} \mu \frac{d\varphi}{d\alpha} = \mu M_1. \quad (\text{i})$$

现在就可以由边界条件求出 C_1 和 C_2 。边界条件是

$$(M_1)_{\psi=0} = M, \quad (F_{s1})_{\psi=0} = F \sin \alpha''.$$

将式(h)及式(f)代入, 得到

$$\frac{R}{2m} (C_1 + C_2) = M, \quad C_1 = F \sin \alpha'',$$

也就是

$$C_1 = F \sin \alpha'', \quad C_2 = 2M \frac{m}{R} - F \sin \alpha''.$$

将求出的 C_1 及 C_2 代入(f)、(g)、(h)三式, 得到

$$F_{s1} = e^{-m\psi} \left[F \sin \alpha'' (\cos m\psi - \sin m\psi) + 2M \frac{m}{R} \sin m\psi \right], \quad (\text{j})$$

$$\varphi = -\frac{2m^2}{E\delta} e^{-m\psi} \left[F \sin \alpha'' (\cos m\psi + \sin m\psi) - 2M \frac{m}{R} \cos m\psi \right], \quad (\text{k})$$

$$M_1 = e^{-m\psi} \left[-F \frac{R}{m} \sin \alpha'' \sin m\psi + M (\cos m\psi + \sin m\psi) \right]. \quad (\text{l})$$

按照式(a), 可以由式(j)求得 F_{r1} 及 F_{r2} :

$$F_{r1} = F_{s1} \cot \alpha = e^{-m\psi} \left[F \sin \alpha'' (\cos m\psi - \sin m\psi) + 2M \frac{m}{R} \sin m\psi \right] \cot \alpha, \quad (\text{m})$$

$$\begin{aligned}
 F_{r2} &= \frac{dF_{s1}}{d\alpha} = -\frac{dF_{s1}}{d\psi} = e^{-m\psi} \left[2Fm \sin \alpha'' \cos m\psi - \right. \\
 &\quad \left. 2M \frac{m^2}{R} (\cos m\psi - \sin m\psi) \right]. \quad (\text{n})
 \end{aligned}$$

为了利用表 20-1 来简化数字计算, 将以上各个内力的表达式通过公式(20-20)用特殊函数 f_1 至 f_4 来表示:

$$\left. \begin{aligned}
 F_{r1} &= [F \sin \alpha'' f_3(m\psi) + 2M \frac{m}{R} f_2(m\psi)] \cot \alpha, \\
 F_{r2} &= 2Fm \sin \alpha'' f_4(m\psi) - 2M \frac{m^2}{R} f_3(m\psi), \\
 M_1 &= -F \frac{R}{m} \sin \alpha'' f_2(m\psi) + M f_1(m\psi), \\
 M_2 &= \mu M_1, \\
 F_{s1} &= F \sin \alpha'' f_3(m\psi) + 2M \frac{m}{R} f_2(m\psi).
 \end{aligned} \right\} \quad (21-48)$$

这样就很容易由 F 和 M 求得内力。

在计算实际问题时，必须首先算出 M 和 F ，而 M 和 F 须根据薄壳在它们作用方向的位移条件来确定。薄壳在 M 作用方向的位移是边界处的转角，即

$$\varphi_0 = (\varphi)_{\psi=0},$$

由式(k)可见其为

$$\varphi_0 = -\frac{2m^2 \sin \alpha''}{E\delta} F + \frac{4m^3}{E\delta R} M_0. \quad (21-49)$$

薄壳在 F 作用方向的位移，是边界半径的改变，即

$$\delta_0 = R \sin \alpha'' (\varepsilon_2)_{\psi=0} = R \sin \alpha'' \left(\frac{F_{T2} - \mu F_{T1}}{E\delta} \right)_{\psi=0}.$$

将式(m)及式(n)代入，得到

$$\delta_0 = \frac{FR \sin \alpha''}{E\delta} (2m \sin \alpha'' - \mu \cos \alpha'') - \frac{2Mm^2}{E\delta} \sin \alpha''.$$

由于 m 是较大的数字而 $\sin \alpha''$ 不会是很小的数字， $\mu \cos \alpha''$ 与 $2m \sin \alpha''$ 相比，可以略去不计。因此，上式可以简写为

$$\delta_0 = \frac{2mR \sin^2 \alpha''}{E\delta} F - \frac{2m^2 \sin \alpha''}{E\delta} M_0. \quad (21-50)$$

§ 21-9 球壳的简化计算

作为应用上一节中解答的例题，设有边界固定的球壳，受均布压力 q_0 ，图 21-9。参阅 § 21-4 中的(21-32)式，可见这一问题中的无矩内力为

$$\left. \begin{aligned} F_{T1} &= -\frac{q_0 R}{2}, & F_{T2} &= -\frac{q_0 R}{2}, \\ M_1 &= 0, & M_2 &= 0, & F_{S1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

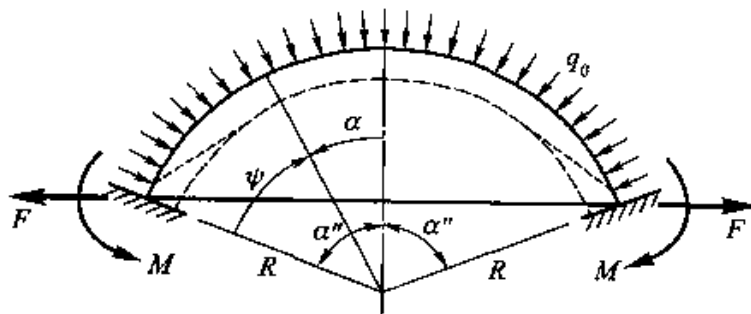


图 21-9

为了求出与此相应的中面位移, 在(21-29)式中命 $R_1 = R_2 = R$, $q_1 = -q_0$, $F_{T1} = -q_0 R/2$, 得

$$u = C_1 \sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{E\delta} \int \left[\frac{2(1+\mu)R}{\sin \alpha} \left(-\frac{q_0 R}{2} \right) + \frac{(1+\mu)R^2 q_0}{\sin \alpha} \right] d\alpha = C_1 \sin \alpha。$$

由边界条件

$$(u)_{\alpha=\alpha'} = 0$$

得出 $C_1 = 0$, 因此有

$$u = 0。 \quad (b)$$

将式(a)及式(b)代入(21-13)中的第一式, 得中面法向位移为

$$w = -\frac{(1-\mu)q_0 R^2}{2E\delta}。 \quad (c)$$

由式(b)及式(c)可见, 在无矩内力状态下, 中面在经线方向的位移 u 为零, 面法向位移 w 为常量, 弹性曲面如图 21-9 中的虚线所示。由(21-40)式及(b)、(c)两式可得边界处的转角为

$$\varphi_0 = (\varphi)_{\psi=0} = \frac{1}{R} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right)_{\psi=0} = 0, \quad (d)$$

而边界半径的改变为

$$\delta_0 = w \sin \alpha'' = -\frac{(1-\mu)q_0 R^2}{2E\delta} \sin \alpha'', \quad (e)$$

实际上, 由于边界固定, 边界处将发生弯矩 M 及水平反力 F 。这个 M 和 F , 结合荷载 q_0 的作用, 应使边界处总的 φ_0 及总的 δ_0 都成为零, 而边界近处的弹性曲面如图 21-9 中的点线所示。按照公式(21-49)和(21-50), 以及式(d)和式(e), 上述条件为

$$\begin{aligned} -\frac{2m^2 \sin \alpha''}{E\delta} F + \frac{4m^3}{E\delta R} M &= 0, \\ \frac{2mR \sin^2 \alpha''}{E\delta} F - \frac{2m^2 \sin \alpha''}{E\delta} M - \frac{(1-\mu)q_0 R^2}{2E\delta} \sin \alpha'' &= 0, \end{aligned}$$

求解 F 及 M , 得出

$$F = \frac{(1-\mu)q_0 R}{2m \sin \alpha''}, \quad M = \frac{(1-\mu)q_0 R^2}{4m^2}。 \quad (f)$$

将式(f)代入表达式(21-48), 得出边界约束引起的附加内力, 即所谓边缘效应, 然后附加于式(a)所示的无矩内力, 整理以后, 即得总的内力如下:

$$F_{T1} = -\frac{q_0 R}{2} \left\{ 1 - \frac{1-\mu}{m} [f_3(m\psi) + f_2(m\psi)] \cot \alpha \right\}$$

$$= -\frac{q_0 R}{2} \left[1 - \frac{1-\mu}{m} f_4(m\psi) \cot \alpha \right], \quad (g)$$

$$\begin{aligned} F_{T2} &= -\frac{q_0 R}{2} \{ 1 - (1-\mu) [2f_4(m\psi) - f_3(m\psi)] \} \\ &= -\frac{q_0 R}{2} [1 - (1-\mu)f_1(m\psi)], \end{aligned} \quad (h)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{(1-\mu)q_0 R^2}{4m^2} [f_1(m\psi) - 2f_2(m\psi)] \\ &= \frac{q_0 R^2(1-\mu)}{4m^2} f_3(m\psi), \end{aligned} \quad (i)$$

$$M_2 = \mu M_1, \quad (j)$$

$$F_{S1} = \frac{(1-\mu)q_0 R}{2m} [f_3(m\psi) + f_2(m\psi)] = \frac{q_0 R(1-\mu)}{2m} f_4(m\psi). \quad (k)$$

利用表 20-1, 极易由这些表达式求得球壳的内力。

习 题

21-1 半径为 R 而厚度为 δ 的圆柱壳, 两端焊以同材料、同半径而厚度为 δ' 的半圆球壳, 图 21-10, 承受均布内压力。(1) 试按材料强度的要求决定比值 δ'/δ 。(2) 试按无矩条件的要求决定比值 δ'/δ 。

答案: (1) $\delta'/\delta = 1/2$ 。 (2) $\delta'/\delta = (1-\mu)/(2-\mu)$ 。

21-2 圆球形容器, 沿着 $\alpha = \alpha''$ 的环线受支承, 盛满密度为 ρ 的液体, 图 21-11, 试求无矩内力(不计容器的自重)。

$$\begin{aligned} \text{答案: 在 } \alpha < \alpha'' \text{ 处, } F_{T1} &= \frac{\rho g R^2}{6} \left(1 - \frac{2\cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right), & F_{T2} &= \frac{\rho g R^2}{6} \left(5 - 6\cos \alpha + \frac{2\cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right); \\ \text{在 } \alpha > \alpha'' \text{ 处, } F_{T1} &= \frac{\rho g R^2}{6} \left(5 + \frac{2\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right), & F_{T2} &= \frac{\rho g R^2}{6} \left(1 - 6\cos \alpha - \frac{2\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right); \end{aligned}$$

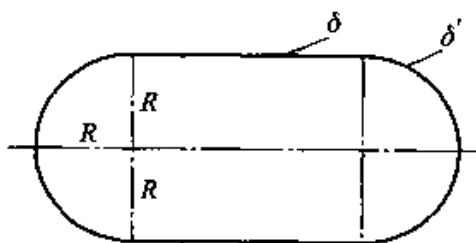


图 21-10

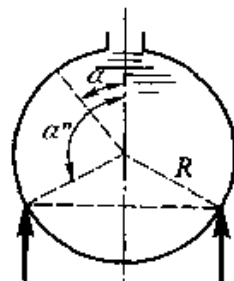


图 21-11

21-3 圆球面屋顶, 每单位面积受铅直荷载 q_0 , 并在顶环 AB 的每单位长度上受铅直荷载 F , 图 21-12, 用支承环 CD 垫承在圆墙顶上, 试求无矩内力。

$$\text{答案: } F_{T1} = -q_0 R \frac{\cos \alpha' - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - F \frac{\sin \alpha'}{\sin^2 \alpha},$$

$$F_{T2} = q_0 R \left(\frac{\cos \alpha' - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) + F \frac{\sin \alpha'}{\sin^2 \alpha}$$

21-4 圆锥形顶盖, 每单位面积受铅直荷载 q_0 , 并在顶点受集中荷载 F 图 21-13, 试求无矩内力。

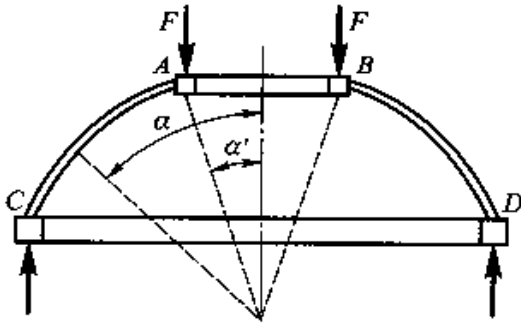


图 21-12

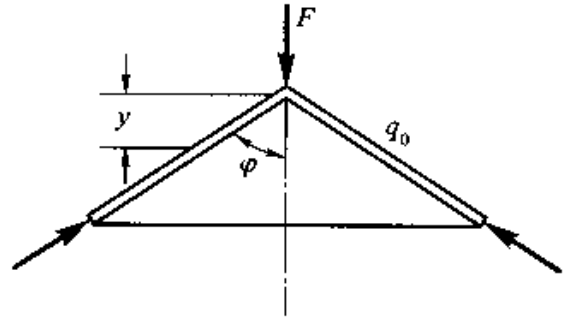


图 21-13

答案: $F_{T1} = -\frac{q_0 y}{2 \cos^2 \varphi} - \frac{F}{2 \pi y \sin \varphi}$, $F_{T2} = -q_0 y \tan^2 \varphi$ 。

21-5 圆筒盛满密度为 ρ 的液体, 图 21-14。设筒底为球壳, 面球壳的半径为 R , 试求筒底的无矩内力。

答案: $F_{T1} = -\frac{\rho g R^2}{6} \left[\frac{3h}{R} + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} (1 + 2 \cos \alpha) \right]$,

$$F_{T2} = -\frac{\rho g R^2}{6} \left[\frac{3h}{R} + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} (5 + 4 \cos \alpha) \right]。$$

21-6 设图 21-9 中的球壳具有铰支边, 试求均布压力及边缘效应引起的内力。

答案: $F = \frac{(1 - \mu) q_0 R}{4 m \sin \alpha''}$, $M = 0$,

$$F_{T1} = -\frac{q_0 R}{2} \left[1 - \frac{1 - \mu}{2m} f_3(m\psi) \cot \alpha \right],$$

$$F_{T2} = -\frac{q_0 R}{2} [1 - (1 - \mu) f_4(m\psi)],$$

$$M_1 = -\frac{q_0 R^2 (1 - \mu)}{4m^2} f_2(m\psi), \quad M_2 = \mu M_1,$$

$$F_{s1} = \frac{q_0 R (1 - \mu)}{4m} f_2(m\psi)。$$

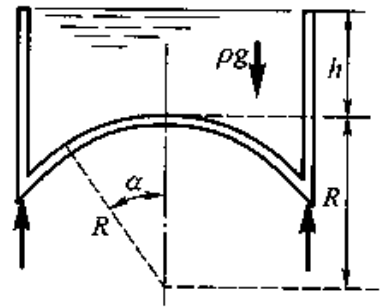


图 21-14

21-7 对于图 21-7 所示的顶盖, 试考虑如何计算球壳中因受支承环约束而引起的局部弯曲应力(边缘效应)。

21-8 对于图 21-10 所示的容器, 如果采用 $\delta' = \delta$, 试考虑如何计算圆柱壳与半圆球壳在焊接处的局部弯曲应力(边缘效应)。

参 考 教 材

[1] 诺沃日洛夫著. 薄壳理论[M]. 白鹏飞, 陈抡元, 崔孝秉, 冯家骢, 张孝寅译. 北

京：科学出版社，1959。第二章中的 §1 至 §13。

- [2] 铁木辛柯，沃诺斯基著. 板壳理论[M]. 《板壳理论》翻译组译. 北京：科学出版社，1977：第十六章.

第二十二章 扁壳

§ 22-1 中面的几何性质

所谓扁壳，指的是这样扁平的薄壳：它的中面的最大矢高，远小于它的底面（覆盖面）的尺寸。对于圆形的覆盖面，扁壳的中面一般都做成旋转面。对于矩形的覆盖面，可以把扁壳的中面做成任何柱面或双曲面，得出一个所谓柱面扁壳或双曲扁壳。但是，为了更好地发挥壳的作用，从而节省需用的材料，通常都不用柱面扁壳，而采用双曲扁壳。本章中将着重讨论建筑工程上常用的、具有矩形底面的双曲扁壳。

以扁壳的底面为 xy 面，命扁壳中面上任意一点 M 的高度为 z ，图 22-1，则中面的方程为

$$z = F(x, y)。 \quad (22-1)$$

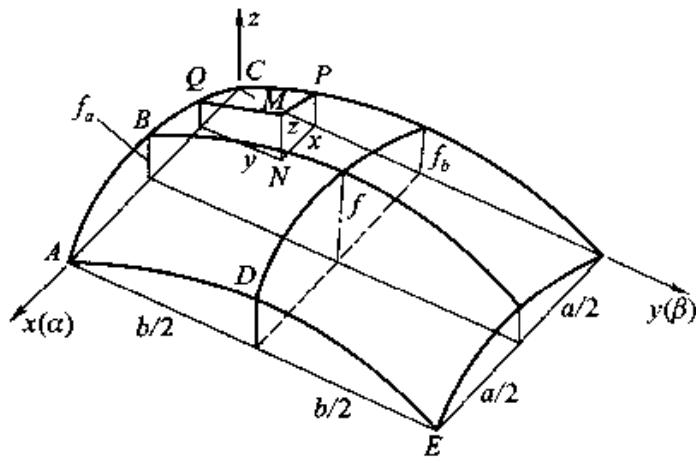


图 22-1

由于中面的扁平性，它在坐标方向的曲率及扭率可以近似地取为

$$k_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (22-2)$$

在建筑工程中，为了计算简单，一般总是把双曲扁壳的中面作成所谓平移曲面，如图 22-1 中的平面曲线 ABC 沿另一平面曲线 ADE 平行移动而形成的曲面（也就是 ADE 沿 ABC 平行移动而形成的曲面）。设曲线 ABC 上任意一点的

高度为 $z_1 = F_1(x)$ ，而曲线 ADE 上任意一点的高度为 $z_2 = F_2(y)$ ，则该平移曲面上任意一点的高度为

$$z = z_1 + z_2 = F_1(x) + F_2(y)。$$

应用(22-2)中的第三式，得到

$$k_{xy} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0。$$

平移曲面在平移方向的扭率等于零，这是它的能使计算简化的一个几何特性。

如果曲线 ABC 和 ADE 都是抛物线，则形成的曲面称为抛物线平移曲面。在图示的直角坐标系中，该曲面的方程将是

$$z = 4f_a \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right) + 4f_b \left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right)， \quad (22-3)$$

其中 f_a 及 f_b 分别为平行于 xz 面及 yz 面的边界曲线的矢高，即抛物线 ABC 及 ADE 的矢高，而中面的最大矢高为 $f = f_a + f_b$ 。按照(22-2)中的前二式，中面在 x 和 y 方向的曲率为

$$k_x = \frac{8f_a}{a^2}， \quad k_y = \frac{8f_b}{b^2}。 \quad (22-4)$$

据此，中面在 x 和 y 方向的曲率半径为

$$R_x = \frac{1}{k_x} = \frac{a^2}{8f_a}， \quad R_y = \frac{1}{k_y} = \frac{b^2}{8f_b}， \quad (22-5)$$

它们都是常量，而且不随坐标轴的平行移动面有所改变。

如果曲线 ABC 和 ADE 都是圆弧，形成的曲面就称为圆弧平移曲面，而两个圆弧的半径就是曲面在 x 和 y 方向的曲率半径 R_x 和 R_y 。由于曲面是扁平的，圆弧和抛物线的几何形状很相近，因而可以认为(22-5)式仍然适用。于是得出由圆弧半径计算圆弧矢高的近似公式

$$f_a = \frac{a^2}{8R_x}， \quad f_b = \frac{b^2}{8R_y}。 \quad (22-6)$$

在一般情况下， k_x 和 k_y 并不相等，扁壳是不等曲率扁壳。当 $k_x = k_y$ 时，即 $R_x = R_y = R$ 时，扁壳就是等曲率扁壳。在等曲率扁壳中，矢高比值 f_a/f_b 与边长比值 a/b 之间有一定的关系：在(22-5)式中命 $k_x = k_y$ ，即得

$$\frac{f_a}{f_b} = \frac{a^2}{b^2}。 \quad (22-7)$$

以圆球面为中面的扁壳，称为球面扁壳。由于中面的扁平性，球面扁壳可视为等曲率扁壳，而它的曲率半径 R_x 和 R_y 都等于该圆球面的半径 R 。也由于中面的扁平性，圆球面与等曲率的抛物线平移曲面，两者的形状很相近。所以一般就把等曲率的圆弧平移扁壳和抛物线平移扁壳统称为球面扁壳。

因为扁壳的几何性质可以比较简单明了地用直角坐标来表示，所以我们将

用直角坐标来求解扁壳问题，而把扁壳的位移、形变和内力都当作直角坐标 x 和 y 的函数。但是，为了能够利用第十九章中已经导出的基本方程和边界条件，就需要建立从正交曲线坐标向直角坐标变换的一些变换式，进行如下。

通过扁壳中面上的任意一点 M ，图 22-1，作平行于 xz 面的平面 PMN 和平行于 yz 面的平面 QMN ，分别与中面相交于曲线 PM 及 QM ，则 PM 及 QM 可以作为中面上通过 M 点的坐标线。这种坐标线和 § 19-4 中所说的正交曲线坐标线不同，因为它们一般并不互相垂直。但是，由于中面的扁平性，我们可以近似地认为它们互相垂直，而且，垂直于 xy 面的直线 MN ，就是中面的法线，因而曲线 PM 及 QM 就是 § 19-4 中所说的 α 坐标线及 β 坐标线。于是，中面沿 α 及 β 方向的曲率 k_1 及 k_2 就分别成为 k_x 及 k_y ，即

$$k_1 = k_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad k_2 = k_y = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad (22-8)$$

任何变量沿 α 及 β 方向的改变率就分别成为该变量沿 x 及 y 方向的改变率，即

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\quad) = \frac{\partial}{\partial x}(\quad), \quad \frac{\partial}{\partial \beta}(\quad) = \frac{\partial}{\partial y}(\quad); \quad (22-9)$$

中面沿 α 及 β 方向的拉梅系数就成为

$$A = \frac{ds_1}{d\alpha} = \frac{dx}{dx} = 1, \quad B = \frac{ds_2}{d\beta} = \frac{dy}{dy} = 1. \quad (22-10)$$

应当指出：如果扁壳的中面不是平移曲面，则扭率 k_x 不一定等于零， k_x 和 k_y 不一定是中面的主曲率，把 § 19-4 中的方程向直角坐标进行变换时，就要比较复杂一些。

还应当指出：由于以上的近似处理，高斯条件(19-11)和科达齐条件(19-12)一般都不能满足。在扁壳中面为抛物线移动曲面的情况下，科达齐条件(19-12)可以满足，而高斯条件(19-11)仍然不能满足。但是，由于我们改用直角坐标以代替曲线坐标，也就不再需要利用这些条件来简化计算了。

按照符拉索夫和其他一些作者分析计算的结果，如果扁壳的最大矢高不超过矩形底面较小边长的 $1/5$ ，则上述的近似处理不致引起工程上所不容许的误差。

§ 22-2 基本方程及边界条件

在一般薄壳的平衡微分方程(19-22)中，应用(22-8)式至(22-10)式，并且和在 § 20-4 中一样，不计横向剪力对于纵向平衡的影响，即得

$$\frac{\partial F_{T1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial y} + q_1 = 0, \quad \frac{\partial F_{T2}}{\partial y} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial x} + q_2 = 0, \quad (a)$$

$$-(k_x F_{T1} + k_y F_{T2}) + \frac{\partial F_{S1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{S2}}{\partial y} + q_3 = 0, \quad (b)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - F_{S2} = 0, \quad \frac{\partial M_{12}}{\partial y} + \frac{\partial M_1}{\partial x} - F_{S1} = 0. \quad (c)$$

在扁壳中，纵向荷载 q_1 及 q_2 引起的位移和内力是很次要的，因此，在式(a)中可以略去 q_1 及 q_2 ，得出

$$\frac{\partial F_{T1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_{T2}}{\partial y} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial x} = 0. \quad (d)$$

由(c)中的第二式及第一式分别解出横向剪力 F_{S1} 及 F_{S2} ，得出

$$F_{S1} = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y}, \quad F_{S2} = \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x}. \quad (22-11)$$

代入式(b)，与式(d)联立，即得扁壳的平衡微分方程如下：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{T1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_{T2}}{\partial y} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial x} = 0, \\ (k_x F_{T1} + k_y F_{T2}) - \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} \right) = q_3. \end{aligned} \right\} \quad (22-12)$$

在一般薄壳的几何方程(19-15)中，应用(22-8)式至(22-10)式，得出扁壳的几何方程如下：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + k_x w, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_y w, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (22-13)$$

物理方程仍然如(19-19)式所示，即

$$\left. \begin{aligned} F_{T1} = \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad F_{T2} = \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \\ F_{T12} = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\varepsilon_{12}, \\ M_1 = D(\chi_1 + \mu\chi_2), \quad M_2 = D(\chi_2 + \mu\chi_1), \\ M_{12} = (1-\mu)D\chi_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (22-14)$$

现在，对于扁壳，我们共有 15 个基本方程：3 个平衡微分方程(22-12)，6 个几何方程(22-13)和 6 个物理方程(22-14)。这些基本方程中包含着 x 和 y 的 15 个未知函数：6 个内力 F_{T1} 、 F_{T2} 、 $F_{T12} = F_{T21}$ 、 M_1 、 M_2 、 $M_{12} = M_{21}$ ，6 个中面形变 ε_1 、 ε_2 、 ε_{12} 、 χ_1 、 χ_2 、 χ_{12} ，3 个中面位移 u 、 v 、 w 。横向剪力 F_{S1} 及 F_{S2} 可以按照(22-11)式由 M_1 、 M_2 、 M_{12} 求得，不必作为独立的未知函数。

在建筑工程上，支承扁壳的所谓边缘构件，不外乎边梁、边墙、边拱以及

平面桁架的弦杆。如果用的是边梁，它们总是比较狭而深的梁。这些构件在其平面内的刚度很大，而在垂直方向的刚度却很小。因此，这些构件几乎可以完全阻止壳边在构件平面内的位移，我们也就可以认为壳边在该平面内的位移等于零。同时，这些构件几乎完全不能约束壳边在垂直方向的位移和转动位移，我们也就可以认为壳边在这两个方向的内力等于零。以图 22-2 中 x 为常量的边界为例，边界条件就是

$$\left. \begin{aligned} v=0, \quad w \cos \theta - u \sin \theta = 0, \\ F_{T1} \cos \theta + F_{S1} \sin \theta = 0, \quad M_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22-15)$$

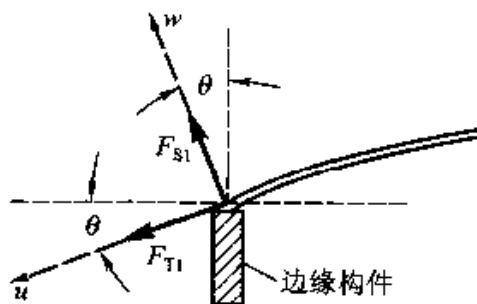


图 22-2

由于扁壳中面的扁平性，可以近似地认为 $\theta = 0$ ，从而有 $\cos \theta = 1$ ， $\sin \theta = 0$ 。于是，在 x 为常量的边界上，边界条件简化为

$$F_{T1} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_1 = 0. \quad (22-16)$$

同样，在 y 为常量的边界上，边界条件简化为

$$F_{T2} = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad M_2 = 0. \quad (22-17)$$

参阅(19-27)式，可见上面所述的边界实际上就是简支边。

应当指出，在扁壳的角点处，两垂直方向的边缘构件（即平行于 xz 面的边缘构件及平行于 yz 面的边缘构件），一般是互相刚连的，因此，两者将由于互相约束而不可能自由地转动。这样，扁壳在角点处也就不可能自由地转动，因而 $M_1 = 0$ 和 $M_2 = 0$ 的条件都不可能实现。这就使得在边界条件(22-16)及(22-17)之下求得的解答，在扁壳的角点处远远不能反映实际情况。还应当指出，为了加强扁壳与边缘构件的联系，通常都把扁壳在边缘和角点处加厚，有时还在两向边缘构件之间填以三棱柱形的承托，这就使得扁壳在角点处的强度和刚度远大于别处，并且使得扁壳的边界条件进一步复杂化。根据以上所述的情况，扁壳角点处的内力和位移是算不精确的，同时也是不必计算的。

§ 22-3 无矩计算。重三角级数解答

在扁壳的平衡微分方程(22-12)中，不计弯矩及扭矩，即得按无矩理论计算扁壳时所需用的基本方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{T1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_{T2}}{\partial y} + \frac{\partial F_{T12}}{\partial x} = 0, \\ k_x F_{T1} + k_y F_{T2} = q_3. \end{aligned} \right\} \quad (22-18)$$

引用内力函数 $\Phi = \Phi(x, y)$, 命

$$F_{T11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad F_{T12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad F_{T12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (22-19)$$

则(22-18)中的前两个方程总能满足, 而第三个方程要求

$$\nabla_k^2 \Phi = q_3, \quad (22-20)$$

其中 ∇_k^2 是如下的二阶微分算子:

$$\nabla_k^2 = k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (22-21)$$

采用图 22-1 中的坐标系, 按照(22-16)中的第一式及(22-17)中的第一式, 边界条件应为

$$\begin{aligned} (F_{T11})_{x=0} &= 0, & (F_{T11})_{x=a} &= 0, \\ (F_{T12})_{y=0} &= 0, & (F_{T12})_{y=b} &= 0, \end{aligned}$$

如果改用内力函数 Φ 表示, 则为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x=0} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x=a} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{y=0} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{y=b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22-22)$$

这些边界条件可以改写为更简单的形式, 推导如下。

由几何方程(22-13)中的第三式, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \varepsilon_{12} dx dy &= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy \\ &= \int_0^a \left[\int_0^b \frac{\partial u}{\partial y} dy \right] dx + \int_0^b \left[\int_0^a \frac{\partial v}{\partial x} dx \right] dy \\ &= \int_0^a [u(x, b) - u(x, 0)] dx + \int_0^b [v(a, y) - v(0, y)] dy. \end{aligned}$$

按照(22-17)中的第二式及(22-16)中的第二式,

$$u(x, b) = u(x, 0) = 0, \quad v(a, y) = v(0, y) = 0.$$

于是由上式得到

$$\int_0^a \int_0^b \varepsilon_{12} dx dy = 0.$$

但是, 由于 ε_{12} 和 F_{T12} 成正比, 而 $F_{T12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$,

又可由上式得到

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dx dy = 0. \quad (a)$$

另一方面, 由于在 $x=0$ 及 $x=a$ 的边界上有 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$, 在 $y=0$ 及 $y=b$ 的边界上有

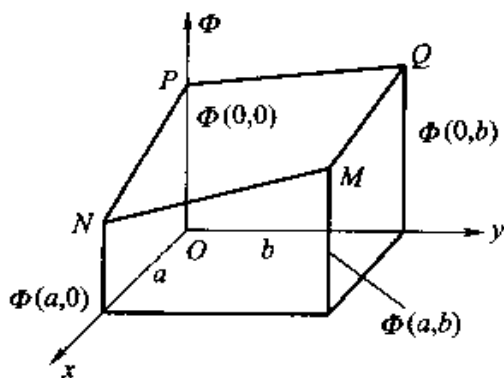


图 22-3

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$, 所以 Φ 值在四个边界上都按直线变化, 而边界上的 Φ 值图将如图

22-3 中的折线 $MNPQ$ 所示。现在来计算式 (a) 左边的面积分:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dx dy &= \int_0^a \left[\int_0^b \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^a \left[\frac{\partial \Phi(x, b)}{\partial x} - \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial x} \right] dx \\ &= [\Phi(a, b) - \Phi(0, b)] - [\Phi(a, 0) - \Phi(0, 0)]. \end{aligned}$$

于是按照式 (a) 有

$$[\Phi(a, b) - \Phi(0, b)] - [\Phi(a, 0) - \Phi(0, 0)] = 0,$$

或者改写为

$$\frac{1}{b} [\Phi(a, b) - \Phi(a, 0)] = \frac{1}{b} [\Phi(0, b) - \Phi(0, 0)].$$

这就表示, 图中的直线 NM 和 PQ 具有相同的斜率, 也就是 NM 平行于 PQ 。由此可见, M 、 N 、 P 、 Q 四点共面 (均在平行线 NM 及 PQ 所决定的平面上)。现在, 我们假想把 Φ 的表达式加上一次式 $Ax + By + C$ (这样并不影响内力 F_{T1} 、 F_{T2} 、 F_{T12}), 然后选择 A 、 B 、 C 的数值, 使得

$$\Phi(a, 0) = \Phi(0, 0) = \Phi(0, b) = 0,$$

从而使得 N 、 P 、 Q 三点进入 xy 面内, 则 M 点也将进入 xy 面内, 而全部边界上的 Φ 值成为零。

根据以上的论证, 边界条件 (22-22) 就可以简写为

$$\Phi_s = 0, \quad (22-23)$$

其中的角码 s 表示边界值。

于是, 在 (22-23) 式所示的边界条件下, 由微分方程 (22-20) 解出内力函数 Φ , 即可用 (22-19) 式求得无矩内力。最简捷的解法是差分法。但是, 用级数求解, 可以得出一般公式。

微分方程 (22-20) 可以用重三角级数求解。将内力函数取为

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (b)$$

可以满足边界条件 (22-23)。代入微分方程 (22-20), 得

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(k_y \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + k_x \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q_3. \quad (c)$$

将荷载 q_3 也展为 $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ 的级数, 得

$$q_3 = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^a \int_0^b q_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right] \times$$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}。$$

代入式(c), 比较两边的系数, 求出 A_{mn} , 再代入式(b), 即得

$$\Phi = -\frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \int_0^b q_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{ky \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + kx \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}。$$

引用记号

$$\sigma = \frac{a}{b}, \quad \rho = \sqrt{\frac{R_x}{R_y}} = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}},$$

上式可以改写为

$$\Phi = -\frac{4R_y \sigma}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \int_0^b q_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2} \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}。 \quad (d)$$

由此可以用(22-19)式求得无矩内力。

例如, 设扁壳受均布外压力 q_0 , 即 $q_3 = -q_0$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b q_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= -q_0 \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = -\frac{4q_0 ab}{\pi^2 mn}, \end{aligned}$$

其中

$$m = 1, 3, 5, \dots; \quad n = 1, 3, 5, \dots。$$

代入式(d), 得

$$\Phi = \frac{16q_0 R_y a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2 \right)}$$

于是可用(22-19)式求得无矩内力如下:

$$F_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{16q_0 R_y \sigma^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m \left(m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2 \right)},$$

$$F_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{16q_0 R_y}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left(m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2 \right)},$$

$$F_{\Pi 2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{16q_0 R_1 \sigma}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2}$$

重三角级数式的解答,其优点是适用于任何荷载的情况(包括集中荷载的情况),其缺点是级数收敛很慢。

§ 22-4 无矩计算。单三角级数解答

在绝大多数的工程问题中,荷载 q 只是 x 的函数,或只是 y 的函数。这时,如用单三角级数求解无矩内力,级数一般是收敛较快的。下面将假定荷载 q_3 只是 x 的函数。为了便于利用对称条件来简化解答,把 x 轴放在扁壳底面的中心线上,如图 22-4 所示。

将内力函数 Φ 取为

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (\text{a})$$

可以满足 $x=0$ 及 $x=a$ 处的边界条件。代入(22-20),得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(k_x \frac{d^2}{dy^2} - k_y \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \Phi_m \sin \frac{m\pi x}{a} = q_3$$

将右边的 q_3 也展为 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ 的级数,然后比较两边的系数,即得 $\Phi_m(y)$ 的常微分方程

$$\left(k_x \frac{d^2}{dy^2} - k_y \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \Phi_m = \frac{2}{a} \int_0^a q_3 \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

将两边同除以 k_x , 并引用记号 $\rho = \sqrt{k_y/k_x}$, 得

$$\frac{d^2}{dy^2} \Phi_m - \left(\frac{\rho m \pi}{a} \right)^2 \Phi_m = \frac{2}{a k_x} \int_0^a q_3 \sin \frac{m\pi x}{a} dx, \quad (\text{b})$$

它的解答可以取为

$$\Phi_m = A_m \cosh \frac{\rho m \pi y}{a} + B_m \sinh \frac{\rho m \pi y}{a} + \Phi_m^*, \quad (\text{c})$$

其中 $\Phi_m^*(y)$ 是任一特解,可以按照式(b)右边积分的结果来选取,而 A_m 及 B_m 为任意常数,决定于 $y = \pm b/2$ 处的边界条件。

由于这里假定 q_3 只是 x 的函数,式(b)右边积分的结果将是一个常量。因

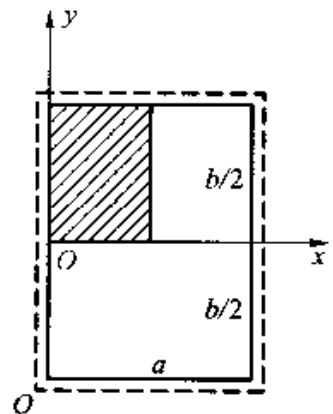


图 22-4

此，特解 Φ_m^* 可以取为

$$\begin{aligned}\Phi_m^* &= -\left(\frac{a}{\rho m \pi}\right)^2 \frac{2}{a k_y} \int_0^a q_3 \sin \frac{m \pi x}{a} dx \\ &= -\frac{2a}{\pi^2 k_y m^2} \int_0^a q_3 \sin \frac{m \pi x}{a} dx.\end{aligned}\quad (d)$$

代入式(c)，得

$$\Phi_m = A_m \cosh \frac{\rho m \pi y}{a} + B_m \sinh \frac{\rho m \pi y}{a} - \frac{2a}{\pi^2 k_y m^2} \int_0^a q_3 \sin \frac{m \pi x}{a} dx.$$

于是由式(a)得出

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{\rho m \pi y}{a} + B_m \sinh \frac{\rho m \pi y}{a} - \frac{2a}{\pi^2 k_y m^2} \int_0^a q_3 \sin \frac{m \pi x}{a} dx \right) \sin \frac{m \pi x}{a}, \quad (22-24)$$

其中的系数 A_m 及 B_m 决定于 $y = \pm b/2$ 处的边界条件。

例如，设扁壳在凸面受均布压力 q_0 ，即 $q_3 = -q_0$ ，则

$$\begin{aligned}\int_0^a q_3 \sin \frac{m \pi x}{a} dx &= -q_0 \int_0^a \sin \frac{m \pi x}{a} dx = -\frac{2q_0 a}{\pi m} \\ (m &= 1, 3, 5, \dots)\end{aligned}$$

代入(22-24)式，并注意由问题的对称性有 $B_m = 0$ ，即得

$$\Phi = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{\rho m \pi y}{a} + \frac{4q_0 a^2}{\pi^3 k_y m^3} \right) \sin \frac{m \pi x}{a}. \quad (e)$$

用边界条件

$$(\Phi)_{y=\pm b/2} = 0$$

求出 A_m ，再代回式(e)，即得内力函数的最后表达式

$$\Phi = \frac{4q_0 a^2}{\pi^3 k_y} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(1 - \frac{\cosh \frac{\rho m \pi y}{a}}{\cosh \frac{\rho m \pi b}{2a}} \right) \sin \frac{m \pi x}{a}. \quad (f)$$

将式(f)代入(22-19)中的第一式及第三式，得

$$\left. \begin{aligned}F_{11} &= -\frac{4q_0 \rho^2}{\pi k_y} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cosh \frac{\rho m \pi y}{a} \sin \frac{m \pi x}{a}}{m \cosh \frac{\rho m \pi b}{2a}}, \\ F_{112} &= \frac{4q_0 \rho}{\pi k_y} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \frac{\rho m \pi y}{a} \cos \frac{m \pi x}{a}}{m \cosh \frac{\rho m \pi b}{2a}}.\end{aligned}\right\} \quad (g)$$

注意 $k_y = \frac{1}{R_y}$, $\rho = \sqrt{k_y/k_x} = \sqrt{R_x/R_y}$, 并由(22-5)式可得

$$\rho = \sqrt{\frac{R_x}{R_y}} = \sqrt{\frac{f_b a^2}{f_a b^2}} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{f_b}{f_a}},$$

则式(g)可以改写成为

$$F_{T1} = -\frac{4q_0 R_x}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cosh\left(m\pi \sqrt{\frac{f_b}{f_a}} \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right)}{m \cosh\left(\frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_b}{f_a}}\right)},$$

$$F_{T12} = \frac{4q_0 \sqrt{R_x R_y}}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh\left(m\pi \sqrt{\frac{f_b}{f_a}} \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right)}{m \cosh\left(\frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_b}{f_a}}\right)}.$$

再将上列二式简写成为

$$F_{T1} = -q_0 R_x K_1, \quad (22-25)$$

$$F_{T12} = q_0 \sqrt{R_x R_y} K_2, \quad (22-26)$$

则其中量纲一的内力系数 K_1 及 K_2 完全确定于比值 f_a/f_b 、 x/a 及 y/b 。当 $f_a/f_b = 1$ 及 $f_a/f_b = 0.8$ 时, 算出的内力系数分别如表 22-1 及表 22-2 所示。由于对称, 只给出 1/4 扁壳的内力系数(该 1/4 扁壳在图 22-4 中用阴线表示)。更详细的表格, 见建筑工程部所编的《钢筋混凝土薄壳顶盖及楼盖结构设计计算规程》。

表 22-1 均布荷载 $f_a/f_b = 1$

x/a \ y/b		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	K_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	K_2	0.000	0.216	0.486	0.930	∞
$\frac{1}{8}$	K_1	0.202	0.222	0.300	0.500	1.000
	K_2	0.000	0.192	0.420	0.712	0.930
$\frac{1}{4}$	K_1	0.364	0.398	0.500	0.700	1.000
	K_2	0.000	0.136	0.280	0.420	0.486
$\frac{3}{8}$	K_1	0.467	0.500	0.602	0.778	1.000
	K_2	0.000	0.068	0.136	0.192	0.216
$\frac{1}{2}$	K_1	0.500	0.533	0.636	0.798	1.000
	K_2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表 22-2 均布荷载 $f_a/f_b = 0.8$

x/a \ y/b		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	K_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	K_2	0.000	0.202	0.458	0.886	∞
$\frac{1}{8}$	K_1	0.168	0.188	0.262	0.460	1.000
	K_2	0.000	0.182	0.402	0.706	0.960
$\frac{1}{4}$	K_1	0.306	0.338	0.446	0.662	1.000
	K_2	0.000	0.130	0.278	0.430	0.510
$\frac{3}{8}$	K_1	0.392	0.430	0.544	0.740	1.000
	K_2	0.000	0.068	0.138	0.200	0.228
$\frac{1}{2}$	K_1	0.422	0.460	0.574	0.762	1.000
	K_2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

这里没有导出内力 F_{T2} 的级数表达式, 因为 F_{T2} 可以很简单地用 F_{T1} 来表示: 由(22-18)中的第三式求解 F_{T2} , 即得

$$F_{T2} = \frac{q_3 - k_z F_{T1}}{k_y} = - \left(q_0 + \frac{F_{T1}}{R_x} \right) R_y \quad (h)$$

如果将 F_{T2} 表示成为

$$F_{T2} = -q_0 R_y K_2,$$

还可以由式(h)及(22-25)式得出关系式

$$K_2 = 1 - K_1.$$

§ 22-5 静水压力作用下的无矩内力

在20世纪60和70年代, 用钢丝网水泥制成的扁壳闸门, 曾在我国华东地区得到广泛的使用, 效果良好。实践证明: 如果闸门的高度与宽度相差不大, 则采用双曲扁壳比采用柱壳经济得多。为了适应设计时的需要, 我们曾对双曲扁壳在静水压力作用下的无矩内力进行分析计算, 现简介如下。

设闸门的高度为 a , 宽度为 b , 一部分承受静水压力, 图22-5。取坐标系如图所示, 则荷载 q_3 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} q_3 &= 0, & (0 \leq x \leq c) \\ q_3 &= -\frac{x-c}{a-c} q_0, & (c \leq x \leq a) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

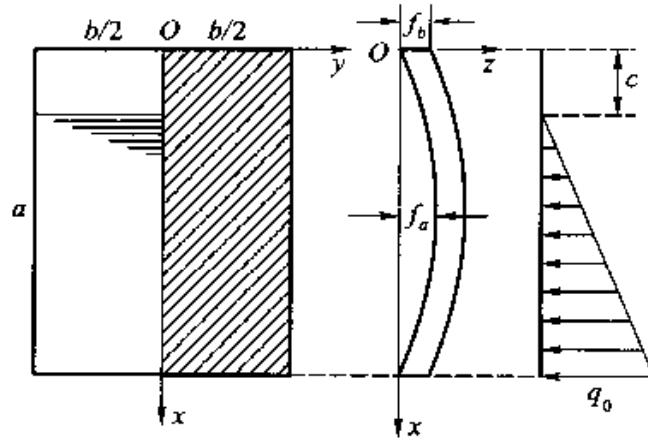


图 22-5

于是(22-24)式右边的积分式成为

$$\begin{aligned} \int_0^a q_3 \sin \frac{m\pi x}{a} dx &= \int_c^a \left(-\frac{x-c}{a-c} q_0 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \\ &= -\frac{q_0 a}{\pi m} \left[(-1)^{m-1} - \frac{a \sin \frac{m\pi c}{a}}{(a-c)m\pi} \right] \end{aligned} \quad (b)$$

代入(22-24)式,并注意由问题的对称性有 $B_m = 0$, 即得

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m \cosh \frac{\rho m \pi y}{a} + \frac{2q_0 a^2}{\pi^3 k_y m^3} \left[(-1)^{m-1} - \frac{\sin \frac{m\pi c}{a}}{\left(1 - \frac{c}{a}\right)m\pi} \right] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

应用边界条件

$$(\Phi)_{y=\pm b/2} = 0,$$

求出系数 A_m , 然后代入式(c), 即得

$$\Phi = \frac{2q_0 a^2}{\pi^3 k_y} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^3} \left[(-1)^{m-1} - \frac{\sin \frac{m\pi c}{a}}{\left(1 - \frac{c}{a}\right)m\pi} \right] \left[1 - \frac{\cosh \frac{\rho m \pi y}{a}}{\cosh \frac{\rho m \pi b}{2a}} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \right\} \quad (b)$$

将式(d)代入(22-19)中的第一式及第三式, 得到

$$F_{T1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{2q_0 R_v}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[(-1)^{m-1} - \frac{\sin \frac{m\pi c}{a}}{\left(1 - \frac{c}{a}\right)m\pi} \right] \frac{\cosh \frac{\rho m \pi y}{a}}{\cosh \frac{\rho m \pi d}{2a}} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (e)$$

$$F_{T12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{2q_0 \sqrt{R_x R_y}}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[(-1)^{m-1} - \frac{\sin \frac{m\pi c}{a}}{\left(1 - \frac{c}{a}\right)m\pi} \right] \frac{\sinh \frac{\rho m \pi y}{a}}{\cosh \frac{\rho m \pi b}{2a}} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

按照(22-18)中的第三式, 内力 F_{T2} 可用 F_{T1} 表示成为

$$F_{T2} = \frac{q_3 - k_x F_{T1}}{k_y} = \left(q_3 - \frac{F_{T1}}{R_x} \right) R_y$$

于是由式(a)得出

$$\left. \begin{aligned} F_{T2} &= -\frac{R_y}{R_x} F_{T1}, \quad (0 \leq x \leq c) \\ F_{T2} &= \left(-\frac{x-c}{a-c} q_0 - \frac{F_{T1}}{R_x} \right) R_y \\ &= -\frac{\frac{x-c}{a-c}}{1 - \frac{c}{a}} q_0 R_y - \frac{R_y}{R_x} F_{T1} \quad (c \leq x \leq a) \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

在等曲率扁壳中, $k_x = k_y = 1/R$, $\rho = \sqrt{k_x/k_y} = 1$, (e)、(f)、(g)三式简化为

$$F_{T1} = -\frac{2q_0 R}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[(-1)^{m-1} - \frac{\sin \frac{m\pi c}{a}}{\left(1 - \frac{c}{a}\right)m\pi} \right] \frac{\cosh \frac{m\pi y}{a}}{\cosh \frac{m\pi b}{2a}} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (h)$$

$$F_{T12} = \frac{2q_0 R}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[(-1)^{m-1} - \frac{\sin \frac{m\pi c}{a}}{\left(1 - \frac{c}{a}\right)m\pi} \right] \frac{\sinh \frac{m\pi y}{a}}{\cosh \frac{m\pi b}{2a}} \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (i)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{T2} &= -F_{T1}, \quad (0 \leq x \leq c) \\ F_{T2} &= -\frac{x-c}{a-c} q_0 R - F_{T1} \quad (c \leq x \leq a) \end{aligned} \right\} \quad (22-27)$$

式(h)及式(i)可以表示成为

$$F_{T1} = -q_0 R K_1, \quad (22-28)$$

$$F_{T12} = q_0 R K_2 \quad (22-29)$$

这样, 量纲一的内力系数 K_1 及 K_2 将完全决定于比值 b/a 、 c/a 、 x/a 、 y/b (比值 y/a 作为 y/b 与 b/a 的乘积)。

因为在双曲扁壳闸门中, 采用等曲率扁壳最为经济, 所以我们曾应用等曲率扁壳的上列公式, 在电子数字计算机上算出 K_1 和 K_2 的数值, 制成表格, 载入华东水利学院工程力学系在 1972 年所编的《双曲扁壳闸门的计算与设计》。

现将 $b/a = 1$ 的部分表格复制如表 22-3 至表 22-6 所示。

表 22-3 静水压力 $b/a = 1$ $c/a = 0$

$x/a \backslash y/b$		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	K_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	K_2	0.000	0.083	0.172	0.273	0.390
$\frac{1}{8}$	K_1	0.081	0.084	0.094	0.108	0.125
	K_2	0.000	0.080	0.166	0.265	0.381
$\frac{1}{4}$	K_1	0.154	0.163	0.182	0.213	0.250
	K_2	0.000	0.069	0.146	0.240	0.353
$\frac{3}{8}$	K_1	0.214	0.226	0.259	0.312	0.375
	K_2	0.000	0.050	0.112	0.193	0.302
$\frac{1}{2}$	K_1	0.250	0.267	0.318	0.399	0.500
	K_2	0.000	0.023	0.057	0.118	0.219
$\frac{5}{8}$	K_1	0.253	0.274	0.344	0.466	0.625
	K_2	0.000	-0.018	-0.024	0.001	0.086
$\frac{3}{4}$	K_1	0.210	0.235	0.318	0.487	0.750
	K_2	0.000	-0.067	-0.134	-0.180	-0.133
$\frac{7}{8}$	K_1	0.121	0.138	0.206	0.392	0.875
	K_2	0.000	-0.112	-0.254	-0.447	-0.549
1	K_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	K_2	0.000	-0.133	-0.314	-0.657	$-\infty$

表 22-4 静水压力 $b/a = 1$ $c/a = 1/4$

$x/a \backslash y/b$		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	K_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	K_2	0.000	0.047	0.091	0.126	0.140
$\frac{1}{8}$	K_1	0.047	0.047	0.043	0.030	0.000
	K_2	0.000	0.047	0.095	0.137	0.157
$\frac{1}{4}$	K_1	0.095	0.095	0.095	0.080	0.000
	K_2	0.000	0.048	0.102	0.165	0.241
$\frac{3}{8}$	K_1	0.140	0.145	0.157	0.168	0.167
	K_2	0.000	0.043	0.099	0.180	0.311

续表

x/a \ y/b		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	K_1	0.174	0.186	0.219	0.271	0.333
	K_2	0.000	0.028	0.071	0.148	0.281
$\frac{5}{8}$	K_1	0.186	0.204	0.263	0.364	0.500
	K_2	0.000	-0.003	0.009	0.059	0.180
$\frac{3}{4}$	K_1	0.161	0.183	0.260	0.418	0.667
	K_2	0.000	-0.045	-0.088	-0.105	-0.021
$\frac{7}{8}$	K_1	0.095	0.112	0.176	0.357	0.833
	K_2	0.000	-0.088	-0.201	-0.361	-0.427
1	K_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	K_2	0.000	-0.107	-0.260	-0.570	$-\infty$

表 22-5 静水压力 $b/a=1$ $c/a=1/2$

x/a \ y/b		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	K_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	K_2	0.000	0.019	0.036	0.048	0.052
$\frac{1}{8}$	K_1	0.020	0.019	0.015	0.009	0.000
	K_2	0.000	0.020	0.038	0.052	0.057
$\frac{1}{4}$	K_1	0.041	0.040	0.034	0.021	0.000
	K_2	0.000	0.023	0.045	0.064	0.072
$\frac{3}{8}$	K_1	0.065	0.064	0.060	0.043	0.000
	K_2	0.000	0.025	0.054	0.088	0.107
$\frac{1}{2}$	K_1	0.088	0.092	0.099	0.095	0.000
	K_2	0.000	0.023	0.057	0.118	0.219
$\frac{5}{8}$	K_1	0.102	0.113	0.146	0.196	0.250
	K_2	0.000	0.009	0.034	0.107	0.282
$\frac{3}{4}$	K_1	0.096	0.112	0.170	0.295	0.500
	K_2	0.000	-0.020	-0.032	-0.004	0.148
$\frac{7}{8}$	K_1	0.060	0.073	0.128	0.293	0.750
	K_2	0.000	-0.054	-0.126	-0.232	-0.225
1	K_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	K_2	0.000	-0.070	-0.178	-0.432	$-\infty$

表 22-6 静水压力 $b/a=1$ $c/a=3/4$

$x/a \backslash y/b$		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	K_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	K_2	0.000	0.004	0.008	0.011	0.012
$\frac{1}{8}$	K_1	0.005	0.004	0.003	0.002	0.000
	K_2	0.000	0.005	0.009	0.012	0.013
$\frac{1}{4}$	K_1	0.010	0.009	0.008	0.004	0.000
	K_2	0.000	0.006	0.011	0.015	0.016
$\frac{3}{8}$	K_1	0.016	0.016	0.013	0.008	0.000
	K_2	0.000	0.007	0.014	0.020	0.022
$\frac{1}{2}$	K_1	0.023	0.023	0.022	0.015	0.000
	K_2	0.000	0.007	0.017	0.029	0.035
$\frac{5}{8}$	K_1	0.029	0.031	0.036	0.033	0.000
	K_2	0.000	0.005	0.018	0.042	0.063
$\frac{3}{4}$	K_1	0.030	0.035	0.055	0.088	0.000
	K_2	0.000	-0.003	0.003	0.046	0.205
$\frac{7}{8}$	K_1	0.020	0.026	0.054	0.158	0.050
	K_2	0.000	-0.017	-0.039	-0.060	0.123
1	K_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	K_2	0.000	-0.025	-0.070	-0.216	$-\infty$

§ 22-6 合理中面

当扁壳承受指定的荷载 q_3 时，我们总可以这样来选择该扁壳的中面：使拉压力在整个扁壳内等于一个常量 N ，即

$$F_{r1} = F_{r2} = N, \quad (a)$$

并使其余的内力全都等于零，即

$$F_{r12} = M_1 = M_2 = M_{12} = F_{s1} = F_{s2} = 0. \quad (b)$$

这时，在整个扁壳内，应力均匀分布，材料的强度得到最充分的利用。这样的中面称为该指定荷载下的合理中面，而这样的扁壳称为膜型扁壳。对于混凝土扁壳，如果采用合理中面，并且使 N 为压力，则在整个扁壳内无须布置钢筋，

而这种扁壳称为无筋扁壳。

现在来说明，如何确定扁壳的合理中面。将式(a)及式(b)代入扁壳的平衡微分方程(22-12)，可见其中的前两个方程总能满足，而第三个方程要求

$$k_x + k_y = \frac{q_3}{N}。$$

将(22-2)式代入，即得合理中面的微分方程如下：

$$\nabla^2 z = -\frac{q_3}{N}。 \quad (22-30)$$

按照指定的荷载 q_3 及指定的边界高度 z_1 ，由这一微分方程求解 z ，表示成为坐标的函数，即得合理中面的方程。

例如，设荷载为均匀分布，即 $q_3 = \text{常量}$ ，扁壳边界为半径 a 的圆周。以界面（即底面）为 xy 面，以圆周的圆心为坐标原点，则中面的边界条件为 $z_1 = 0$ 。取

$$z = C(a^2 - x^2 - y^2) = C(a^2 - \rho^2)，$$

其中 C 为常数，可以满足边界条件。代入(22-30)式，得

$$-4C = -\frac{q_3}{N}。$$

于是得 $C = q_3/4N$ ，从而得合理中面的方程

$$z = \frac{q_3}{4N}(a^2 - \rho^2)。 \quad (c)$$

因为在边界以内有 $a^2 - \rho^2 > 0$ 和 $z > 0$ ，所以 N 和 q_3 的正负号相同，即：当荷载是由扁壳的凹方指向凸方时， N 为拉力；当荷载是由凸方指向凹方时， N 为压力。

由式(c)可见，扁壳的矢高为

$$f = (z)_{\rho=0} = \frac{q_3 a^2}{4N}。$$

对于一定的 q_3 和 a ，采用较大的矢高 f ，则 N 较小，扁壳所需的厚度较小，但壳面较大；采用较小的 f ，则 N 较大，扁壳所需的厚度较大，但壳面较小。选择适当的矢高，可以使得扁壳的体积为最小，所需的材料最少。但须注意，不能使矢高太大，以至超出扁壳的范围，使得以上的分析不能成立。

如果扁壳的覆盖面是矩形，则微分方程(22-30)的函数式解答只能表示成为无穷级数。这时，用差分法寻求合理中面，是比较方便的。参阅图 14-1 及差分公式(14-2)，极易导出与(22-30)相应的差分方程如下：

$$4z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 = \frac{h^2}{N} q_3。 \quad (d)$$

不论边界的高度如何变化，荷载如何分布，都可以为内结点建立(d)型的差分方程，从而求得扁壳合理中面在各个内结点处的高度。

应当指出：所谓合理中面，必须是和一定的荷载相对应。如果在某种分布的荷载作用下，某一曲面是合理中面，那么，荷载一有改变，内力改观，该曲面就不再是合理中面。这时，不但拉压力不再是常量，而且将发生平错力和平板内力。还应当指出：在扁壳的边界上，必须不存在法向的约束，不存在绕边界转动的约束，也不存在沿边界平错方向的约束，才可能发生各处、各向相同的拉压力。如果存在上述三种约束的任何一种，则不但拉压力不再是常量，而且也将发生平错力和平板内力。

由以上所述可见，合理中面的合理性往往是难以实现的，而且，由于合理中面总是比较复杂的曲面，如果发生了平板内力，进行计算也是非常困难的。因此，只有在荷载分布几乎固定而且边缘效应又很小的情况下，合理中面才有实用意义。

§ 22-7 用混合法解弯曲问题

在扁壳的弯曲问题中，仍然引用内力函数 $\Phi(x, y)$ ，将薄膜内力用函数 Φ 表示，如(22-19)式所示，即

$$F_{\tau_1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad F_{\tau_2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad F_{\tau_{12}} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (22-31)$$

另一方面，将几何方程(22-13)中的后三式代入物理方程(22-14)中的后三式，可将弯矩及扭矩用 w 表示成为

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{12} &= -(1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (22-32)$$

将此三式代入(22-11)式，又可将横向剪力用 w 表示成为

$$F_{s_1} = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad F_{s_2} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (22-33)$$

于是，全部内力都已用 Φ 和 w 表示，而扁壳的弯曲问题可以按 Φ 和 w 求解。这就是扁壳弯曲问题的混合法。

现在来导出求解 Φ 及 w 的微分方程。将(22-31)式及(22-32)式代入平衡微分方程(22-12)，可见其中的前两个方程总能满足，而第三个方程成为用 Φ 及 w 表示的平衡条件

$$D\nabla^4 w + \nabla_k^2 \Phi = q_3. \quad (22-34)$$

另一方面, 从几何方程(22-13)的前三式中消去 u 及 v , 得出形变相容条件

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} - \nabla_k^2 w = 0. \quad (a)$$

再从物理方程(19-19)的前三式中解出 ε_1 、 ε_2 、 ε_{12} , 然后将薄膜内力通过(22-31)式用 Φ 来表示, 得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{F_{T1} - \mu F_{T2}}{E\delta} = \frac{1}{E\delta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{F_{T2} - \mu F_{T1}}{E\delta} = \frac{1}{E\delta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{2(1+\mu)}{E\delta} F_{T12} = -\frac{2(1+\mu)}{E\delta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a), 即得用 Φ 及 w 表示的相容条件

$$\frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi - \nabla_k^2 w = 0. \quad (22-35)$$

方程(22-34)及(22-35)就是扁壳弯曲问题的混合法基本微分方程。在边界条件下从这两个基本微分方程解出基本未知函数 Φ 和 w , 就可以用(22-31)式求得薄膜内力, 用(22-32)式及(22-33)式求得平板内力。

在 § 22-2 中已经说明, 在 x 为常量的边界上, 边界条件是

$$F_{T1} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_1 = 0. \quad (22-36)$$

因为有 $w = 0$, 所以有 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ 。但因

$$M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

所以又有 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$, 从而有 $\nabla^2 w = 0$ 。于是边界条件(22-36)可以改写为

$$F_{T1} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \nabla^2 w = 0. \quad (c)$$

另一方面, 因为有 $v = 0$, 所以有 $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, 但因 $\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_y w$, 现在既然有 $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

和 $w = 0$, 所以有 $\varepsilon_2 = 0$ 。又因为 $\varepsilon_2 = \frac{F_{T2} - \mu F_{T1}}{E\delta}$, 既然有 $F_{T1} = 0$ 和 $\varepsilon_2 = 0$, 所以

又有 $F_{T2} = 0$, 从而有 $F_{T1} + F_{T2} = 0$ 。注意 $F_{T1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ 而 $F_{T2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, 可见边界条件

(c)可以用 Φ 及 w 表示成为

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 \Phi = 0, \quad w = 0, \quad \nabla^2 w = 0. \quad (22-37)$$

同样，在 y 为常量的边界上，边界条件可以表示成为

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad \nabla^2 \Phi = 0, \quad w = 0, \quad \nabla^2 w = 0, \quad (22-38)$$

但是，按照 § 22-3 中所述，(22-37) 中的第一式及 (22-38) 中的第一式可以合并而简写成为 $\Phi_{,s} = 0$ 。因此，边界条件 (22-37) 及 (22-38) 可以合并而简写成为

$$\Phi_{,s} = 0, \quad (\nabla^2 \Phi)_{,s} = 0, \quad w_{,s} = 0, \quad (\nabla^2 w)_{,s} = 0. \quad (22-39)$$

§ 22-8 混合解函数的引用。级数解答

为了求解扁壳弯曲问题的混合法基本微分方程，可以引用一个混合解函数 $F(x, y)$ ，而将 w 及 Φ 表示成为

$$w = \nabla^4 F, \quad \Phi = E\delta \nabla_k^2 F. \quad (22-40)$$

代入方程 (22-35)，注意 $\nabla^4 \nabla_k^2 = \nabla_k^2 \nabla^4$ ，可见该方程总能满足。代入方程 (22-34)，即得 $F(x, y)$ 所应满足的方程

$$\nabla^8 F + \frac{E\delta}{D} \nabla_k^4 F = \frac{q_3}{D}. \quad (22-41)$$

这样，求解扁壳的弯曲问题，就成为求解单个微分方程的问题。

为了把内力用 $F(x, y)$ 来表示，只须将 (22-40) 式代入 (22-31) 式、(22-32) 式及 (22-33) 式。这样就得到

$$\left. \begin{aligned} F_{,11} &= E\delta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla_k^2 F, \quad F_{,22} = E\delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla_k^2 F, \\ F_{,112} &= -E\delta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla_k^2 F, \end{aligned} \right\} \quad (22-42)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^4 F, \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \nabla^4 F, \\ M_{12} &= -(1-\mu) D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^4 F, \end{aligned} \right\} \quad (22-43)$$

$$F_{s1} = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^6 F, \quad F_{s2} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^6 F. \quad (22-44)$$

为了把边界条件用 $F(x, y)$ 来表示，只须将 (22-40) 式代入 (22-39) 式。这样就得到

$$(\nabla_k^2 F)_{,s} = 0, \quad (\nabla^2 \nabla_k^2 F)_{,s} = 0,$$

$$(\nabla^4 F)_x = 0, \quad (\nabla^6 F)_x = 0. \quad (22-45)$$

对于微分方程(22-41), 不难用重三角级数求解。把函数 $F(x, y)$ 取为

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (a)$$

可以满足边界条件(22-45)。再将荷载 q_3 也展为同样形式的级数:

$$q_3 = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^a \int_0^b q_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right] \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

将式(a)及式(b)一并代入微分方程(22-41), 比较两边的系数, 就得出 A_{mn} , 从而得出

$$F = \frac{4a^6 \sigma}{\pi^8 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \int_0^b q_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{(m^2 + \sigma^2 n^2)^4 + \tau \left(m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2 \right)^2} \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

其中

$$\sigma = \frac{a}{b}, \quad \rho = \sqrt{\frac{R_x}{R_y}},$$

$$\tau = \frac{E\delta a^4}{\pi^4 D R_x^2} = \frac{12(1-\mu^2)a^4}{\pi^4 \delta^2 R_x^2},$$

它们都是量纲为一的常数。既然确定了 F , 就可以用公式(22-42)至(22-44)求得内力。

在求解微分方程(22-41)时, 也可以把 $F(x, y)$ 取为单三角级数如下:

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (c)$$

在 $x=0$ 及 $x=a$ 的边界上, 边界条件(22-45)是满足的。将荷载 q_3 也展为与上相同的级数, 得出

$$q_3 = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^a q_3 \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (d)$$

然后将式(c)及式(d)一并代入微分方程(22-41), 比较两边的系数, 即得 $\psi_m(y)$ 的八阶常微分方程。利用 $y=0$ 及 $y=b$ 处的边界条件, 可以得出 $\psi_m(y)$ 的解答, 从而由式(c)得出 F 的解答, 然后用公式(22-42)至(22-44)求得内力。

不论是用重三角级数或单三角级数求得的解答, 其中的级数总是收敛得很慢, 因此, 在应用这些解答时, 将花费很大的计算工作量。

§ 22-9 等曲率扁壳的计算

在等曲率扁壳(即球面扁壳)中, $R_1 = R_2 = R$ 而 $k_x = k_y = 1/R$, ∇_k^2 简化为

∇^2/R , 而基本微分方程(22-34)及(22-35)简化为

$$D\nabla^4 w + \frac{1}{R}\nabla^2\Phi = q_3, \quad \frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi - \frac{1}{R}\nabla^2 w = 0. \quad (22-46)$$

现在, 引用一个新的函数

$$f(x, y) = \frac{1}{E\delta}\nabla^2\Phi - \frac{1}{R}w, \quad (a)$$

则有

$$\nabla^2 f = \frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi - \frac{1}{R}\nabla^2 w,$$

并由(22-46)中的第二方程得到

$$\nabla^2 f = 0. \quad (b)$$

可见 $f(x, y)$ 应为 x 和 y 的调和函数。

另一方面, 在边界上有 $(\nabla^2\Phi)_n = w_n = 0$ 。于是由式(a)可见有

$$f_n = 0. \quad (c)$$

按照数学分析, 一个调和函数, 如果在某一单连区域的边界上为零, 则在全区域内为零。于是由式(b)及式(c)可见有

$$f(x, y) = 0.$$

代入式(a), 即得

$$\nabla^2\Phi = \frac{E\delta}{R}w, \quad (22-47)$$

并由(22-46)中的前一个方程得到

$$D\nabla^4 w + \frac{E\delta}{R^2}w = q_3. \quad (22-48)$$

这样, 两个联立的四阶偏微分方程(22-46), 就变换成为一个独立的四阶偏微分方程(22-48), 和一个与之相关连的二阶偏微分方程(22-47)。于是就可以先按照 $w_n = 0$ 和 $(\nabla^2 w)_n = 0$ 的边界条件, 由(22-48)求解 w , 然后, 既然已知 w , 就可以在 $\Phi_n = 0$ 的边界条件下由(22-47)求解内力函数 Φ 。

微分方程(22-48)及(22-47)仍然可以用三角级数求解, 但仍然很繁, 而且级数仍然收敛得很慢。前苏联的季柯维奇和美国的帕尔姆曾对受均布荷载的球面扁壳进行计算, 得出一些成果, 但是, 这些成果很不便应用于工程设计。

§ 22-10 等曲率扁壳的简化计算

按照前一节中所述, 等曲率扁壳的位移 w 须满足微分方程

$$D \nabla^4 w + \frac{E\delta}{R^2} w = q_3, \quad (a)$$

并满足边界条件

$$w_s = 0, \quad (\nabla^2 w)_s = 0. \quad (b)$$

有了位移 w , 就可以求得弯矩和扭矩:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{12} &= -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

内力函数 Φ 须满足微分方程

$$\nabla^2 \Phi = \frac{E\delta}{R} w, \quad (d)$$

并满足边界条件

$$\Phi_s = 0, \quad (e)$$

有了内力函数 Φ , 就可以求得薄膜内力:

$$F_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad F_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad F_{112} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (f)$$

另一方面, 设无矩解答中的内力函数为 Φ_0 , 则按照(22-20)式, Φ_0 须满足微分方程 $\nabla_k^2 \Phi_0 = q_3$. 对于等曲率扁壳, 它简化为

$$\nabla^2 \Phi_0 = R q_3. \quad (g)$$

按照(22-23)式, Φ_0 的边界条件为

$$(\Phi_0)_s = 0. \quad (h)$$

有了内力函数 Φ_0 , 就可以求得无矩内力:

$$F_{11}^0 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2}, \quad F_{12}^0 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}, \quad F_{112}^0 = -\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y}. \quad (i)$$

现在来考察, 实际薄膜内力 F_{11} 、 F_{12} 、 F_{112} 与无矩内力 F_{11}^0 、 F_{12}^0 、 F_{112}^0 之间有什么关系。为此, 将式(d)与式(g)相减, 得

$$\nabla^2 (\Phi - \Phi_0) = \frac{E\delta}{R} w - R q_3.$$

利用式(a), 它可以改写成为

$$\nabla^2 (\Phi - \Phi_0) = -RD \nabla^4 w,$$

或

$$\nabla^2 (RD \nabla^4 w + \Phi - \Phi_0) = 0.$$

可见 $RD \nabla^4 w + \Phi - \Phi_0$ 为调和函数。另一方面, 由(b)中的第二式以及式(e)和

式(h), 可见这个调和函数有边界条件

$$(RD\nabla^2 w + \Phi - \Phi_0)_{,i} = 0。$$

于是可见这个调和函数恒等于零, 从而得出

$$\Phi = \Phi_0 - RD\nabla^2 w。 \quad (j)$$

将式(j)对 x 及 y 求二阶导数, 得到

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - RD \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 w,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} - RD \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 w,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} - RD \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 w。$$

于是, 利用式(f)及式(i), 可将实际薄膜内力 F_{T1} 、 F_{T2} 、 F_{T12} 用无矩内力 F_{T1}^0 、 F_{T2}^0 、 F_{T12}^0 及 w 表示如下:

$$F_{T1} = F_{T1}^0 - RD \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 w, \quad (22-49)$$

$$F_{T2} = F_{T2}^0 - RD \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 w, \quad (22-50)$$

$$F_{T12} = F_{T12}^0 + RD \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 w。 \quad (22-51)$$

再在(22-51)式中, 利用(c)中的第三式, 又可将实际平错力 F_{T12} 用无矩平错力 F_{T12}^0 及扭矩 M_{12} 表示成为

$$F_{T12} = F_{T12}^0 - \frac{R}{1-\mu} \nabla^2 M_{12}。 \quad (22-52)$$

根据以上的推导, 可以得出扁壳的一个简化算法, 其步骤如下:

(1) 按照无矩理论计算无矩内力。如果无表可查, 可以用差分法进行计算。如果有表可查, 则计算更为简便。

(2) 在式(b)所示的边界条件下, 由微分方程(a)求解位移 w , 并按照式(c)由 w 求出弯矩及扭矩。由于弯矩及扭矩不如薄膜内力重要, 而且是局部性的(边缘效应), 因此可以针对不同的荷载及不同的局部处所, 采用不同的近似方法来处理微分方程。

(3) 按照(22-49)式至(22-52)式, 由无矩内力及 w 或 M_{12} 计算实际薄膜内力。这样就根本不必过问内力函数 Φ 。

§ 22-11 等曲率扁壳受均布荷载时的简化计算

本节中以均布荷载的情况为例, 说明等曲率扁壳简化算法的应用。设均

布荷载为 $q_3 = -q_0$ ，则位移 w 的微分方程及边界条件为

$$D\nabla^4 w + \frac{E\delta}{R^2}w = -q_0, \quad (\text{a})$$

$$w_{,i} = (\nabla^2 w)_{,i} = 0. \quad (\text{b})$$

在扁壳的中央区，图 22-6，即离开四个边界都较远的处所，由于边缘效应很小，平板内力可以不计，无矩理论给出的解答是近乎精确的。因此，计算薄膜内力时，可以用 § 22-4 中的公式及表格进行计算。

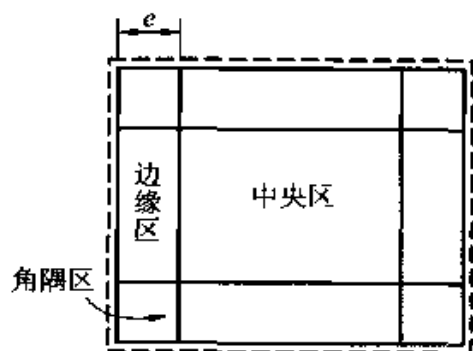


图 22-6

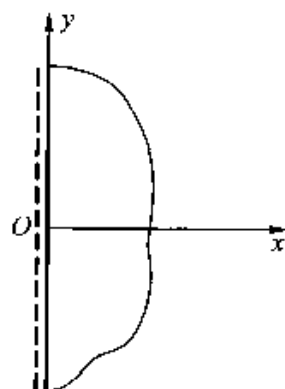


图 22-7

在扁壳的边缘区，即离开某一个边界较近的处所，由于该边界的约束影响，将发生局部性的平板内力，而且无矩理论给出的薄膜内力需要修正。为了简化计算，我们不计其余三个边界的约束影响，把扁壳当做半无限大。于是弹性曲面将为柱面，而位移 w 将只是一个坐标的函数。以边界 $x=0$ 的近处为例，图 22-7， w 将只是 x 的函数，不随 y 变化。于是微分方程 (a) 简化为

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E\delta}{R^2}w = -q_0. \quad (\text{c})$$

和 § 20-6 中一样地引用常数

$$\lambda = \left(\frac{E\delta}{4R^2 D} \right)^{1/4} = \left[\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 \delta^2} \right]^{1/4},$$

则上列微分方程可以变换成为

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = -\frac{q_0}{D}. \quad (\text{d})$$

常微分方程 (d) 的解答可以取为如下的形式：

$$w = e^{-\lambda x} (A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x) + e^{\lambda x} (A_3 \cos \lambda x + A_4 \sin \lambda x) - \frac{q_0 R^2}{E\delta}.$$

当 x 无限增大时， w 应保持为有限大，可见有 $A_3 = A_4 = 0$ 。利用边界条件 (b)，

在这里是

$$(w)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = 0,$$

即可求出常数 A_1 及 A_2 , 从而得到 w 在边缘区的近似解答

$$w = -\frac{q_0 R^2}{E\delta} (1 - e^{-\lambda x} \cos \lambda x) \quad (e)$$

由此可得弯矩 M_1 在边缘区的近似解答如下:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \\ &= -D \frac{q_0 R^2}{E\delta} 2\lambda^2 e^{-\lambda x} \sin \lambda x \\ &= -\frac{q_0 R\delta}{2\sqrt{3}(1-\mu^2)} e^{-\lambda x} \sin \lambda x, \end{aligned} \quad (22-53)$$

按照公式(20-20), $e^{-\lambda x} \sin \lambda x = f_2(\lambda x)$, 它的数值可由表 20-1 中查得。同样可得弯矩 M_2 及扭矩 M_{12} 在边缘区的近似解答

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\mu D \frac{d^2 w}{dx^2} = \mu M_1, \\ M_{12} &= -(1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22-54)$$

将式(e)代入(22-49)式及(22-51)式, 得到

$$F_{T1} = F_{T1}^0, \quad F_{T12} = F_{T12}^0 \quad (f)$$

此外, 由(22-50)式可得

$$F_{T2} = F_{T2}^0 - RD \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 w = F_{T2}^0 - RD \frac{d^4 w}{dx^4}.$$

利用式(c)消去上式中的 $D \frac{d^4 w}{dx^4}$, 得

$$F_{T2} = F_{T2}^0 + q_0 R + \frac{E\delta}{R} w.$$

再将式(e)代入, 即得

$$F_{T2} = F_{T2}^0 + q_0 R e^{-\lambda x} \cos \lambda x, \quad (22-55)$$

按照公式(20-20), $e^{-\lambda x} \cos \lambda x = f_4(\lambda x)$, 它的数值可由表 20-1 中查得。与 § 20-7 中所述相同, 在 x 大于 $2.0 \sqrt{R\delta}$ 至 $2.5 \sqrt{R\delta}$ 之处, 边缘效应可以不计。这就是说, 边缘区的宽度 e 约为 $2.0 \sqrt{R\delta}$ 至 $2.5 \sqrt{R\delta}$ 。

在扁壳的角隅区, 图 22-6, 即离开某一个角点较近而离开其余三个角点较远的处所, 可以不计远处二边界的约束影响, 而把扁壳当做四分之

一无限大, 图 22 - 8。仍然引用常数 λ , 则微分方程 (a) 及边界条件 (b) 可以写成

$$\nabla^4 w + 4\lambda^4 w = -\frac{q_0}{D}, \quad (g)$$

$$(w, \nabla^2 w)_{x=0} = 0, \quad (w, \nabla^2 w)_{y=0} = 0. \quad (h)$$

将 w 的解答取为傅里叶积分的形式, 即

$$w = \int_0^\infty \int_0^\infty F(m, n) \sin mx \sin ny \, dm \, dn, \quad (i)$$

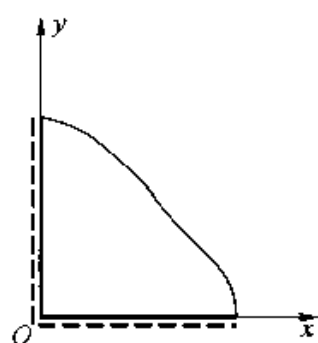


图 22 - 8

可以满足边界条件 (h)。代入微分方程 (g), 得

$$\int_0^\infty \int_0^\infty [(m^2 + n^2)^2 + 4\lambda^4] F(m, n) \sin mx \sin ny \, dm \, dn = -\frac{q_0}{D}. \quad (j)$$

现在需要把式 (j) 右边的 $-q_0/D$ 也表示成为傅里叶积分的形式。为此, 我们应用积分公式

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{m} \, dm = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin ny}{n} \, dn = \frac{\pi}{2}.$$

将二式相乘, 得到

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{m} \, dm \int_0^\infty \frac{\sin ny}{n} \, dn = \frac{\pi^2}{4},$$

也就是

$$\frac{\pi^2}{4} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin mx \sin ny}{mn} \, dm \, dn.$$

将两边乘以 $-4q_0/\pi^2 D$, 即得 $-q_0/D$ 的傅里叶积分表达式:

$$-\frac{q_0}{D} = -\frac{4q_0}{\pi^2 D} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin mx \sin ny}{mn} \, dm \, dn.$$

代入式 (j), 比较两边的被积函数, 可见

$$F(m, n) = -\frac{4q_0}{\pi^2 D} \frac{1}{mn [(m^2 + n^2)^2 + 4\lambda^4]}.$$

代入式 (i), 即得位移 w 在角隅区的近似解答

$$w = -\frac{4q_0}{\pi^2 D} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin mx \sin ny}{mn [(m^2 + n^2)^2 + 4\lambda^4]} \, dm \, dn, \quad (k)$$

从而得出扭矩在角隅区的近似解答

$$M_{12} = -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{4(1 - \mu) q_0}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos mx \cos ny}{(m^2 + n^2)^2 + 4\lambda^4} \, dm \, dn.$$

(22 - 56)

对于弯矩 M_1 及 M_2 , 本来也可以由式 (k) 得出它们的傅里叶积分式的表达式, 但由于这些表达式不便利用函数表来进行数字计算, 所以就套用公式

(22-53) 和一个相似的公式

$$M_2 = -\frac{q_0 R \delta}{2 \sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\lambda y} \sin \lambda y. \quad (22-57)$$

对于式中的 $e^{-\lambda y} \sin \lambda y = f_2(\lambda y)$, 可由表 20-1 查得数值。

将(22-56)式代入公式(22-52), 得出

$$F_{\tau_{12}} = F_{\tau_{12}}^0 + \frac{4q_0 R}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(m^2 + n^2) \cos mx \cos ny}{(m^2 + n^2)^2 + 4\lambda^4} dm dn. \quad (22-58)$$

于是可由无矩解答中的 $F_{\tau_{12}}^0$ 求得实际平错力 $F_{\tau_{12}}$ 。对于拉压力 F_{τ_1} 及 F_{τ_2} , 根据与上相同的理由, 就套用公式(22-55)和一个相似的公式

$$F_{\tau_1} = F_{\tau_1}^0 + q_0 R e^{-\lambda y} \cos \lambda y. \quad (22-59)$$

对于式中的 $e^{-\lambda y} \cos \lambda y = f_4(\lambda y)$, 可由表 20-1 查得数值。

为了便于查表计算, 再将(22-56)式及(22-58)式中的傅里叶积分改用汤姆逊函数来表示。利用变换式

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos mx \cos ny dm dn}{(m^2 + n^2)^2 + (2\lambda^2)^2} = -\frac{\pi}{2(2\lambda^2)} \text{Kei}[\sqrt{2\lambda^2(x^2 + y^2)}],$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(m^2 + n^2) \cos mx \cos ny dm dn}{(m^2 + n^2)^2 + (2\lambda^2)^2} = \frac{\pi}{2} \text{Ker}[\sqrt{2\lambda^2(x^2 + y^2)}],$$

可将(22-56)式及(22-58)式改写成为

$$M_{12} = -\frac{(1-\mu)q_0}{\pi\lambda^2} \text{Kei}[\sqrt{2\lambda^2(x^2 + y^2)}],$$

$$F_{\tau_{12}} = F_{\tau_{12}}^0 + \frac{2q_0 R}{\pi} \text{Ker}[\sqrt{2\lambda^2(x^2 + y^2)}],$$

或再简写成为

$$M_{12} = -\frac{(1-\mu)q_0}{\pi\lambda^2} \text{Kei}(\sqrt{2}\lambda\rho), \quad (22-60)$$

$$F_{\tau_{12}} = F_{\tau_{12}}^0 + \frac{2q_0 R}{\pi} \text{Ker}(\sqrt{2}\lambda\rho), \quad (22-61)$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为距扁壳角点 ($x = y = 0$) 的距离。特殊函数 $\text{Kei}(\sqrt{2}\lambda\rho)$ 及 $\text{Ker}(\sqrt{2}\lambda\rho)$ 的数值可由表 22-7 查得。

在扁壳的角点处 ($x = y = \rho = 0$), $\text{Ker}(\sqrt{2}\lambda\rho)$ 成为正无限大, $F_{\tau_{12}}^0$ 成为负无限大, 而 $F_{\tau_{12}}$ 趋于一个有限大的数值。通过比较复杂的数学运算, 可以导出计算这个数值的公式。但是, 如 § 22-2 中所述, 角点处的内力并不需要计算, 算出来也不能反映实际情况。

表 22-7

$\sqrt{2}\lambda\rho$	$\text{Kei}(\sqrt{2}\lambda\rho)$	$\text{Ker}(\sqrt{2}\lambda\rho)$	$\sqrt{2}\lambda\rho$	$\text{Kei}(\sqrt{2}\lambda\rho)$	$\text{Ker}(\sqrt{2}\lambda\rho)$
0	-0.785	∞	1.6	-0.303	0.026
0.1	-0.777	2.420	1.7	-0.275	0.004
0.2	-0.758	1.733	1.8	-0.249	-0.015
0.3	-0.733	1.337	1.9	-0.225	-0.030
0.4	-0.704	1.063	2.0	-0.202	-0.042
0.5	-0.672	0.856	2.5	-0.111	-0.070
0.6	-0.637	0.693	3.0	-0.051	-0.067
0.7	-0.602	0.561	3.5	-0.016	-0.053
0.8	-0.566	0.453	4.0	0.002	-0.036
0.9	0.531	0.363	4.5	0.010	-0.022
1.0	-0.495	0.287	5.0	0.011	-0.012
1.1	-0.460	0.223	5.5	0.010	-0.005
1.2	-0.426	0.169	6.0	0.007	0.000
1.3	-0.393	0.123	6.5	0.005	0.001
1.4	-0.362	0.085	7.0	0.003	0.002
1.5	-0.331	0.053	8.0	0.000	0.001

习 题

22-1 设图 22-1 所示的简支球面扁壳, 其中面的曲率半径为 R , 受荷载 $q_3 = -q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$, 试求无矩内力。

$$\text{答案: } F_{T1} = -\frac{q_0 R a^2}{a^2 + b^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad F_{T2} = -\frac{q_0 R b^2}{a^2 + b^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$F_{T12} = -\frac{q_0 R a b}{a^2 + b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

22-2 设有简支球面扁壳, 其中面的曲率半径为 R , 具有边长为 a 的正方形底面, 在凸面受分布压力, 沿两个边长方向均按抛物线变化, 而在扁壳的中点处为 q_0 , 也就是

$$q_3 = -16q_0 \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right) \left(\frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^2} \right).$$

试用重三角级数求无矩内力。

$$\text{答案: } F_{T1} = -\frac{2^{10}}{\pi^6} q_0 R \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}}{m^1 n (m^2 + n^2)^2}$$

$$(m=1, 3, 5, \dots \quad n=1, 3, 5, \dots)$$

22-3 正方形底面的简支球面扁壳, 在其一半面积上受有均布荷载 q_0 , 图 22-9。试分别用重三角级数及单三角级数求解无矩内力, 然后用两种解答计算几点的内力, 以资

校核。

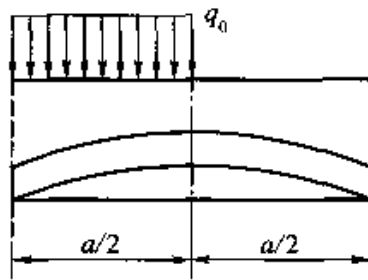


图 22-9

22-4 设简支扁壳受有均布压力, 即 $q_3 = -q_0$, 试用 § 22-8 中重三角级数式的 F 求出薄膜内力及平板内力, 然后证明: (1) 当 δ 趋于零时, 平板内力趋于零, 而薄膜内力趋于无矩解答; (2) 当 R_1 及 R_2 趋于无限大时, 薄膜内力趋于零, 而平板内力趋于薄板的解答。

22-5 试用 § 22-11 中的成果, 求出简支等曲率扁壳受均布荷载 q_0 时的边缘区最大弯矩及其所在之处。

答案: $\frac{\sqrt{6}}{12} e^{-\pi/4} \frac{q_0 R \delta}{\sqrt{1-\mu^2}}$, 在距边界为 $\frac{\pi \sqrt{R \delta}}{4[3(1-\mu^2)]^{1/4}}$ 之处。

22-6 试用 § 22-11 中的成果, 求出简支等曲率扁壳受均布荷载 $q_3 = -q_0$ 时的边缘区横向剪力。

答案: $F_{s1} = -\frac{q_0 \sqrt{R \delta}}{2[3(1-\mu^2)]^{1/4}} f_3(\lambda x)$ 。

参 考 教 材

- [1] 符拉索夫著. 壳体的一般理论 [M]. 薛振东, 朱世靖译. 北京: 人民教育出版社, 1964: 第十章.

内 容 索 引

(按照汉语拼音字母次序排列)

A

艾里应力函数, § 2-12

按位移求解, § 2-9, § 6-4, § 7-7 至 § 7-10, § 9-1, § 13-2, § 20-4

按应力求解, § 2-9, § 2-10, § 9-10

凹角, § 10-5

B

贝尔特拉米方程, § 9-10

半逆解法, § 2-12, § 10-1

半空间体, § 9-6 至 § 9-8

半平面体, § 4-11, § 4-12

半无矩理论, § 20-11

保角变换, § 5-7

闭合壳体, § 19-3, § 19-8

边界条件, § 2-7, § 5-4, § 8-2, § 13-4, § 19-8, § 19-9, § 22-2, § 22-7

边缘效应, § 19-9, § 20-7, § 21-8, § 22-10

边值条件, § 6-3

扁壳, 基本方程及边界条件, § 22-2

 简化计算, § 22-10, § 22-11

 弯曲问题, § 22-7 至 § 22-9

 无矩计算, § 22-3 至 § 22-5

 中面的几何性质, § 22-1

变分法, § 11-1, § 17-7, § 18-3, § 18-6

 位移, § 11-3, § 11-4

 应力, § 11-6 至 § 11-8

变分方程, 位移, § 11-2 至 § 11-4

 应力, § 11-5 至 § 11-8

变厚度薄板, § 13-12, § 13-13, § 14-4

- 波, 表层, § 12-4
 - 等容, § 12-2
 - 横, § 12-3
 - 平面, § 12-3
 - 球面, § 12-5
 - 弹性, § 12-1
 - 无旋, § 12-2
 - 纵, § 12-3
- 波纹板, § 17-4
- 薄板, 大挠度弯曲, § 18-1
 - 内力, § 13-3, § 13-8, § 14-1
 - 受迫振动, § 15-8, § 17-8
 - 受纵横荷载, § 16-1
 - 稳定及压曲, § 16-2 至 § 16-8, § 17-8
 - 小挠度弯曲, § 13-1, § 14-1, § 17-3, § 17-5 至 § 17-7
 - 自由振动, § 15-1 至 § 15-7
- 薄壁杆, § 10-5
- 薄壳, 概念, § 19-3
 - 基本方程及边界条件, § 19-5 至 § 19-8
 - 无矩理论, § 19-9
- 薄膜比拟, § 10-2
- 薄膜内力, § 16-1, § 19-6
- 不变量, § 8-3, § 8-6
- 不稳定温度场, § 6-1, § 6-2, § 7-3
- 布西内斯克解答, § 9-6

C

- 差分公式, § 7-1, § 14-1
- 差分解(差分法)
 - 不稳定温度场, § 7-3
 - 临界荷载, § 16-6
 - 扭转问题, § 10-6
 - 位移, § 7-7 至 § 7-10
 - 温度应力, § 7-6, § 7-10
 - 稳定温度场, § 7-2
 - 小挠度弯曲, § 14-1 至 § 14-4, § 17-6
 - 应力函数, § 7-4 至 § 7-6
 - 自然频率, § 15-5

常体力情况, § 2-11
沉陷, § 4-11, § 9-6, § 13-4, § 13-5, § 13-7
齿槽边, § 2-7
纯弯曲, § 3-1, § 3-2, § 4-7, § 9-11

D

大挠度弯曲, § 18-1 至 § 18-6
单连体, § 2-10, § 7-4
等截面直杆的扭转, § 10-1 至 § 10-6
等曲率扁壳, § 22-1, § 22-5, § 22-9 至 § 22-11
等容波, § 12-2
等效横向荷载, § 13-15
等效剪力, § 13-4, § 19-8
等效平错力, § 19-8
等效弯矩, § 13-15
顶盖旋转壳, § 21-5
顶盖柱壳, § 20-3, § 20-10, § 20-11
端点导数公式, § 7-1
多连体, § 2-10, § 4-6, § 5-5, § 5-6, § 7-9
多项式解答, § 3-1

F

符拉芒解答, § 4-11
复变函数表示, 边界条件, § 5-4
 应力函数, § 5-1, § 5-3
 应力和位移, § 5-2

G

钢筋混凝土板, § 17-4
刚体位移, § 2-4, § 8-5
高斯条件, § 19-4, § 21-1
各向同性体, § 1-3, § 2-6, § 8-7
各向异性板, § 17-2 至 § 17-8
各向异性体, § 17-1
共振现象, § 15-8
古尔萨公式, § 5-1
固定边, § 19-8
郭洛文解答, § 4-7

H

- 合理中面, § 22 - 6
- 横波, § 12 - 3
- 横向荷载, § 13 - 1
- 横向剪力, § 13 - 3, § 19 - 6
- 胡克定律, § 1 - 3, § 2 - 6, § 17 - 1
- 旋转壳, § 22 - 1 至 § 21 - 9
 - 简化计算, § 21 - 8, § 21 - 9
 - 弯曲问题, § 21 - 7, § 21 - 8
 - 无矩理论, § 21 - 2 至 § 21 - 6
 - 中面的几何性质, § 21 - 1
- 混合边界条件, § 2 - 7
- 混合法(混合求解), § 2 - 9, § 18 - 1, § 21 - 7, § 22 - 7
- 混合解函数, § 22 - 8

J

- 基本假定, § 1 - 3
- 基础板, § 13 - 14, § 14 - 4
- 级数解答, § 3 - 5, § 13 - 6, § 13 - 7, § 20 - 10, § 22 - 3, § 22 - 4
- 最小势能原理, § 11 - 2
- 最小余能原理, § 11 - 5
- 几何方程, § 2 - 4, § 4 - 2, § 8 - 5, § 17 - 2, § 18 - 1, § 19 - 2, § 19 - 5
- 计算假定, § 13 - 1, § 19 - 3
- 加肋板, § 17 - 4
- 伽辽金法, § 11 - 3, § 11 - 4, § 14 - 7, § 14 - 8
- 伽辽金位移函数, § 9 - 5
- 夹支边, § 13 - 4
- 切应力互等, § 1 - 2, § 2 - 2, § 8 - 1
- 简支边, § 13 - 4, § 19 - 8, § 22 - 2
- 简支梁, § 3 - 3, § 3 - 6
- 简化计算, 扁壳, § 22 - 10, § 22 - 11
 - 旋转壳, § 21 - 8, § 21 - 9
 - 柱壳, § 20 - 7, § 20 - 8
- 角点条件, § 13 - 4
- 接触问题, § 4 - 6, § 9 - 9
- 解答的唯一性, § 11 - 9
- 矩形截面杆, § 10 - 4

绝热温升, § 6-2, § 7-3

均匀性, § 1-3

K

卡斯蒂利亚诺变分方程, § 11-5

开敞壳体, § 19-3

开口薄壁杆, § 10-5

科达齐条件, § 19-4, § 21-1

壳体, 边界条件, § 19-8

 概念, § 19-3

 几何方程, § 19-5

 内力及物理方程, § 19-6

 平衡微分方程, § 19-7

空心圆球, § 9-3

孔口问题, § 4-9, § 5-8 至 § 5-11

L

乐甫位移函数, § 9-5

拉格朗日变分方程, § 11-2

拉梅常数, § 8-7

拉梅系数, § 19-1, § 19-4

莱维解答, § 3-4, § 4-10

莱维解法, § 13-7, § 13-12

理想弹性体, § 1-3

连杆支承边, § 2-7

连续板, § 14-4

连续性, § 1-3

裂隙问题, § 5-10

临界荷载, § 16-2 至 § 16-8

M

米歇尔方程, § 9-10

米歇尔解答, § 4-10

面力, § 1-2, § 2-7

膜型扁壳, § 22-6

N

纳维解法, § 13-6, § 20-5

内尖角, § 7-9
 能量法, § 15-6, § 15-7, § 16-7, § 16-8
 能量原理, § 11-2, § 11-5
 逆解法, § 2-12, § 3-1, § 3-5
 扭矩, § 10-1, § 13-6, § 19-6
 扭转, 薄壁杆, § 10-5
 等截面直杆, § 10-1, § 10-6
 矩形截面杆, § 10-4
 椭圆截面杆, § 10-3

P

平板内力, § 19-6
 平错力, § 16-1, § 19-6
 平衡微分方程, § 2-2, § 4-1, § 8-1, § 8-8, § 8-9, § 13-3, § 19-7
 频率, § 15-1 至 § 15-8
 平面波, § 12-3
 平面截面, § 3-2, § 4-7, § 9-11
 平面应变, § 2-1, § 2-6, § 6-7
 平面应力, § 2-1, § 2-6, § 17-2
 平移扁壳, § 22-1
 普朗特应力函数, § 10-1

Q

基尔斯解答, § 4-9
 球对称问题, § 8-9, § 9-1, § 9-3
 球壳, § 21-5, § 21-7 至 § 21-9
 球面扁壳, § 22-1
 球面波, § 12-5
 球体, § 9-9
 曲梁, § 4-7
 曲率主向及曲率线, § 19-4
 曲线边界, § 7-2, § 7-4, § 14-4
 曲线坐标, § 5-7, § 19-1

R

热传导, § 6-1, § 6-2
 容器旋转壳, § 21-4
 容器柱壳, § 20-2, § 20-8

里茨法, § 11-3, § 11-4, § 14-5, § 14-6, § 17-7, § 18-3, § 18-6

S

塞路蒂解答, § 9-7

摄动法, § 18-5

深梁, § 7-5, § 7-8

圣维南原理, § 2-8

实用弹性力学, § 1-1

受迫振动, § 15-8, § 17-8

数学弹性力学, § 1-1

顺剪力, § 16-1

T

弹性波, § 12-1 至 § 12-5

弹性层, § 9-2

弹性常数, § 2-6, § 17-1

弹性对称面, § 17-1

弹性曲面, § 13-2, § 13-8

弹性支承, § 13-4

弹性主向, § 17-1

体应变, § 8-5, § 8-6

体积应力, § 8-7

体积力(体力), § 1-2, § 2-11

椭圆板, § 13-5

椭圆杆, § 10-3

椭圆孔口, § 5-9

椭圆柱壳, § 20-2, § 20-3

W

弯曲内力, § 19-6

完全接触, § 4-6, § 7-2

完全弹性, § 1-3

微分方程, 大挠度, § 18-1

 平衡, § 2-2, § 4-1, § 8-1, § 8-8, § 13-3, § 19-7, § 19-9

 压曲, § 16-2 至 § 16-5, § 17-8

 受迫振动, § 15-8

 弹性曲面, § 13-2, § 13-3, § 13-8, § 17-3

 运动, § 12-1

- 自由振动, § 15-1, § 17-8
 唯一性, § 11-9
 位移边界条件, § 2-7, § 8-7
 位移单值条件, § 2-10, § 4-6, § 5-5
 位移的求出, § 3-2, § 4-5, § 4-11, § 9-11
 位移函数, § 9-5, § 20-5
 位移势函数, § 6-5, § 9-4
 温度场, § 6-1, § 6-3, § 7-2, § 7-3
 温度应力, § 6-4 至 § 6-8, § 7-6, § 7-10, § 13-15
 文克勒地基, § 13-14
 稳定, § 16-2, § 16-6
 无筋扁壳, § 22-6
 无矩计算, § 20-2, § 20-3, § 21-3 至 § 21-6, § 22-3
 无矩理论, § 19-9, § 20-1, § 21-2, § 22-3
 无限大多连体, § 5-6
 无限大弹性层, § 9-2
 无旋波, § 12-2
 物理方程, § 2-6, § 4-2, § 8-7, § 13-1, § 19-1, § 19-6

X

- 相容方程(相容条件), § 2-10, § 4-3, § 9-10, § 17-2, § 22-7
 向后差分, § 7-1, § 7-3
 向前差分, § 7-1, § 7-3
 小挠度弯曲, § 13-1, § 17-5
 楔形体, § 3-4, § 4-10, § 6-8
 斜方向的应变及位移, § 2-5
 斜面上的应力, § 2-3
 形变, § 1-2
 形变势能, § 11-1, § 14-5, § 15-6, § 16-7, § 17-7, § 18-3, § 18-6
 形变协调, § 2-10, § 9-10, § 18-1
 形变状态, § 8-6
 虚功方程, § 11-2

Y

- 压力隧洞, § 4-6
 压曲微分方程, § 16-2, § 16-5, § 17-8
 英格里斯解答, § 4-10
 影响函数, § 13-6

应变, §1-2, §2-5
 应力边界条件, §2-7, §8-2
 应力单值条件, §5-5
 应力分量的坐标变换, §4-4
 应力函数, §2-12, §4-3, §5-1, §7-4 至 §7-6, §10-1, §17-2
 应力集中, §4-9, §5-9 至 §5-11
 应力主向, §2-3, §8-3
 应力状态, §8-2
 圆板, §13-8 至 §13-11, §13-13, §15-4, §16-5
 圆环及圆筒, §4-6, §6-7
 圆孔, §4-9
 圆盘匀速转动, §4-8
 圆球, §9-3, §9-9
 运动微分方程, §12-1

Z

振形, §15-1 至 §15-5
 正交各向异性板, §17-2 至 §17-8
 正交各向异性体, §17-1
 正交曲线坐标, §19-1, §19-2, §19-4
 中点导数公式, §7-1
 中面内力, §19-6
 中面形变, §19-5
 轴对称弯曲, 薄板, §13-9, §14-5, §18-3 至 §18-5
 薄壳, §20-6, §20-7, §21-7 至 §21-9
 轴对称问题, 平面, §4-5, §6-7
 空间, §8-8, §9-1
 主刚度, §17-4
 主曲率, §19-4
 主弯矩, §14-9
 主应变, §8-6, §8-7
 主应力, §2-3, §8-3, §14-9
 柱壳, 弯曲问题, §20-4 至 §20-11
 无矩理论, §20-1 至 §20-3
 转动圆盘, §4-8
 锥壳, §21-4
 自然频率, §15-2 至 §15-7, §17-8
 自由边, §13-4, §19-8
 总剪力, §13-4, §19-8
 纵波, §12-3
 最大与最小的应力, §2-3, §8-4

人名对照表

(按照译名的汉语拼音字母次序排列)

A

艾里 C. B. Airy

B

贝尔特拉米 E. Beltrami

贝塞尔 F. W. Bessel

别茹霍夫 Н. И. Безухов

泊松 S. D. Poisson

布西内斯克 J. Boussinesq

D

达朗贝尔 J. R. d'Alembert

F

菲列波夫 А. П. Филиппов

符拉芒 A. Flamant

符拉索夫 В. З. Власов

傅里叶 J. B. J. Fourier

G

盖开勒 J. W. Geckeler

盖莱 J. M. Gere

高斯 C. F. Gauss

柯西 A. L. Cauchy

郭洛文 X. C. Головин

古迪尔 J. N. Goodier

古尔萨 E. Goursat

H

赫兹 H. Hertz

胡拜尔 M. T. Huber

胡斯 J. H. Huth

胡克 R. Hooke

J

伽辽金 Б. Г. Галёркин

季柯维奇 В. В. Дикович

K

卡门 T. von Kármán

卡斯蒂利亚诺 A. Castigliano

开尔文 W. Kelvin

科达齐 D. Codazzi

科尔库诺夫 И. В. Колкунов

克洛索夫 Г. В. Колосов

L

乐甫 A. E. H. Love

拉格朗日 J. L. Lagrange

拉梅 G. Lamé

拉普拉斯 P. S. Laplace

赖斯纳 H. Reissner

莱维 M. Lévy

列宾逊 Л. С. Лейбензон

列赫尼茨基 С. Г. Лехницкий

M

马斯洛夫 Г. Н. Маслов
 米歇尔 J. H. Michell
 明德林 R. D. Mindlin
 莫尔 Q. Mohr
 穆斯赫利什维利 Н. И. Мухелишвили

N

纳维 L. M. H. Navier
 诺沃日洛夫 В. В. Новожилов

O

欧拉 L. Euler

P

帕尔姆 A. L. Parme
 巴博考维奇 И. Ф. Папкович
 普厄希尔 T. Pöschl
 普朗特 L. Prandtl

Q

基尔斯 G. Kirsch
 基尔霍夫 G. R. Kirchhoff

R

日莫契金 Б. Н. Жемочкин
 里茨 W. Ritz
 瑞利 D. C. L. Rayleigh

S

萨文 Г. Н. Савин
 赛代尔 E. Seydel
 塞路蒂 V. Cerruti
 圣维南 B. de Saint-Venant
 施塔耶尔芒 Н. Я. Штаерман

T

铁木辛柯 S. Timoshenko

W

外斯特噶德 H. M. Westergaard
 文克勒 E. Winkler
 沃诺斯基 S. Woinowsky-Krieger

Y

英格里斯 C. E. Inglis