

439551

最新世界名著

彈性力學理論

科摩
帝古
原著

丁觀海譯

國家科學委員會補助
國立編譯館出版
復興書局印行

最新世界名著

彈性力學理論

提摩盛科 (S. P. Timoshenko)

古 帝 (J. N. Goodier)

丁

觀

海

原著

譯

譯權所有人 國立編譯館
補助機關 國家科學委員會
印行者 復興書局

版權所有

中華民國六十二年一月初版

彈性力學理論

平裝本售價新臺幣一百三十元

原著者 提摩盛科
古 帝

譯者 丁 觀 海

譯權所有人 國立編譯館

補助機關 國家科學委員會

印行者 復興書局

臺北市懷寧街四十四號

發行人 沈 亦 珍

• 1416臺榮賢 •

本公司業奉內政部頒發內版臺業字第〇〇四一號登記證

第三版序

本書第三版修訂工作，第一版之主要觀點及計劃仍予保留——對工程師提供，以可能之簡單形式，彈性理論主要基本知識及特種問題解法之彙集，而對實際工程問題及作業具重性者。各節後多數附註參考資料指示若干論題進一步研究途徑。因此種資料現均可由應用力學評論 (Applied Mechanics Reviews) 補充，新附註之增添即以此為依據。小體字各部分仍表示首次研讀時可暫略者。

整個材料經重新審閱，全書經刪改重編及增訂並作若干小修正。

主要增訂反映自 1951 年第二版出書後出現之新發展及實際應用範圍之擴張，有關聖維南原理之末端效應及特徵解在第三及第四章予以論述。因材料科學中脫節彈性解應用之迅速發展，此等斷續位移解給予較徹底之討論，如第 4，8，9 及 12 各章所述邊緣脫節及螺旋脫節。第五章中增加波紋法緒論及示例。對應變能及變分原理論述經重寫為三維形式納入第八章內，並為第十三章熱彈性各新節提供一基礎。二維問題複位函數應用之討論根據著名之莫司希里維里方法擴大於各新節中。為謹涉及解析函數並利用前已發展之解法所採步驟與莫氏所用者略異。對橢圓孔進一步解法，對現時破損力學極關重要，予以明確之討論。第十二章中對軸對稱應力之討論業經簡化；對割離之環，視為螺旋之一圈，新增數段以較正確方法代替近似分析。因核子能裝備上廣泛之應用，第十三章熱應力經擴充容納熱彈性倒轉定理及其若干有用之結果；由孔洞及填塞導致之熱流干擾所造成之熱應力集中亦予介紹。另外，二維問題論述最後補充兩節，末節使二維熱彈性問題與第六章中複位函數及莫司希里維里方法連貫。第十四章波傳播經重新編排，著重於三維基本理論。球形空洞內爆炸壓力解為新增材

2 彈性力學理論 (全一冊)

料。附錄數值有限差分法加入數位計算機應用之例題，以便未知數過多時採用。

此等變更有些係因過去廿年於斯坦夫大學開課經驗所得之簡化分析方法，無數學生及通信讀者提供許多有價值之建議、改正，甚至完全重建之問題及解法，著者籍此機會致最誠懇之謝意。

所有習題幾全部取自斯坦夫大學考試題。讀者由此可略知每週約三小時一學年中本書可取為教材部分。

古 帝

J. N. Goodier

第二版序

本書第一版出書後彈性理論多方面新發展及改進與其應用均反映於本版多數增訂及修正中。書內材料安排大體仍保持原版次序。對偏光彈性方法、曲線坐標二維問題及熱應力之論述，均經重寫及增訂並列為新章，所用方法及解均未見於原版。新增附錄一章，討論有限差分法及其應用，並包括鬆弛法。各章中新增材料為應變理論、重力應力、聖維南原理、轉動分量、倒轉定理、通解、平面應力解之近似性質，扭轉中心及剪力中心、凹角填角處扭轉應力集中，細長斷面（機翼）扭轉及撓曲近似解，及帶狀壓力下之圓體。

新增學生練習題於每章末至扭轉一章為止。

著者藉此機會向對本書提供許多寶貴建議之讀者表示謝意。

提摩威科 S. b. Timoshenko

古 帝 J. N. Goodier

第一版序

近年來彈性理論於工程問題業經廣泛使用。多數情況下初等材料力學方法對工程結構應力分析不能提供滿意答案，必須求助於較有力之彈性力學方法。初等理論對接近荷力及支點處梁內之局部應力不能有所說明。當物體各向尺度為同階值時，初等理論亦無法求其應力分布。輻軸及球承內部應力僅能由彈性理論算出。初等理論無法對梁及軸斷面突變處應力予以分析。吾人熟知高應力集中出現於凹角處，因此裂縫常由轉角處開始，應力反覆換向時此情況特別顯著。機械部件之損壞多由此種裂縫所致。

近年來對此等實用重要問題之解決頗有進展。當精確解無法求得時，若干近似解法亦經推出。某些情況下亦可用實驗方法求解。兩維彈性問題之偏光彈性法即為一例。目前各大學及工業界試驗室均有偏光彈性設備。偏光彈性實驗結果對各種斷面突變及凹角填充處應力集中之研究特具功效。此等結果對近代機械部件設計影響深遠，在多數情況下對可開始出現裂縫處所之消除有所改進。

用於解決彈性問題另一有效實驗為對稜體桿撓曲及扭轉應力分析之皂膜法。解已知邊界條件偏微分方程式之困難問題現可由度量適當拉力及荷力下皂膜之斜率及撓度代替之。此項實驗不但對應力分布提供一清晰概念，對應力值亦可得足為實際應用之精確數。

另外，電流類比對研究直徑變化軸填角及槽溝處扭轉應力亦饒興趣。薄板撓曲及二維彈性問題之對比亦經有效應用於若干重要工程題中。

準備此書時目標為提供工程師彈性理論簡明之基礎知識。另一目標為彙集具實用重要性各種特殊問題解法並敘述彈性問題近似及實

驗解法。

為注重彈性問題之實際應用，僅具理論興趣及現時對工程尚無直接應用之材料多經忽略，並偏重於特殊問題之討論。僅當詳細研究此等問題並將所得結果與初等材料力學近似解比較後，設計者始能對工程結構內應力分布得一全盤了解，並學習使用較嚴密之應力分析。

討論特殊問題時大部均用直接決定應力方法及利用以應力分量所表示之配合條件。此法對工程師較為熟悉，因彼等通常對應力數值具有興趣。引用適當之應力函數，此法較由位移所代表之平衡方程式為簡捷。

在若干情況下能量解法曾用於解彈性問題。此時微分方程式之積分由對某積分式極小條件所代替。用瑞芝 (Ritz) 方法此變分學問題化為求函數極小值之簡單問題，如此可獲若干實用重要問題之近似解。

為簡化敘述，本書由二維問題之討論開始，當讀者已充分熟習解彈性問題各種方法後，方討論三維問題。書中部分材料，雖具實際重要性，而在首次究讀時可以省略者，均用小號字。當讀者已讀畢本書主要部分後，可再回至此等問題。

本書所用數學方法均係初等形式，大部均不超越工學院數學範圍。較繁複問題中必要解釋及中間計算，均詳細說明以免讀者發生困難，僅少數例中提只及最後結果而無完整之引導。

大多數有關參考資料及重要書目均列於附註中。此等文獻對欲詳細研究某些特殊問題之工程師應有幫助，同時對彈性理論近代發展亦提供一鳥瞰，對計劃進入此學術範圍之研究生當有所助益。

準備此書時著者同一名稱前書（“彈性理論”，卷一，聖彼得堡，1914），代表在俄國各工程學校彈性理論講稿，曾予廣泛採用。

著者曾獲唐納博士 (Dr. L. H. Donnell) 及古帝博士之協助，彼等

6 彈性力學理論 (全一冊)

閱讀全部原稿，並提供多處修正及建議。著者亦藉此機會向馬克羅夫教授(Prof. G. H. MacCullough)、韋佰博士 (Dr. E. E. Weibel)、索道斯基教授 (Prof. Sadowsky) 及楊先生 (Mr. D. H. Young)，表示謝意，彼等曾協助本書最後準備工作並各讀一部分初稿。溫斯楚先生 (Mr. L. S. Venstra) 製圖、威佰斯特太太 (E. D. Webster) 打字，亦謹致謝忱。

提摩盛科

S. P. Timoshenko

本書所用符號釋義

x, y, z	直角坐標
r, θ	極坐標
ξ, η	正交曲線坐標；偶為直線坐標
R, ψ, θ	球面坐標
N	物體表面外向法線
l, m, n	外向法線餘弦
A	斷面面積
I_x, I_y	斷面對 x, y 軸慣性矩
I_p	斷面極慣性矩
g	重力加速度
ρ	連續分布荷力密度
q	密度
p	壓力
X, Y, Z	單位體積體力分量
\bar{X}, \bar{Y}	單位面積分布面力分量
M	撓矩
M_t	扭矩
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	平行 x, y, z 軸之正交應力分量
σ_n	平行於 n 正交應力分量
σ_r, σ_θ	極坐標內徑向及切正交應力
σ_ξ, σ_η	曲線坐標正交應力分量

2 彈性力學理論 (全一册)

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	柱體坐標正交應力分量
$0 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$	
τ	剪應力
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	直角坐標中剪應力分量
$\tau_{r\theta}$	極坐標內剪應力
$\tau_{\xi\eta}$	曲線坐標內剪應力
$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$	柱體坐標剪應力分量
S	平面上總應力；表面張力
u, v, w	位移分量
ϵ	單位拉長
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	$x, y,$ 及 z 向單位拉長
$\epsilon_r, \epsilon_\theta$	極坐標內徑向及切向單位拉長
$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$	休積膨脹
γ	剪應變
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	直角坐標剪應變分量
$\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{rz}$	柱體坐標內剪應變分量
E	拉與壓彈性模數
G	剪彈性模數
ν	柏松比
$\mu = G, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	藍姆常數
ϕ	應力函數
$\phi(z), \psi(z), \chi(z)$	複變位函數；複變數 $z = x + iy$ 函數
\bar{z}	共軛複變數 $z = x - iy$
C	扭轉剛度
θ	單位長扭角

$F = 2G\theta$	用於扭轉問題
V	應變能
V_0	單位體積應變能
t	時間
T	某段時間；溫度
c_1, c_2	波速
α	熱膨脹數；角

彈性力學理論

目 次

符 號.....	1
第一章 緒 論	1
1. 彈性.....	1
2. 應力.....	1
3. 力及應力符號.....	2
4. 應力分量.....	3
5. 應變分量.....	4
6. 虎克定律.....	6
7. 指標符號.....	10
習題.....	12
第二章 平面應力與平面應變	14
8. 平面應力.....	14
9. 平面應變.....	14
10. 點上之應力.....	16
11. 一點上之應變.....	20
12. 表面上應變之度量.....	22
13. 應變組馬氏圓圖之製作.....	23
14. 平衡微分方程式.....	24
15. 邊界條件.....	25

2	彈性力學理論 (全一冊)	
16.	配合條件	26
17.	應力函數	28
	習題	30
第三章 直角坐標二維問題		32
18.	多項式解	32
19.	末端效應、聖維南原理	36
20.	位移之決定	37
21.	一端荷力之懸臂梁	38
22.	梁受均勻荷力之撓曲	43
23.	其他連續荷力梁	48
24.	傅立葉級數式之二維問題解	51
25.	傅立葉級數之其他應用重力荷載	59
26.	末端效應特徵解	60
	習題	62
第四章 極坐標二維問題		65
27.	極坐標之一般方程式	65
28.	軸對稱應力分布	68
29.	曲桿之純撓曲	72
30.	極坐標應變分量	76
31.	軸對稱應力之位移	78
32.	旋轉盤	80
33.	一端受力曲桿之撓曲	84
34.	邊緣脫節	89
35.	板內圓孔對應力分布之效應	91
36.	直邊界上一點之集中力	100

37. 直邊上一般荷力	107
38. 力作用於楔之一端	113
39. 撓矩作用於楔之一端	115
40. 集中力作用於梁	117
41. 圓盤內之應力	126
42. 力作用於無限平板一點上	131
43. 極坐標二維問題廣義解	137
44. 極坐標廣義解之應用	141
45. 沿各面荷力之楔	143
46. 楔形與凹口特徵解	147
習題	149
第五章 偏光彈性及波紋實驗方法	155
47. 實驗方法及對證	155
48. 偏光彈性應力度量	155
49. 圓形偏光鏡	159
50. 偏光彈性應力測定例	162
51. 主應力之測定	166
52. 三維偏光彈性	167
53. 波紋方法	169
第六章 曲線坐標之二維問題	172
54. 複變函數	172
55. 解析函數及拉普拉司方程式	174
56. 調和及複變函數之應力函數	176
57. 對應於已知應力函數之位移	179
58. 複位函數之應力及位移	181

4. 彈性力學理論 (全一冊)

59. 曲線上應力和、邊界條件	184
60. 曲線坐標	186
61. 曲線坐標之應力分量	190
62. 橢圓坐標解均、勻應力板中橢圓孔	193
63. 簡拉平板內橢圓孔	196
64. 雙曲線邊界、凹口	201
65. 雙極坐標	203
66. 雙極坐標解	205
67. 由已知邊界條件決定複位函數、莫司希里維里法	210
68. 複位函數公式	213
69. 對應於孔口外圍區域內解析複位函數應力與應變之性質	214
70. 邊界積分定理	216
71. 橢圓孔映像函數 $\omega(\zeta)$ 、第二邊界積分	219
72. 橢圓孔、 $\psi(\zeta)$ 公式	221
73. 橢圓孔、特殊問題	222
習題	226

第七章 三維應力與應變分析

74. 緒論	227
75. 主應力	228
76. 應力橢圓體及應力指向面	230
77. 主應力之決定	231
78. 應力不變量	232
79. 最大剪應力之決定	232
80. 均勻變形	234
81. 一點上之應變	235

82. 主應變軸.....	239
83. 轉動.....	239
習題.....	242
第八章 一般定理	243
84. 平衡微分方程式.....	243
85. 配合條件.....	244
86. 位移之決定.....	248
87. 用位移表示平衡方程式.....	249
88. 位移之一般解.....	250
89. 重疊原理.....	251
90. 應變能.....	252
91. 邊緣脫節應變能.....	259
92. 虛功原理.....	258
93. 克氏定理.....	264
94. 最小功原理之應用——矩形板.....	268
95. 寬翼緣梁之有效寬度.....	272
習題.....	278
96. 解之唯一性.....	280
97. 倒轉定理.....	282
98. 平面應力解之近似性.....	285
習題.....	288
第九章 三維初等彈性問題	289
99. 均勻應力.....	289
100. 稜體桿因自身重量之拉長.....	290

6 彈性力學理論 (全一冊)

101. 常斷面圓軸之扭轉.....	293
102. 稜體桿之純撓曲.....	295
103. 板之純撓.....	299

第十章 扭轉 302

104. 直桿之扭轉.....	302
105. 橢圓斷面.....	308
106. 其他初等解.....	311
107. 薄膜類比.....	314
108. 窄矩形斷面桿之扭轉.....	318
109. 矩形桿之扭轉.....	321
110. 其他結果.....	325
111. 扭轉問題之能量解法.....	328
112. 各式軋製斷面型之扭轉.....	335
113. 實驗類比.....	338
114. 流體動力學類比.....	339
115. 空心軸之扭轉.....	341
116. 薄管之扭轉.....	345
117. 螺旋脫節.....	350
118. 一斷面保持平面桿之扭轉.....	352
119. 直徑變化圓軸之扭轉.....	355
習題.....	364

第十一章 桿之撓曲 369

120. 懸臂梁之撓曲.....	369
121. 應力函數.....	370

122. 圓形斷面	372
123. 橢圓斷面	374
124. 矩形斷面	376
125. 其他問題	381
126. 不對稱斷面	385
127. 剪心	387
128. 撓曲問題之皂膜解法	390
129. 位移	394
130. 撓曲問題進一步研究	394
第十二章 旋轉體內軸對稱應力與變形	396
131. 一般方程式	396
132. 多項式解	399
133. 圓板之撓曲	401
134. 三維旋轉盤問題	404
135. 力作用於無限體內一點上	407
136. 受內外均勻壓力之球體容器	409
137. 球孔附近局部應力	413
138. 力作用於半無限體邊界上	416
139. 荷力分布於半無限體部分邊界上	420
140. 兩球面體間接觸壓力	427
141. 兩物體間接觸壓力、較廣泛例	432
142. 球體之衝擊	438
143. 圓柱體之對稱變形	440
144. 圓柱體受帶壓力	445
145. 兩調和函數之包新尼斯克解	448

146. 拉力下之螺旋彈簧 (環之螺旋脫節)	449
147. 不完整環之純撓	452
第十三章 熱應力	454
148. 熱應力分布最簡單例、應變阻遏法	454
149. 板條內縱向溫度變化	460
150. 薄圓盤：溫度對中心對稱	462
151. 長圓柱體	464
152. 球體	474
153. 一般方程式	478
154. 熱彈性倒轉定理	482
155. 整體熱彈性變形、任意溫度分布	483
156. 熱彈性位移、密西爾積分解	485
習題	488
157. 起始應力	488
158. 起始應力與總體積變更	491
159. 平面應變與平面應力、應變阻遏法	492
160. 穩定熱流之二維問題	493
161. 絕緣孔口對均勻熱流干擾所造成之平面熱應力	499
162. 一般方程式解、熱彈性位移位函數	500
163. 圓形區域內一般二維問題	505
164. 複位函數之一般二維問題	506
第十四章 彈性介質中波動之傳播	510
165. 緒論	510
166. 同相性彈性介質之膨脹波及形變波	510
167. 平面波	512

168. 均勻桿中縱向波、初等理論.....	517
169. 桿之縱向撞擊.....	522
170. 瑞萊表面波.....	531
171. 無限介質中球對稱波.....	534
172. 球形孔隙中之爆炸壓力.....	536
附錄 彈性力學中有限差分方程式之應用	540
1. 有限差分方程式之引導.....	540
2. 逐步近似解法.....	545
3. 鬆弛法.....	547
4. 三角及六角網.....	552
5. 整塊及整組鬆弛.....	557
6. 多重連結斷面桿之扭轉.....	559
7. 近邊界點.....	561
8. 雙調和方程式.....	563
9. 直徑變化圓軸之扭轉.....	571
10. 數位電子計算機解.....	574
人名索引	577
論題索引	585

第一章 緒 論

第一節 彈性

幾乎所有工程材料均有某限度之彈性性質。如外力所造成之變形不超過某一限度，外力移去後變形即消失。在本書中將設受外力作用物體均為完全彈性者，亦即當外力移去後物體完全恢復其原始形式。

原子結構此處將不予考慮。設彈性物材料為均質者，並連續分布於其體積中，使由其體中分割之最小單元具與整體相同之特定物理性質。為使討論簡化另將設物體之大部分為同向性者，亦即彈性性質各方向均同。

結構材料不能完全適應上述假設。例如，重要工程材料如鋼者，在顯微鏡下，知為含各種晶體及不同方位，此材料距均質甚遠，但經驗證示根據均質性與同向性彈性理論所得之解可以極大之精確度用於鋼結構上。其解釋為晶體極小；通常在一立方吋鋼料中含數百萬個。雖單獨晶體各向之彈性性質可有極大差異，但晶體分布與排列通常為無法則者，故大塊金屬彈性性質代表晶體之平均性質。只須物體之幾何尺度較單一晶體為極大，均質假設可高度精確使用，另如晶體方位為無法規時，材料可視為具同向性。

如由某種製造技術程序，例如經軋軋時，金屬內某向之晶體佔多數，金屬彈性性質變為各向不同，此時必須考慮其非同向性。吾人有此種情況經驗，例如：冷軋銅。

第二節 應力

圖 1 指一物體在平衡狀態。在外力 P_1, \dots, P_n 作用下，物體各部分間將發生內力。為討論在任一點 O 上此內力值，設想此物體由經此點之斷面 mm 分為 A 及 B 兩部分。考慮其中之一，如 A 之部分，吾

人可稱其係在外力 P_5, P_6, P_7 及分布於 mm 斷面上之內力作用下維持平衡狀態。此內力代表 B 部材料對 A 部所施者。此等力將設為連續分布於 mm 面積上，如流體靜力或風壓力連續分布於其作用面上方式相同。通常用密度規定此等力值，亦即每單位作用面上面積力之值，討論內力時此密度稱為應力。

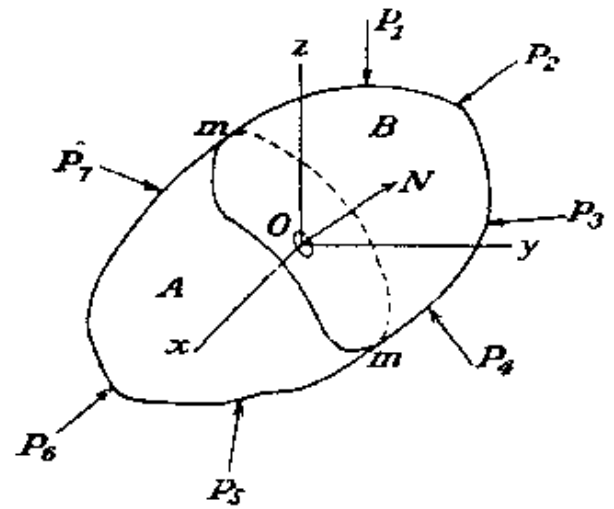


圖 1

最簡單之例為一稜體桿受均勻分布於兩端之拉力作用（圖 2），內力亦係均勻分布於任一斷面 mm 上。故此分布之密度，亦即應力，可由總拉力除以斷面面積求得。

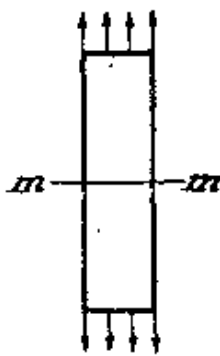


圖 2

上述例中應力為平均分布於斷面上。在圖 1 之一般情況下，應力並非平均分布於 mm 。為求作用於 O 點處 mm 斷面上微面積 δA 之應力，吾人知由 B 部分材料作用於此單元上之力可化為一合力 δP 。如繼續減縮單元面積 δA ，比例 $\delta P/\delta A$ 之極限值為作用於 mm 斷面 O 點處之應力值。合力 δP 之極限方向為應力之方向。在此一般例中應力方向係斜對於其作用面 δA ，故可分為兩分量：一正交應力垂直於面積及一剪應力作用於 δA 面中。

第三節 力及應力符號

作用於物體之外力可分為兩種。分布於物體表面上之力，如一物對另一物體壓力或流體靜壓力，稱為表面力。分布於物體體積之力，如重力、磁力、或物體運動時之惰性力，稱為體積力。單位面積上面

積力將分解為三個分量平行於直角坐標軸 x, y, z ，並用 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 符號代表之。每人亦將分解單位體積之體積力為三分量並用 X, Y, Z 代表之。

吾人將用希臘字母 σ 代表正交應力， τ 代表剪應力。為注明應力所作用平面方向，對此等字母上附以底標。吾人取一小立方體各邊平行於坐標軸。作用於此單元各面上應力分量符號及所取正向均在圖 3 上指明。對垂直於 y 軸單元之面，舉例言之，作用於此等面上之正交應力均用 σ_y 代表。底標 y 指應力係作用於正交 y 軸之面上。對單元為張力時正交應力取為正值，壓力時取為負。

剪應力再分解為兩分量平行於坐標軸，此時用兩底標字母，第一個指應力所在平面法線方向，第二個指應力方向。例如，仍取垂直於 y 軸之面，沿 x 向之分量用 τ_{yx} 代表， z 向者則用 τ_{yz} 。立體單元任一面上剪應力分量將取為正，如係沿正軸向而此面上正交應力亦為沿對應之正軸向者。如正交應力反向於正軸向，剪應力分量之正向亦相反。依此法則，作用於立體單右方各面上所有應力分量之正向（圖

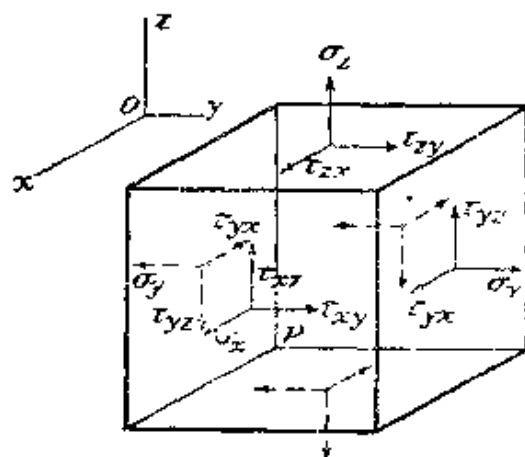


圖 3

3) 均與坐標軸正向相符。如吾人取立體單元左方各面，所有應力分量正向均與前相反。

第四節 應力分量

由上節之討論，吾人知對立體單元每一對平行面，如圖 3 所示，需一個符號代表應力正交分量，二個符號代表剪應力之兩個分量，對單元六個面上所有應力予以敘述，需有三個符號 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 代表正交應力；六個符號 $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ 代表剪應力。對

4 彈性力學理論 (全一冊)

單元平衡作一簡單考察後知剪應力符號可減為三個。

如對所有作用於單元上各力取對經中點 C 平行於 x 軸之線取力矩，僅取圖 4 所示各力即可。體積力，例如單元重量，此時可予忽計，因縮減單元尺度時，體積力之降低率與線尺度立方成比例，而面積力降低率則與線尺度平方成比例。因此，當單元為極小時，體積力與面積力比較為一

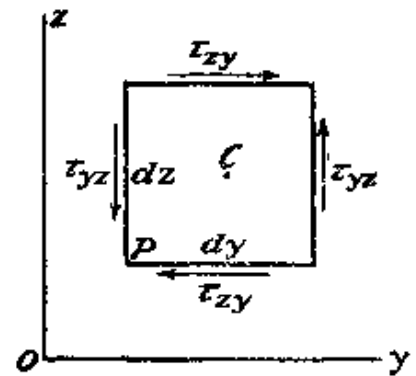


圖 4

較高階之微量而在計算力矩時可予略去。同理，由非均勻分布正交應力所生之力矩較應力所生者亦為高階而在取極限時先行消失。另每面上之力可視為面積與作用於中點應力上乘積。用 dx, dy, dz 代表單元尺度 (圖 4)，對 C 點取力矩，單元平衡方程式為

$$\tau_{zy} dx dy dz = \tau_{yz} dx dy dz$$

另兩式可類此求出，由此等式知

$$\tau_{xz} = \tau_{yx} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (1)$$

因此對一立體單元兩垂直面垂直於兩面交線之剪應力相等 (註)。

此六個量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ 因此足夠說明作用於經一點各坐標面上之應力；並將統稱為此點上之應力分量。

以後將證明 (74節) 用此六個應力分量可求經此點任何斜面之應力。

第五節 應變分量

討論彈性體變形時，將設物體受足夠之拘束使不能為如剛體之運動，物體內任何質點除受變形時外不能有位移。

(註) 亦有例外情形，特當應力係由電場或磁場感應所致時 (閱第 12 頁習題 2)。

本書內，僅討論通常出現於工程結構物之小變形。變形物體內質點之小位移將先分解為分量 v, u, w 各平行於坐標軸 x, y, z 。此等分量將設為極小而在物體體積內連續變化。取物體內一小單元 $dx dy dz$ (圖 5)，如此物體經變形， u, v, w 為 P 點之位移分量，鄰點 A 之 x 向位移，取 dx 之一階量時為

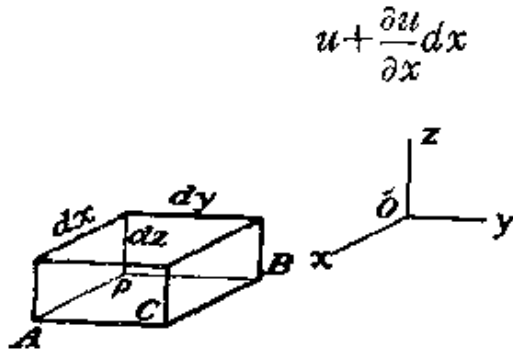


圖 5

此係由函數 u 對 x 坐標增量之對應增量 $(\partial u/\partial x)dx$ 所得。故因變形單元 PA 之增加長度為 $(\partial u/\partial x)dx$ 。因此 P 點上沿 x 向之單位拉長為 $\partial u/\partial x$ 。同理沿 y 及 z 向之單位拉長為 $\partial v/\partial y$ 及 $\partial w/\partial z$ 。

現考察圖 6 中兩單元 PA 及 $P'B$ 間角之變化，設 u 與 v 為 P 點沿 x 及 y 向之位移， A 沿 y 向位移及 B 沿 x 向位移為 $v + (\partial v/\partial x)dx$ 與 $u + (\partial u/\partial y)dy$ 。因此等位移單元 PA 之新方向 $P'A'$ 斜於原方向一小角如圖所示，角值為 $\partial v/\partial x$ 。同理 $P'B'$ 與 PB 間之小角為 $\partial u/\partial y$ 。由此知原為 PA 及 PB 間之直角 APB 所減少之角為 $\partial v/\partial x + \partial u/\partial y$ 。此為 xz 與 yz 面間之剪應變。平面 xy 及 xz 與平面 yx 及 yz 間之剪應變亦可類此求得。

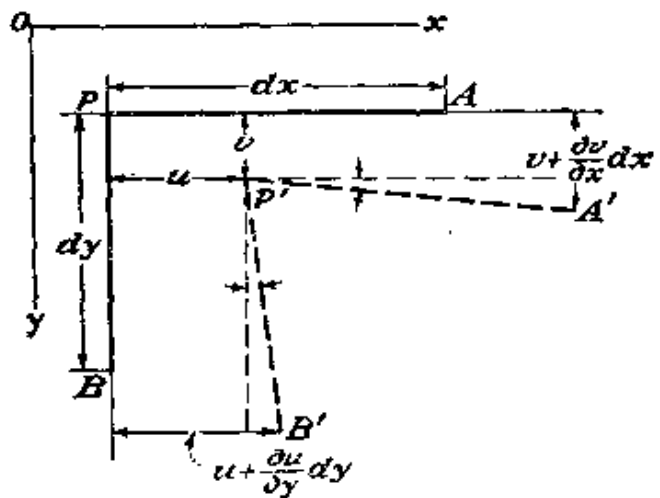


圖 6

吾人將用希臘字母 ϵ 代表單位拉長， γ 代表單位剪應變，為指出應變方向，吾

人採與應力相同之底標。由以上討論知

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= -\frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

以後將證示已知三正交方向三單位拉長及有關之三剪應變時，任何方向之單位拉長及任何兩向間之角變可即算出（閱第81節）。此六數量 $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yx}$ 稱為應變分量。

第六節 虎克定律

應力分量與應變分量間之線性關係通常稱為虎克定律。設想一單元矩形六面體各邊平行於坐標軸受均勻分布於兩對面之正交應力 σ_x 作用，如在一簡拉試驗時之情況。單位拉長在比例限前為

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (a)$$

式內 E 為拉力之彈性模數。工程結構上所用材料之拉力模數較允許應力為一極大值，(a) 式中之單位拉長為一微小數目。例如，在結構鋼例中，通常小於 0.001。

沿 x 向伸長時，同時出現側向應變（縮短）

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (b)$$

內 ν 為一常數名柏松比。對許多材料柏松比可取為 0.25。結構鋼之柏松比通常為 0.3。

方程式 (a) 及 (b) 亦可用於簡壓中。彈性模數與柏松比拉力其值與壓力時相同。

如上述之單元同時受正交應力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 均勻作用於各面上，應變分量總和可用 (a) 及 (b) 兩式求得。如將每一應力所生之應變重疊，所得公式為

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\tag{3}$$

此等式均經無數實驗予以驗正。

在以後討論中吾人將用此重疊法以計算若干力所生變形及應力之總和。只須變形微小及其對應之小位移不至對外力之作用發生重大影響時，此法即可應用。此等例中吾人忽視變形物體尺度之變更及外力作用點上之小位移，而對所有計算仍以物體原有尺度及形式為依據。位移總和則由重疊取為外力之線性函數，如對（3）式之引導。

但亦有例外之情況，此時小變形不能忽計而必須予以考慮。舉一例，設細桿同時受軸向及側向作用。軸向力單獨作用為簡拉或簡壓，但與側向力同時作用時，可對桿之撓曲發生相當之影響。計算此情況下桿之變形時，撓曲對外力力矩所生影響必須計入，雖撓度僅為小值。如此則總撓度不再為外力之線性函數而不能以簡單重疊求得。

方程式（3）中，拉長及應力間關係由兩物理常數 E 及 ν 完全規定。相同常數亦可用於規定剪應變與剪應力間之關係。

設取矩形六面體一變形特例，其所受應力設為 $\sigma_z = \sigma$ ， $\sigma_y = -\sigma$ ， $\sigma_x = 0$ 。由平行於 x 軸及與 y 及 z 軸成 45° 角之平面割出一單元 $abcd$ （圖 7 a），並求沿 bc 及垂直於 bc 之合力（圖 7 b）。所得結果為正交應力等於零，剪應力為

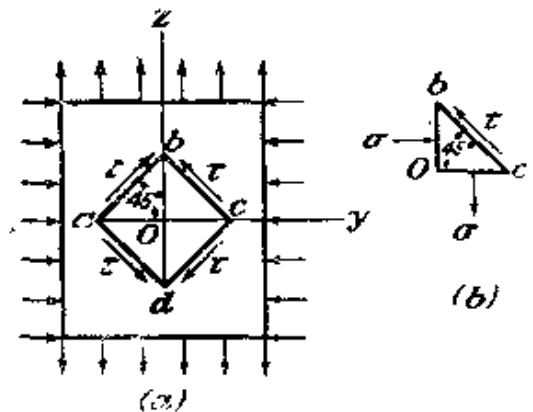


圖 7

8 彈性力學理論 (全一冊)

$$\tau = 1/2(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma \quad (c)$$

此一應力情況稱為純剪。豎向單元 Ob 拉長等於橫向單元 Oa 及 Oc 之縮短，忽計二階微量知單元 ab 及 bc 長度變形時未曾更改。兩邊 ab 及 bc 間之角變，及對應之剪應變 γ 值可由三角形 Obc 求得。變形後，知

$$\frac{Oc}{Ob} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \epsilon_y}{1 + \epsilon_z}$$

由方程式 (3)，得

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_y) = \frac{(1 + \nu)\sigma}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{(1 + \nu)\sigma}{E}$$

代入上式，並注意 γ 為小值

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

因此得

$$\gamma = \frac{2(1 + \nu)\sigma}{E} = \frac{2(1 + \nu)\tau}{E} \quad (4)$$

如此可知剪應變及剪應力間關係可由常數 E 及 ν 規定之。另一符號

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5)$$

亦常使用。故 (4) 式可寫為

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

常數 G ，即 (5) 式所規定者，稱為剪彈性模數，或剛性模數，

如剪應力作用於單元所有各面上，如圖 3 所示，相交兩面間角變僅與其對應之應力分量有關。故

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (6)$$

拉長 (3) 與角變 (6) 爲互相獨立者。一般情況之應變，由三正交應力及三剪應力分量所產生，可由重疊求得：在 (3) 式所得之拉長上重疊 (6) 式之剪應變。

方程式 (3) 及 (6) 爲以應力分量爲函數之應變分量，有時需將應力分量寫爲應變分量之函數。此可以下列步驟求得。將各 (3) 式相加並採用以下符號

$$\begin{aligned} e &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \\ \theta &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \end{aligned} \quad (7)$$

吾人得體積膨脹 e 及正交應力和之關係：

$$e = \frac{1-2\nu}{E} \theta \quad (8)$$

在均勻流體壓力 p 作用下爲

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

則 (8) 式變爲

$$e = -\frac{3(1-2\nu)p}{E}$$

此代表單位體積膨脹 e 與流體壓力 p 之關係。

算式 $E/3(1-2\nu)$ 稱爲體積膨脹模數。

用 (7) 式符號解 (3) 式內 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ，得

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_z \end{aligned} \quad (9)$$

另用符號

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (10)$$

及 (5) 式, (9) 式可寫為 (註)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2G\epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\epsilon_z \end{aligned} \quad (11)$$

第七節 指標符號

對力、應力、位移、及應變分量已引用之符號經各國採用已久，特以工程界為然。本書亦將採用此種符號，對一般方程式及所引出之定理用較緊湊之指標代表方法甚為便利並常被應用，例如位移分量寫為 u_1, u_2, u_3 或綜合寫為 u_i ，附一了解指標 i 可為 1, 2, 3。坐標本身寫為 x_1, x_2, x_3 或僅 x_i 而不用 x, y, z 。

圖 (3) 中共有九個應力分量。此可作下列各式之安排。

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} & \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} & \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z & \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} & \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{array} \quad (a)$$

用 τ_{xx} 代替 σ_x , τ_{yy} 代替 σ_y , τ_{zz} 代替 σ_z 得中間之排列。此處第一指標代表分量所作用面法線方向，第二指標為應力分量自身之軸向。第三種排列中指標換為數字，為綜合寫出此九個分量需兩指標 i 及 j ，每一均可取 1, 2, 3，如此則九個分量均可容納於

$$\tau_{ij} \quad ij=1, 2, 3 \quad (b)$$

式 (1) 將九個分量化為六個不同分量 (但排列中仍為九項)，現可寫為

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad i \neq j \quad (c)$$

如使 $i=j$ 吾人僅得三恆等式如 $\tau_{11} = \tau_{11}$ 。

對 (2) 式所代表之應變-位移關係，吾人可用以下關係代表九個應變分量

(註) 若干此種例見 S. Timoshenko, "Strength of Materials," 3d. ed., Vol. 2, chap. 2, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. 1956.

ϵ_{ij} (其中 $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ 為應變定義所需條件)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

取 $i=j=1$ 得 (2) 式內第一個關係為以下關係之第一個

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (e)$$

取 $i=1, j=2$ 得以下關係之第一個

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad \epsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (f)$$

由此知 $2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{23}$ 與 (2) 式之 $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ 相同。故 ϵ_{12} 為線單元 dx_1, dx_2 ，原直角所減少角度之一半。

為表示 (7) 三項和可寫為

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \quad \text{或} \quad \sum_{i=1, 2, 3} \epsilon_{ii} \quad (g)$$

但此種代表法內通常省去總和符號而僅寫 ϵ_{ij} 。總和意義即含於重複指標中。此稱為總和簡式。因此，如為應力分量

$$\tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \quad (h)$$

用 j (或任何其他字母指標) 替代 i 不變更其意義。為此原因重複指標常稱為虛標。

六個應力分量用六個應變分量表示為 (11) 式及 (6) 式。如用綜合形式需以下排列之定義

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

此通常寫為 δ_{ij} ，顯然此符號當 $i \neq j$ 時為零，當 $i=j=1, 2, 3$ 時為 1。此稱為克郎尼克數 (Kronecker delta)。由下式可得之六個關係

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2G \epsilon_{ij} \quad i, j, k = 1 \text{ 或 } 2 \text{ 或 } 3$$

即為 (11) 及 (6) 所有六個關係。符號 ϵ_{kk} 當然與 (h) 內 τ_{ii} 為類似意義之和。但此處須注意此處虛指標須用不同於 i 與 j 之 k 。如寫出 (11) 之第一式，取 $i=1, j=1$ ，由 (j) 式得

12 彈性力學理論 (全一冊)

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= \lambda \delta_{11} \epsilon_{kk} + 2G \epsilon_{11} \\ &= \lambda \epsilon_{kk} + 2G \epsilon_{11}\end{aligned}\quad (k)$$

內 ϵ_{kk} 與 (7) 式 e 同義。

對坐標之微分，如 (d) 式，常用逗點表示以求緊湊。故 (d) 式可寫為

$$\epsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (l)$$

用 3τ 代表 (k) 式之和， τ 為三正交應力之平均數。應力 τ_{ij} 可視為下列兩應力情況之重疊

$$\begin{array}{ccc|ccc} \tau & 0 & 0 & \tau_{11} - \tau & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 0 & \tau & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} - \tau & \tau_{23} \\ 0 & 0 & \tau & \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \tau \end{array} \quad (m)$$

第一系統常簡稱為平均應力 (註)，可用 $\tau \delta_{ij}$ 代表之。第二系統稱為偏差應力 (stress deviator) 可用 τ_{ij}' 代表之，故

$$\tau_{ij}' = \tau_{ij} - \tau \delta_{ij} \quad (n)$$

因此吾人亦可將應變 ϵ_{ij} 分為平均應變 $\epsilon_{ij}/3$ 或 $e/3$ ，及一偏差應變 ϵ_{ij}'

$$\epsilon_{ij}' = \epsilon_{ij} - 1/3 e \delta_{ij} \quad (o)$$

虎克定律六個方程式相當於

$$\tau_{ij}' = 2G \epsilon_{ij}' \quad 3\tau = (3\lambda + 2G)e \quad (p)$$

此等結果可由 (j) 式導出，或相反由 (p) 式開始回至 (j) 式。

在塑性理論及黏性彈性理論中用 (p) 式較方便，常數 $3\lambda + 2G$ 常寫為 $3K$ ， K 為體積膨脹模數。

(註) 如 $\tau = -p$ ， $p > 0$ ，為流體靜壓力 p 。

習 題

1. 證如圖 4 所示單元係在運動狀態並具如剛體之角加速度時方程式 (1) 仍成立。
2. 設一彈性材料含大量均勻分布之磁化質點，使一磁場對任一單元 $dx dy dz$ 對平行於坐標軸 x 之軸線生一力矩 $\mu dx dy dz$ 。方程式 (1) 應如何修正？

3. 舉若干原因說明公式 (2) 僅在小應變時為有效。
4. 一彈性層夾於兩完全剛體板中，施壓力後受正交應力 σ_z 。設與板之連結完全阻礙側向應變 ϵ_x 及 ϵ_y ，求現實楊氏模數（即 σ_z/ϵ_z ），用 E 及 ν 表示之。證此可大於 E 若干倍，如彈性層之柏松比較 0.5 僅略小，例如橡皮。
5. 由 (11)，(10) 及 (5) 式導 (8) 式。

第二章 平面應力與平面應變

第八節 平面應力

如一薄板受施於邊界之荷力，平行於板之平面且均勻分布於其厚度上（圖 8），應力分量 σ_z ，

τ_{xz} ， τ_{yz} 在板之兩面上均為零，並可暫時假設此等應力在板內亦為零。應力狀態可由 σ_z ， σ_y ， τ_{xy} 完全決定，並稱為平面應力。另可暫時假設

（註）此三分量與 z 無關，亦

即沿厚度不變。則此等應力分量均僅為 x 及 y 之函數。

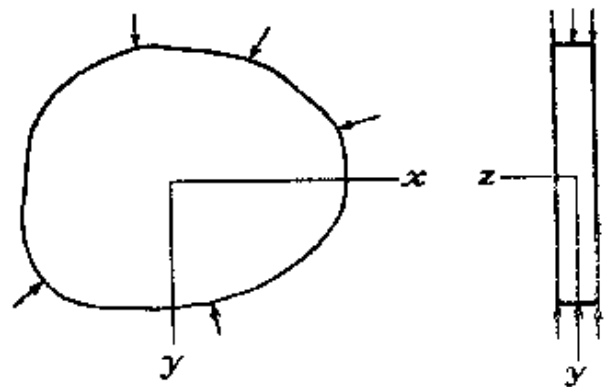


圖 8

第九節 平面應變

當物體 z 向度量極大時亦可作類似之簡化，如一長柱或稜體受垂直於其縱向單元及沿長度不變之荷力，則可設所有斷面均處相同情況中。開始最簡單之假設為兩端限制於固定平滑之剛體平面中，故軸向

位移全被阻遏。移去此等阻遏所生效應以後將予考察。因在兩端無軸向位移，由對稱條件，中面亦屬如此，故可設所有斷面情況相同。

甚多重要問題屬於此類，例如，受側向壓力之擋土牆

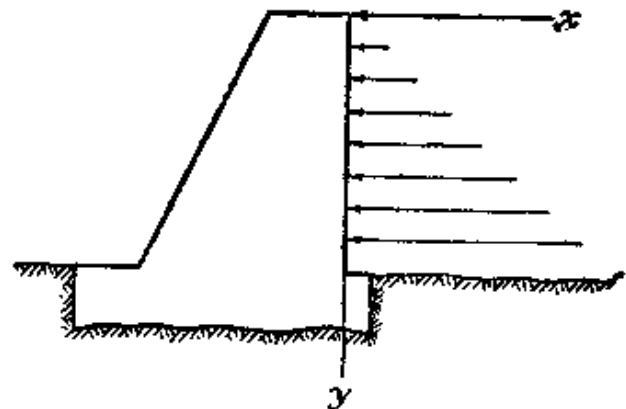


圖 9

（註）此等假設將於第98節中予以嚴格考核。應力事實上有變化，但在極薄板中可以忽計，類於溫度計中水銀柱表面視為等高。

(圖9)，一涵洞或隧道(圖10)，沿直徑面上受壓力之軌軸及軸承(圖11)。每一情況中，當然，荷力能沿長度變更，因所有斷面均屬相同情況中，取單位距離兩面中之一片即已足夠代表。位移分量 u 及 v 為 x 及 y 之函數，但與縱向坐標 z 無關。因縱向位移 w 為零，方程式(2)為

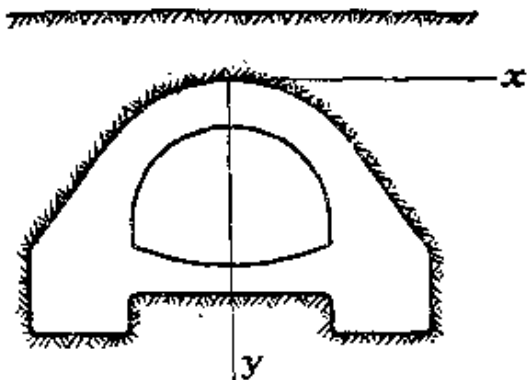


圖 10

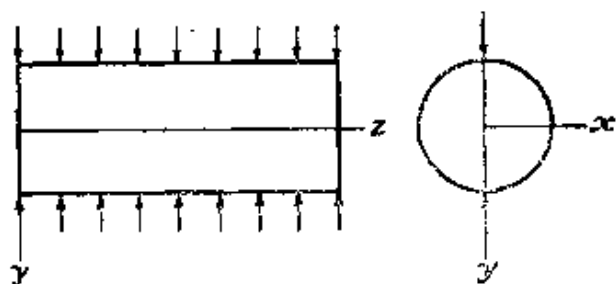


圖 11

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

(a)

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

縱向正交應力 ϵ_z 可由方程式(3)之虎克定律用 σ_x 及 σ_y 代表之。因 $\epsilon_z = 0$ 得

$$\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

或

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

(b)

此等正交應力作用於各斷面上，含兩端在內，代表維持平面應變所需之力而為平滑固定剛體平面所提供者。

由方程式(a)及(6)，應力分量 τ_{xz} 及 τ_{yz} 為零，另由方程式(b) σ_z 可由 σ_x 及 σ_y 求得。故平面應變問題，與平面應力問題同，

簡化為求僅為 x 及 y 函數之 σ_x , σ_y , 及 τ_{xy} 。

第十節 點上之應力

已知在平面應力或平面應變情況中板上任一點之應力分量 σ_x , σ_y , τ_{xy} 時, 作用於經此點任何垂直於板之平面上之應力可由靜力學方程式算出。設 P 為受應力板內一點, 並設應力分量 σ_x , σ_y , τ_{xy} 為已知 (圖12)。取一平面 BC 平行於 z 軸, 距 P 點為一微距離, 使此面與各坐標平面自板中割離一極小三角體 PBC 。因應力係在物體體積中連續變化者, 作用於 BC 平面上應力當此單元愈趨於小時將趨於經 P 點平行面上之應力。

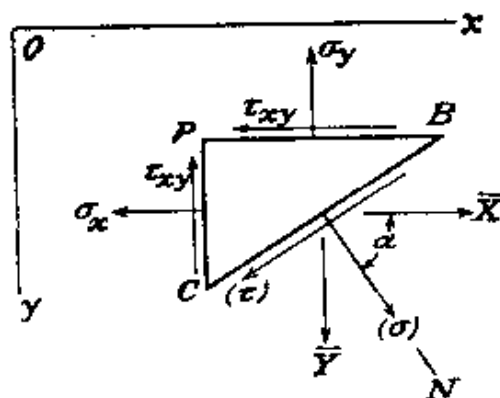


圖 12

當討論小三角稜體平衡條件時, 體力可視為高階微量而忽計之。同理, 如單元為極小, 各邊上應力變化亦可忽計並設應力為均勻分布者。作用於三角稜體各力因此可由應力分量與各邊面積之乘積求得。設 N 為平面 BC 法線之方向, 並將法線 N 與 x 及 y 軸間角之餘弦用下式代表

$$\cos Nx = l \quad \cos Ny = m$$

則如設 A 代表單元 BC 邊之面積, 另兩邊之面積即為 Al 及 Am 。

如吾人用 \bar{X} 及 \bar{Y} 代表作用於 BC 邊上之應力分量, 稜體單元之平衡方程式為

$$\begin{aligned} \bar{X} &= l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} &= m\sigma_y + l\tau_{xy} \end{aligned} \quad (12)$$

因此由法線餘弦 l 及 m 所規定任何平面上之應力分量可自方程式(12)算出, 倘在 P 點上三應力分量 σ_x , σ_y , τ_{xy} 為已知時。

設 α 為法線 N 及 x 軸間之夾角, 故 $l = \cos \alpha$ 及 $m = \sin \alpha$, BC

平面上之正交與剪應力分量將各為（由方程式12）

$$\begin{aligned}\sigma &= \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau &= \bar{Y} \cos \alpha - \bar{X} \sin \alpha = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &\quad + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}\quad (13)$$

顯然可選擇一 α 值使剪應力 τ 等於零。此時吾人得

$$\tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \tan 2\alpha \quad (14)$$

由此方程式，可得剪應力等於零之兩個垂直方向。此等方向稱為主向而其相應正交應力稱為主應力。

如兩主向取為 x 及 y 軸， τ_{xy} 為零，方程式 (13) 簡化為

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \\ \tau &= 1/2(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (13')$$

當吾人變更 α 角時，應力分量 σ 及 τ 之變更可以圖形代表之，內取 σ 及 τ 為坐標（註1）。對每一平面，圖形上將有對應之一點，其坐標代表此面上 σ 及 τ 之值。圖 13 表示此一圖形。對垂直於各主向之平面，吾人得 A 及 B 兩點，其橫坐標各為 σ_x 及 σ_y 。現可證明對任何具角 α 之平面 BC （圖12）其應力分量將由以 AB 為直徑圓上一點之坐標所代表，欲求此點僅須自 A 點與 α 同向（圖12）量一弧對角為 2α ，如 D 為如此所求得之點，則由圖知

$$OF = OC + CF = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha$$

$$DF = CD \sin 2\alpha = 1/2(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha$$

與方程式 (13') 相較，知 D 點之坐標提供角 α 之平面 BC 上各應力

（註1）此圖解法係 O. Mohr 所創，Zivilingenieur, 1882, 113 頁。參閱其所著 "Technische Mechanik", 二版, 1914.

分量之數值，為使剪應力之符號相符，吾人取 τ 沿向上方向為正(圖13)，並視所供力偶為順時向之剪應力為正，如在 $abcd$ 單元上兩邊 bc 及 ad (圖13b) 所示，反向之剪應力，如單元 ab 及 dc 各邊所示，視為負(註)。

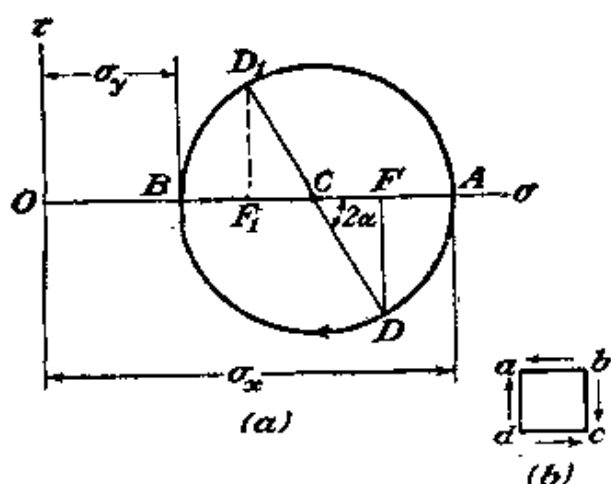


圖 13

當平面 BC 對垂直於 xy 平面一軸順時旋轉， α 自零變至 $\pi/2$ (圖12)，圖13中 D 點自 A 移動至 B ，故此圖之下半部對在此限內所有 α 值決定應力之變更。此圓之上半部對 $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ 提供應力值。

延長半徑 CD 至點 D_1 (圖13)，亦即取 $\pi+2\alpha$ 代替 2α ，即得垂直於 BC 之平面上各各應力 (圖12)。此示兩垂直平面上剪應力數值相等，如前所證。對各正交應力，由圖知 $OF_1+OF=2OC$ ，亦即兩垂直斷面上正交應力之和當 α 變更時為常數。

最大剪應力由圖解 (圖13) 知為圓上最大豎坐標，亦即等於圓之半徑。因此

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (15)$$

此最大剪應力作用於 $\alpha = \pi/4$ 平面上，亦即平分兩主應力夾角之平面。

當兩主應力之一為負值時 (壓應力)，此圖亦可應用。此時僅須對壓應力取橫坐標負值即可。圖 14a 代表兩主應力均為負值時，圖 14b 為純剪。

由圖13及14知一點上之應力可分解為兩部：一、雙軸向之拉或壓，兩分量

(註) 此法則僅對馬氏圓用，其他均用第 4 頁法則。

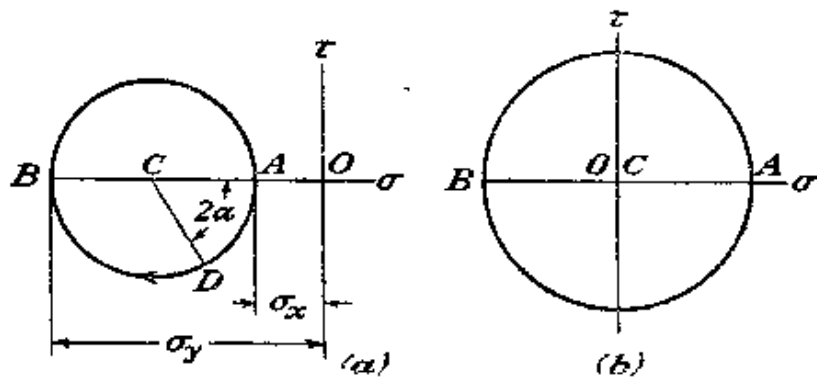


圖 14

相等，其值為圖中心之橫坐標；另一部分為純剪，其值為圓之半徑。當數個平面應力分布重疊時，均勻之拉或壓應力可用代數和。各純剪之相加必須考慮其所作用各平面之方向，如兩純剪系統疊加而各最大剪平面間互為 β 角時，可證明結果將為另一純剪系統，例如，圖15代表對角 α 所規定平面上應力之決定，係由兩純剪值為 τ_1 及 τ_2 所產生，其一作用於平面 xz 及 yz (圖15a)，另一作用於對 xz 及 yz 成斜角 β 之平面上 (圖15b)。圖 15a 中 D 點之坐標代表由第一系統在平面 CD 上所生之剪應力及正交應力， D_1 點之坐標 (圖15b) 為第二系統對此面上所生之應力。將 OD 及 OD_1 幾何相加得 OG ，為由兩系統在此面上所生之和應力， G 點之坐標提供剪應力及正交應力。注意 OG 之值與 α 角無關。因此，兩純剪疊加之

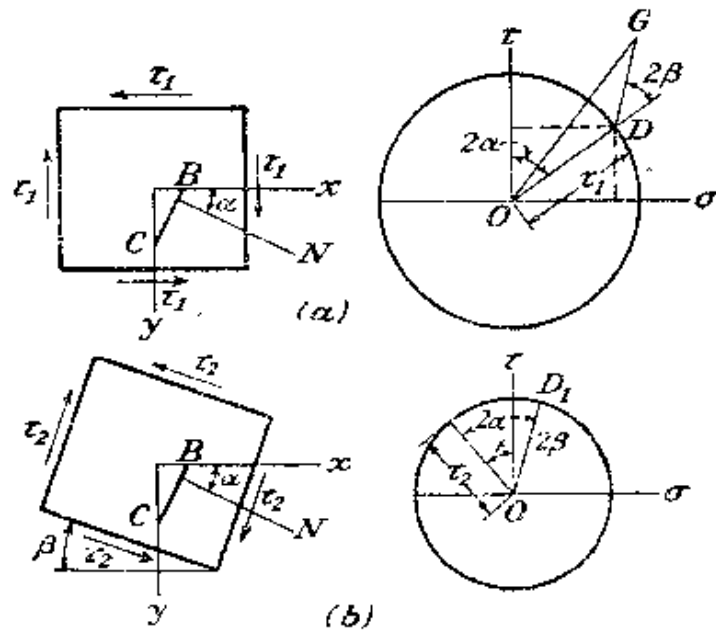


圖 15

結果，吾人得一純剪之馬氏圓，其值為 OG ，最大剪應力各平面為與 xz 及 yz 平面成一等於 GOD 一半之角。

圖13所示之圖形亦可用於尋求各主應力值，如對任何兩垂直平面上應力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 為已知 (圖12)。此時吾人先繪兩點 D 及 D_1 代表兩坐標上應力情況 (圖16)。如此即得所求圓之直徑 DD_1 。完成此圓後，主應力 σ_1 及 σ_2 即自圓與橫坐標軸求得。由圖知

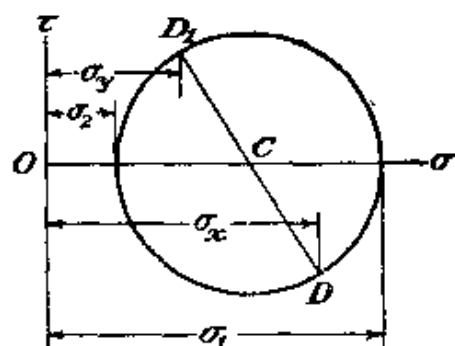


圖 16

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= OC + CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= OC - CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\quad (16)$$

最大剪應力為圓之半徑，亦即，

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\quad (17)$$

如此，僅須 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 為已知，一點上應力分佈之各種情況即可知曉。

第十一節 一點上之應變

當一點上應變分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 為已知時，對任何方向之單位伸長及直角之縮減—剪應變—可以求得。兩點 (x, y) ， $(x+dx, y+dy)$ 間之線單元 PQ (圖17a) 當變形時可平移、拉長(或縮減)，或角轉於 $P'Q'$ 。 P 之位移分量為 u, v ， Q 之位移分量則為

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

如圖17a中 $P'Q'$ 平移使 P' 回至 P ，則落於圖17b中 PQ'' 位置，而 QR ， RQ'' 即代表 Q 對 P 點之相對位移。因此

$$QR = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad RQ'' = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (a)$$

此相對位移之分量 QS 及 QS'' ，垂直於 PQ'' 及沿 PQ'' 方向可由此求得為

$$QS = -QR \sin \theta + RQ'' \cos \theta \quad SQ'' = QR \cos \theta + RQ'' \sin \theta \quad (b)$$

忽計與 θ 較之微角 QPS 。因短線 QS 可視為中心為 P 之圓弧， SQ'' 為 PQ 之拉長， $P'Q'$ 之單位拉長，由 ϵ_θ 表示之，為 SQ''/PQ 。用 (b) 及 (a) 可得

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \cos \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad \epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta \quad (c)$$

此為對任何方向 θ 之單位拉長。

PQ 之轉角 ψ_θ 為 QS/PQ 。因此由 (b) 及 (a)，

$$\psi_\theta = -\sin \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right)$$

$$\text{或} \quad \psi_\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta \quad (d)$$

與 PQ 成直角之線單元與 x 向成 $\theta + \pi/2$ ，其轉角 $\psi_{\theta + \pi/2}$ 當 $\theta + \pi/2$ 代替 θ 時即 (d) 式所給，因 $\cos[\theta + \pi/2] = -\sin \theta$ ， $\sin[\theta + \pi/2] = \cos \theta$ ，故得

$$\psi_{\theta + \pi/2} = \frac{\partial v}{\partial x} \sin^2 \theta - \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \cos^2 \theta \quad (e)$$

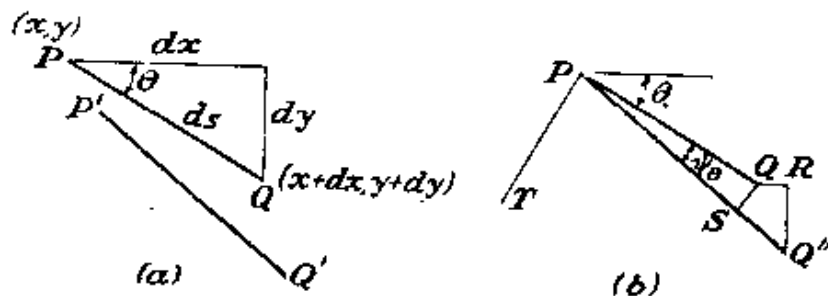


圖 17

對 PQ , PT 方向之剪應變 γ_θ 爲 $\psi_\theta - \psi_{\theta+\pi/2}$, 故

$$\gamma_\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) 2 \sin \theta \cos \theta$$

或 $1/2\gamma_\theta = 1/2\gamma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\epsilon_y - \epsilon_x)\sin \theta \cos \theta$ (f)

將 (c) 及 (f) 與 (13) 比較, 知如將 (13) 中以 ϵ_θ 代 σ , $\gamma_{\theta/2}$ 代 τ , ϵ_x 代 σ_x , ϵ_y 代 σ_y , $\gamma_{xy}/2$ 代 τ_{xy} 及 θ 代 α 即可得 (c) 及 (f)。因此自(13)中對 σ 及 τ 所得之推論, 在 (c) 及 (f) 中對 ϵ_θ 及 $\gamma_{\theta/2}$ 有對應之推論。故有兩 θ 值, 相差 90° , 其 γ_θ 爲零。其式爲

$$\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \tan 2\theta$$

其對應之應變 ϵ_θ 爲主應變。類比於圖13或16之馬氏圓亦可繪製, 豎坐標代表 $\gamma_{\theta/2}$, 橫坐標代表 ϵ_θ , 主應變 ϵ_1, ϵ_2 將爲 θ 函數 ϵ_θ 之代數最大及最小值。最大值之 $\gamma_{\theta/2}$ 將由圓半徑代表之。故最大之應剪變爲

$$\gamma_{\theta \max} = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

第十二節 表面上應變之度量

在表面上之應變, 或單位拉長, 通常最適當之度量方法爲用電阻應變錶 (註1)。此錶之最簡單形式爲黏附及絕緣於此表面之短線。當

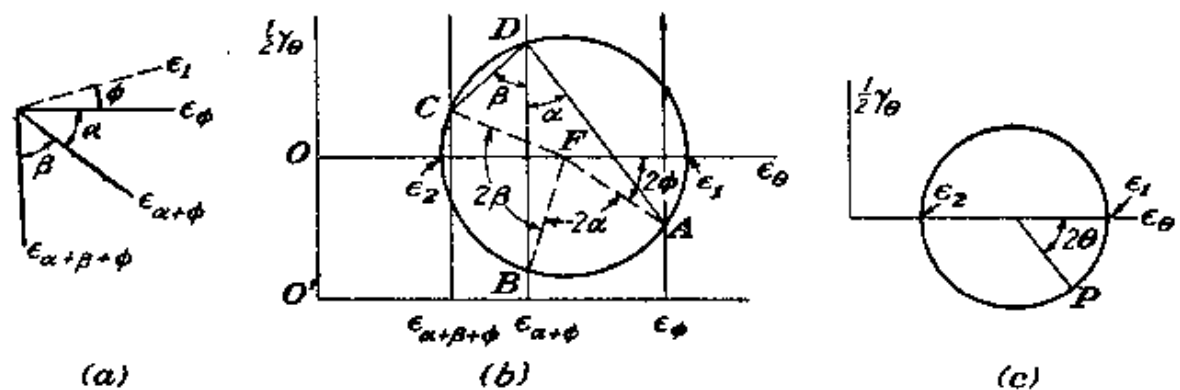


圖 18

(註1) 此法詳細說明見 M. Hetényi (ed.), "Handbook of Experimental Stress Analysis," Chaps. 5 and 9, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950.

拉長出現時，線之電阻增加，應變因此可以量出，此效應通常可將線往返數圈予以放大，成多數規矩之串聯。

當主向為已知時，此錶之應用頗為簡單，沿每一主向置一錶可直接量出 ϵ_1 及 ϵ_2 。主應力 σ_1 及 σ_2 可由虎克定律，方程式 (3) 算出，用 $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = 0$ ，設錶所置之表上無應力作用，如此則

$$(1-\nu^2)\sigma_1 = E(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) \quad (1-\nu^2)\sigma_2 = E(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1)$$

如主向非已預知，則需三個測量。如 ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} 可以量得，應變狀態即完全決定。但應變錶亦量伸長者，非直接剪應變，適當之方法為量此點三不同方向之單位拉長，此一錶組稱為一“應變組”(strain rosette)。馬氏圓可簡易繪出(註)，如第13節所述，主應變即可由圖上讀出。在圖 18a 中三實線代表三應變錶。斷線代錶(未知)較大之主應變 ϵ_1 方向，由此作一順時轉 ϕ 以求第一錶之方向。

如第11節中方程式 (c) 及 (f) 之 x 及 y 向取為主向， ϵ_x 應為 ϵ_1 ， ϵ_y 應為 ϵ_2 ，及 γ_{xy} 應為零。如此則各方程式應為

$$\epsilon_\theta = \epsilon_1 \cos^2 \theta + \epsilon_2 \sin^2 \theta \quad 1/2\gamma_\theta = -(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin \theta \cos \theta$$

內 θ 為自 ϵ_1 方向所量得之角。此等式亦可寫為

$$\epsilon_\theta = 1/2(\epsilon_1 + \epsilon_2) + 1/2(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\theta \quad 1/2\gamma_\theta = -1/2(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin 2\theta$$

各值在 18c 圖由圓上 P 點代表之，如 θ 值為 ϕ ， P 對應於圖 18b 圓上 A 點，由 ϵ_θ 軸角位移為 2ϕ 。此點之橫坐標為 ϵ_ϕ ，係已知者。如 θ 取值為 $\phi + \alpha$ ， P 移至 B 點，經角 $AFB = 2\alpha$ ，橫坐標為已知值 $\epsilon_{\phi + \alpha}$ ，如 θ 取值 $\phi + \alpha + \beta$ ， P 進至 C ，經角 $BFC = 2\beta$ ，橫坐標為 $\epsilon_{\phi + \alpha + \beta}$ 。

問題為經此三橫坐標畫一圓，二角 α 及 β 為已知。

第十三節 應變組馬氏圓圖之製作

自任一原點 O' 畫一臨時橫軸線 ϵ ，圖 18b，三個量得之應變 ϵ_ϕ ，

(註) Clenn Murphy, *J. Appl. Mech.*, vol. 12, p. A-209, 1945; N. J. Hoff, *ibid.*

$\epsilon_{\alpha+\phi}$, $\epsilon_{\alpha+\beta+\phi}$ 沿此軸標出。經此諸點各畫豎線。在經 $\epsilon_{\alpha+\phi}$ 豎線上選任一點 D , 畫線 DA, DC 與經 D 之豎線成 α 及 β 角如圖所示, 與另兩豎線交於 A 及 C 。經 D, A , 及 C 之圓即為所求者。圓心 F 係由 CD, DA 垂直平分線交點決定。代表三鉅向之點為 A, B , 及 C 。角 AFB , 兩倍於圓角上 ADB 角, 為 2α , BFC 角為 2β 。因此 A, B, C 係在沿圓周所需之角間隔上並具所需之橫坐標。現可畫 ϵ_θ 軸如 OF , 而由 O 點至圓上各交點為 ϵ_1, ϵ_2 , 角 2ϕ 為 FA 在此軸下之角。

第十四節 平衡微分方程式

取一小矩形體各邊長為 h, k 及 1 (圖19)。作用於各面1, 2, 3, 4上之應力及其正向均示於圖上。因體內應力變化, 例如 σ_x 在面1及面3上通常並非相同。各符號 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 係以矩形中心點 x, y 為準者。在各面中點上其值則用 $(\sigma_x)_1, (\sigma_x)_2$ 等等代表之。因各面均為極小, 面上各力可由此等應力值與面積相乘求出。

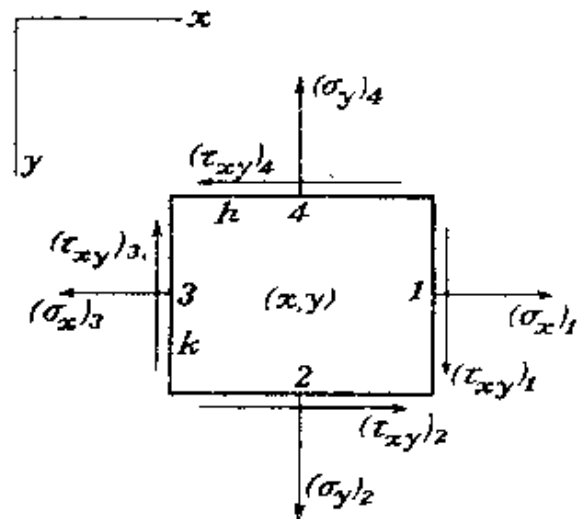


圖 19

此矩塊所受體力, 在圖12考慮三角稜體之平衡時, 視為高階微量予以忽略, 此時必須計入, 因其與代表應力變化之項為同階。如 X 及 Y 代表單位體積之體力, 對 x 向各力之平衡方程式為

$$(\sigma_x)_1 k - (\sigma_x)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + X h k = 0$$

除以 $h k$, 得

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} + X = 0$$

如此矩形變為極小, 亦即 $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$, $[(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3]/h$ 之極限為

$\partial\sigma_x/\partial x$ 。類此 $[(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_1]/k$ 變為 $\partial\tau_{xy}/\partial y$ 。作用於 y 向各力平衡方程式可以相同方式求得。因此

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0$$

此為二維問題之平衡微分方程式。

在多數實用問題中物體之重量通常為僅有之體力。取 y 軸向下並用 ρ 代表單位體積質量，方程式(18)變為

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0 \quad (19)$$

第十五節 邊界條件

所有物體內部各點應力均須適應方程式(18)或(19)。應力分量在板中變化；達邊界上時則須與板邊界外力平衡，故各外力亦可視為內部應力分布之延伸。此等邊界平衡條件可得自方程式(12)。取一小三角稜 PBC (圖12)，使 BC 邊與板邊界重合，如圖20所示，並用 \bar{X} 及 \bar{Y} 代表此邊界點上單位面積之面積力分量，則得

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}$$

$$\bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy}$$

(20)

內 l 及 m 為邊界上法線各方向餘弦。

如係矩形板，坐標軸通常取與板之各邊平行，故邊界條件(20)可以簡化。例如，設板之一邊平行如 x 軸，邊界上法線 N 平行於 y 軸，因此 $l=0$ ， $m=\pm 1$ 。方程式(20)變為

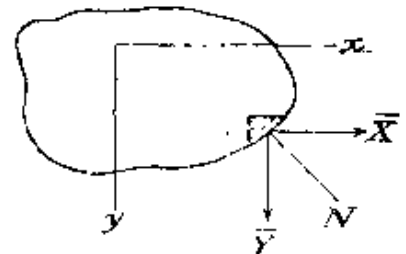


圖 20

$$\bar{X} = \tau_{xy} \quad \bar{Y} = \pm \sigma_y$$

第十六節 配合條件

尋求應力情況為彈性理論之基本問題。在兩維問題中必需解平衡微分方程式 (18)，此解又須適應邊界條件 (20)。此等方程式，得自靜力學，含三個應力分量 σ_x , σ_y , τ_{xy} ，對決定此定此等分量並非足夠。問題為一靜不定者，欲求其解，物體之彈性亦須予以考慮。

應力分布配合條件及規定變形連續函數 u , v , w 存在之數學形式建立將得自方程式 (2)。對兩維問題，吾人考慮三個應變分量，即

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (a)$$

此三應變分量係由兩函數 u 及 v 所表達；故不能為任意者，在 (a) 中各應變分量間應有某種關係存在。將 (a) 中第一式對 y 微分兩次，第二式對 x 兩次，第三式對 x 及 y 各一次，得

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (21)$$

此微分關係稱為配合條件，應為應變分量所適應以保證由 (a) 式應變分量所示關係函數 u 及 v 之存在。用虎克定律，〔方程式(3)〕，條件 (21) 可轉換為應力分量間之關係。

平面應力分布例中 (第 8 節)，方程式 (3) 簡化為

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (22)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (23)$$

代入 (21) 式，得

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (b)$$

此方程式可用平衡方程式以另一形式寫出。如物體之重為僅有之體力，將 (19) 式內第一式對 x 微分，第二式對 y 微分並相加，得

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

代入方程式 (b)，配合條件以應力分量表示為

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (24)$$

對一般平衡方程式 (18) 予相同處理，得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (25)$$

平面應變時 (第 9 節)，有以下關係

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

由虎克定律 (方程式 3)，可得

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x] \quad (26)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (27)$$

代入方程式 (21)，並如前用平衡方程式 (19)，知配合條件 (24) 亦可用於平面應變。對體力存在時由 (21) 及 (18) 式得以下之配合條件為：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (28)$$

平衡方程式 (18) 或 (19) 連同邊界條件 (20) 及以上配合方程式之一足夠決定二維問題之應力分布 (註 1)。特殊情況下需作其他附

(註 1) 平面應力有與 (21) 式不同之配合條件且與吾人所假設有矛盾。雖係如此，第 131 節中將證示本節所取方法對平面薄板問題可提供良好近似解。

加考慮時將於以後討論之(見第137頁)。應注意者在各體力為常數時決定應力分布各方程式內不含彈性常數。因此，倘方程足夠對應力完全決定同一問題對所有同向性材料應力分布相同。此項結論具實用上重要性：以後將知如用透明物體，如玻璃或賽璐珞，用偏光之光學方法可決定應力(見第155頁)。由以上討論知對透明材料所得之實驗結果大多數例中可立即應用於其他材料，例如鋼料。

當體力為常數時平面應力與平面應變二者之配合方程式相同。因此倘邊界形式與外力均相同時，兩種情況之應力分布亦相同(註1)。

第十七節 應力函數

前已說明二維問題解為對平衡微分方程式積分連同適應配合方程式及邊界條件。如體重為僅有之體力，各方程式為

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0 \quad (a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (b)$$

另加邊界條件(20)式。解此等方程通常所用方法為引進一新函數，稱為應力函數(註2)。取任何 x 及 y 之函數 ϕ ，使與應力關係為：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho g y \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho g y \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (29)$$

則極易驗證(a)中各式均可適應。如此對平衡方程式可得各種

(註1) 當平板或柱體具有孔口時此項說明可能須加修正，因問題之正確解應同時顧及位移與應力始能獲致。

(註2) 此函數在兩維問題解中係由 G. B. Airy 所引進，見 *Brit. Assoc. Advan. Sci. Rept.*, 1862, 故有時稱為 *Airy stress function*。

解法。問題之正確解為亦能適應配合方程式 (b) 者。代 (29) 式之應力分量於 (b) 式中，知應力函數 ϕ 須適應方程式

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (30)$$

故二維問題之解，當重量為僅有之體力時，簡化為求方程式 (30) 之一解而能適應問題邊界條件 (20) 者。以後諸章中，此法將用於解有實用價值之題例中。

現設較普遍之體力並設此等體力各有位函數。如此則 (18) 式中之 X 及 Y 可用下式代表之

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (c)$$

內 V 為位函數，方程式 (18) 變為

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

此等方程式與 (a) 形式相同並可取

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (31)$$

予以適應，代 (31) 式於配合方程式 (25) 得

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = -(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (32)$$

對平面應變可得一類似之方程式。

當體力為重量時，位函數 V 為 $-\rho g y$ ，此時 (32) 式右方變為零，取 (32) 或 (30) 之解為 $\phi=0$ ，自 (31) 或 (29) 所得之解為

$$\sigma_x = -\rho g y \quad \sigma_y = -\rho g y \quad \tau_{xy} = 0 \quad (d)$$

此為因重力作用可能之應力情況，此可解釋兩維之靜水壓力，在 $y=0$ 處為零。在一任何形狀之板或柱體中此體中此體系均可存在，倘在邊界上施以對應之分布力。取一邊界單元如圖12所示者，方程式 (13) 表示必有一法向壓力 $\rho g y$ 作用

30 彈性力學理論 (全一冊)

於邊界上，及零剪應力。如此板或柱體係由其他方式支承，吾人須重疊一邊界上法向拉應力 σ_y 及此新支承力。此二者將自成平衡，其效應之決定僅為邊界力問題，與體力無關。(註 1)

(註 1 關於此問題之討論見 M. Biot, *J. Appl. Mech.*, 1935, p. A-41.

習 題

1. 證當圖 12 中所示之單元具加速度時方程式 (12) 仍有效。
2. 求圖解各主應變及其方向，各應變量得之數據為

$$\epsilon_\phi = 2 \times 10^{-3} \quad \epsilon_{\alpha+\phi} = 1.35 \times 10^{-3} \quad \epsilon_{\alpha+\beta+\phi} = 0.95 \times 10^{-3} \text{ 吋/每吋}$$

內 $\alpha \leftrightarrow \beta = 45^\circ$

3. 證在 x, y 點之線單元而有極大及極小轉動者為具下式

$$\tan 2\theta = \frac{\partial v / \partial y - \partial u / \partial x}{\partial v / \partial x + \partial u / \partial y}$$

所決定之垂直方向者。

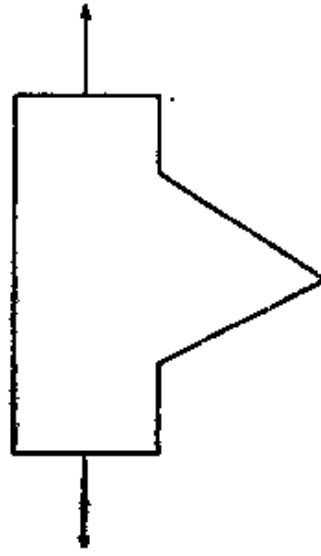
4. 旋轉盤 (厚度為一單位) 內之應力可視為一靜止盤由離心力體力所造成者，證此體力可導自位函數 $V = -1/2 \rho \omega^2 (x^2 + y^2)$ ，內 ρ 為密度， ω 為角轉速。
5. 一水平位置之盤具第 17 節 (d) 式之重力應力，繪圖表示支承其重量之邊界力。當盤重為一支承水平面完全接受，繪另一圖示所須解之邊界力。
6. 一水平位置之柱體具第 17 節 (d) 式之重力應力。其兩端被限於固定剛體光滑平面內而為平面應變情況，繪作用於表面，連同兩端之力。
7. 用應力-應變關係，及第 15 節之 (a) 式於平衡方程式 (18)，證無體力作用時平面應力問題內位移須適應

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

及一相伴方程式。

8. 圖代表在平面應力情況之一板之齒。齒之兩面 (兩直線) 不受力。假設應

力分量均有限值且在區域內連續，證在齒尖上無應力。



第三章 直角坐標二維問題

第十八節 多項式解

前曾說明二維問題之解，當體力不存在或為常數時，簡化為對微分方程式

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

之積分並適應邊界條件 (20)。如為矩形長條，方程式 (a) 之多項式解頗具興趣。取各次之多項式，適當調整其係數，實用上多種重要問題可獲解決 (註1)。

由二次多項式開始

$$\phi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2 \quad (b)$$

此顯然適應方程式 (a)，由 (29) 式，使 $\rho g = 0$ ，

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = c_2 \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = a_2 \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} = -b_2$$

三應力分量在物體內均為常數，亦即應力函數 (b) 代表均勻拉力或壓力於兩垂直方向及一均勻剪力之組合 (註2)。在邊界上各外力必須與該處應力相等如第25頁所討論者；如為矩形板各邊平行於坐標軸，此等外力應如圖21所示。

(註1) 閱 A. Mesnager, *Compt. Rend.*, vol. 132, p. 1475, 1901. See also A. Timpe, *Z. Math. Physik*, vol. 52, p. 348, 1905.

(註2) 圖21各箭頭指向均依第三節之定義畫出。各數目 a_2 , $-b_2$, c_2 可為正或負值。因此各數可能均可包含而不需更換箭頭指向。圖22中各箭頭則直接指向所施之力。

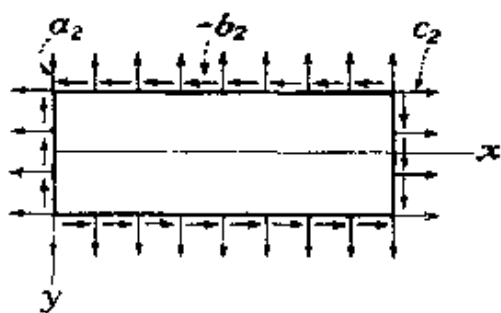


圖 21



圖 22

設考察一三次多項式之應力函數：

$$\phi_3 = \frac{a_3}{3(2)} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} x y^2 + \frac{d_3}{3(2)} y^3 \quad (c)$$

此亦適應方程式 (a)，用 (29) 式並設 $\rho g = 0$ ，得

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y} = -b_3 x - c_3 y$$

對一矩形板，如圖 22 所示，設 d_3 外所有係數均為零，吾人得純撓曲。如僅係數 a_3 不為零，吾人得一施於板之 $y = \pm c$ 兩邊上正交應力之純撓曲。如係數 b_3 或 c_3 不為零，則正交應力與剪應力同時作用於板之邊面上。例如，圖 23 代表函數 (c) 中除 c_3 外各係數均為零。沿 $y = \pm c$ 為均勻分布之拉應力及壓應力，與對 x 成正比之剪應力，在 $x = l$ 邊上，僅有常數剪應力 $-b_3 l$ ，而在 $x = 0$ 邊上無任何應力作用，如係數 c_3 不為零則得一類比之應力分布。

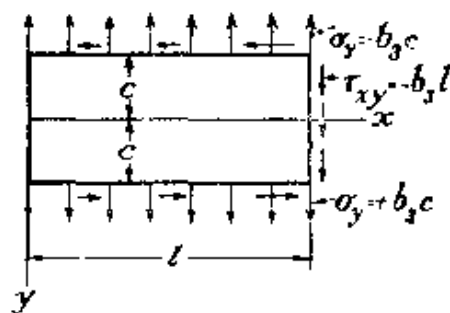


圖 23

取應力函數為二次及三次多項式

時，對選取各係數值為完全自由者，因其任何值均可適應方程式 (a)。對較高次之多項式，則須係數間適應某些關係始能適應 (a) 式。例如，取應力函數為四次多項式

$$\phi_4 = \frac{a_4}{4(3)} x^4 + \frac{b_4}{3(2)} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3(2)} xy^3 + \frac{e_4}{4(3)} y^4 \quad (d)$$

代入 (a) 式後，則僅當

$$e_4 = -(2c_4 + a_4)$$

始可適應。此時各應力分量為

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial y^2} = c_4 x^2 + d_4 xy - (2c_4 + a_4) y^2$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x^2} = a_4 x^2 + b_4 xy + c_4 y^2$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x \partial y} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 xy - \frac{d_4}{2} y^2$$

在此等算式中係數 a_4, \dots, d_4 均為任意者，予以適當調整可得矩形板上各種荷力情況，例如，除 d_4 外各係數均取為零，得

$$\sigma_x = d_4 xy \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2 \quad (e)$$

設 d_4 為正值，作用於矩形各力所發生應力 (e) 如圖 (24) 所示。在 $y = \pm c$ 兩邊上為均勻分布之剪應力；在兩端上，剪應力為拋物線式之分布。各邊界面上剪力成一力偶

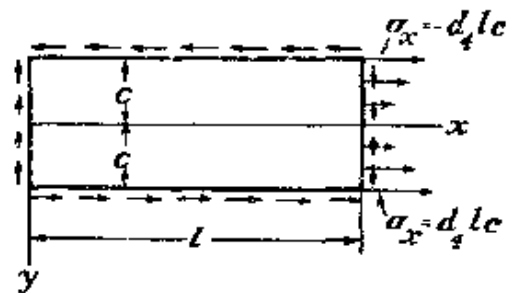


圖 24

$$M = \frac{d_4 c^2 l}{2} \cdot 2c - \frac{1}{3} \frac{d_4 c^2}{2} \cdot 2cl = \frac{2}{3} d_4 c^3 l$$

此力偶與在 $x=l$ 邊上正交應力所發生之力偶平衡。

現取五次多項式之應力函數

$$\phi_5 = \frac{a_5}{5(4)}x^5 + \frac{b_5}{4(3)}x^4y + \frac{c_5}{3(2)}x^3y^2 + \frac{d_5}{3(2)}x^2y^3 + \frac{e_5}{4(3)}xy^4 + \frac{f_5}{5(4)}y^5 \quad (f)$$

代入式 (a)，則須取

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5)$$

$$f_5 = -1/3(b_5 + 2d_5)$$

始能適應此方程式。對應之應力分量爲：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3}x^3 + d_5x^2y - (2c_5 + 3a_5)xy^2 - \frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)y^3$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = a_5x^3 + b_5x^2y + c_5xy^2 + \frac{d_5}{3}y^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3}b_5x^3 - c_5x^2y - d_5xy^2 + \frac{1}{3}(2c_5 + 3a_5)y^3$$

其中係數 a_5, \dots, d_5 均爲任意者，調整後可得板受各式荷力之解。

例如，除 d_5 外，所有各係數均取爲零時可得

$$\sigma_x = d_5(x^2y - 2/3y^3)$$

$$\sigma_y = 1/3d_5y^3 \quad (g)$$

$$\tau_{xy} = -d_5xy^2$$

正交力係均勻分布於長邊上 (圖25)。沿 $x=l$ 邊，正交力分爲兩部

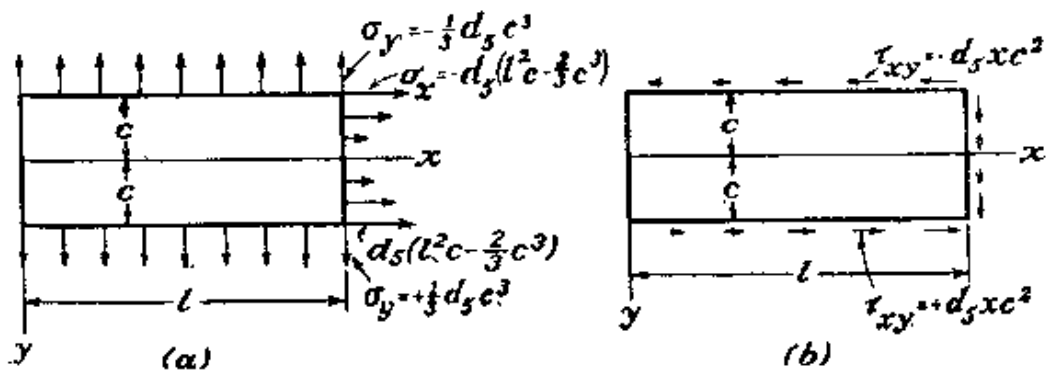


圖 25

分，一個爲線性者，另一則爲三次拋物線式，剪應力在長邊上與 x 成正比，在 $x=l$ 邊上則爲拋物線式。剪應力之分布示於圖25b。

因方程式 (a) 爲線性者，各解之和亦爲一解。吾人可將此節中所得各解重疊以求有實用之新解。此重疊法將應用於以後所討論之問題中。

第十九節 末端效應、聖維南原理

前節曾由極簡單形式之應力函數求得矩形板問題數種解。在每一例中施於邊界上之力必須與解本身所需者完全相同。例如，在純撓例中 (圖22)，兩端上荷力須爲垂直拉力並與 y 成比例。如兩端之力偶係以任何其他方式分布，18節所提供之解即非正確。對變更後之邊界條件必須正確適應時應即另行求解。多數此等解業經獲得 (其中數種將予討論)，不僅爲矩形區域者，另亦含稜體、圓柱體、及漸縮形等。此等解證示末端荷力分布情況變更時，如其總和不變，僅在末端附近處對應力發生顯著影響，如此則本章中所獲簡單解除在末端附近外爲足夠精確結果。

荷力分布改變相當於疊加一力系統，此系統以靜力觀點相當於零力及零力偶者。對此一系統，施於物體表面之小部分，僅生局部性之應力與應變之窺測，係聖維南氏 (註1) 於1855年所首倡，並被稱爲聖維南原理 (Saint-Venant's Principle)。此與多種情況之日常經驗相符，不僅限於小應變及適應虎克定律材料——例如，一橡皮管箝緊一端時僅在其附近發生顯著之應變。

對兩維或三維物體，如盤形、球形、或半無限體，因物體小部分受力所發生之應力及應變因“幾何發散”將隨距離而遞減，而與總力

(註1) B. de Saint-Venant, "Mémoires des Savants Etrangers,"

Vol. 14, 1855.

是否為零無關。曾被證明(註1)總力為零並非局部化足夠之準則。

第二十節 位移之決定

當各應力分量由以上方程式求得後，各應變分量可由方程(3)及(6)之虎克定律導出。然後位移分量 u 及 v 可得自以下方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} \quad (a)$$

在每一特例中此等方程式之積分並無困難，吾人將舉數例以示其應用。吾人可立即察覺如附加線性函數

$$u_1 = a + by \quad v_1 = c - bx \quad (b)$$

於 u 及 v 中，(b)式之應變分量將無更改。其意義為位移並非由應力及應變所能完全決定，剛體之位移可疊加於由內部應變所發生之位移上。方程式(b)內 a 及 c 兩常數代表物體之平移運動，常數 b 為剛體對軸之小角轉。

前曾說明(閱第28頁)體力為常數時應力分布對平面應力及平面應變相同。但此兩問題之位移則互異，因在平面應力分布問題中，應變分量在(a)式中為：

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}[(\sigma_y - \nu\sigma_x)] \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

而在平面應變時應變分量為：

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned}$$

(註1) R. von Mises, Bull. Am. Math. Soc, vol. 51, p. 555, 1945; E. Sternberg, Quart. Appl. Math. vol. 11, 1954; E. Sternberg & W. T. Koiter, J. Appl. Mech., vol. 25, pp.575-581, 1958

如在平面應力各式中將 E 換為 $E/1-\nu^2$ ，及 ν 換為 $\nu/1-\nu$ 即可得平面應變各式。以後討論例題時將說明如何對 (a) 式積分。

第二十一節 一端荷力之懸臂梁

取一窄矩形斷面懸臂梁寬度設為一單位由施於一端之力 P 使之撓曲 (圖26)。梁之上下兩面均不受外力，在 $x=0$ 端面上有分布之剪力其和為 P 。此等條件可由適當組合之純剪與第18節圖24所代表之應力 (e) 適應之。重疊純剪 $\tau_{xy} = -b_2$ 於應力 (a) 上，得

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d_4 xy & \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2 \end{aligned} \quad (a)$$

為使縱向邊 $y = \pm c$ 上無作用力，吾人必須使

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = -b_2 - \frac{d_4}{2} c^2 = 0$$

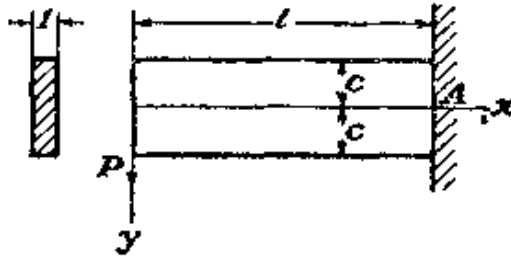


圖 26

由此知

$$d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}$$

為適應受力端之條件，此面上剪應力和必須等於 P ，因此 (註1)，

$$-\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \int_{-c}^c \left(b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy = P$$

由此得

(註1) 積分前之負號係依剪應力符號法則。在 $x=0$ 處 τ_{xz} 如係向上者為正。

$$b_2 = \frac{3P}{4c}$$

代此值之 d_1 及 b_2 於方程式 (a)，知

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I} \quad \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{I} \frac{1}{2}(c^2 - y^2)$$

注應 $2/3 c^3$ 爲斷面之慣性矩，故

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3}xy \quad \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \quad (b)$$

此與材料力學教科書上所載之初等解完全符合。注意此解僅當兩端剪力分布與斷面上剪應力爲相同之拋物線式分布及固定端上正交力與 y 爲正比時方爲正確解。如兩端上力之分布爲其他方式者，(b) 式之應力分布對兩端言不能視爲正確，但由聖維南原理，在距兩端相當遠處各斷面上，此解可視爲滿意者。

現考慮對應於 (b) 式應力之位移。引用虎克定律，得

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Pxy}{EI} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\nu Pxy}{EI} \quad (c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2) \quad (d)$$

對位移分量 u 及 v 尋求程序含方程式 (c) 及 (d) 之積分。將 (c) 式積分得

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + f(y), \quad v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + f_1(x)$$

內 $f(y)$ 及 $f_1(x)$ 爲 y 及 x 之未知函數。代此 u 及 v 諸值於 (d) 式中，得

$$-\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2)$$

在此式中，數項僅為 x 之函數，另數項僅為 y 之函數，其中一項與 x 及 y 均無關。用 $F(x)$ ， $G(y)$ 及 K 代表各組，吾人得

$$F(x) = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx}, \quad G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EI} - \frac{Py^2}{2IG}$$

$$K = -\frac{Pc^2}{2IG}$$

故此方程式可寫為

$$F(x) + G(y) = K$$

此一方程式之意義為 $F(x)$ 必須為某一常數 d 及 $G(y)$ 為某一常數 e ，否則 $F(x)$ 及 $G(y)$ 將各隨 x 及 y 變更，而僅使 x 變或僅使 y 變，均與等式矛盾。因此

$$e + d = -\frac{Pc^2}{2IG} \quad (e)$$

及
$$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{Px^2}{2EI} + d, \quad \frac{df(y)}{dy} = -\frac{Py^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} + e$$

故函數 $f(y)$ 及 $f_1(x)$ 為

$$f(y) = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g$$

$$f_1(x) = \frac{Px^3}{6EI} + dx + h$$

代於 u 及 v 各式中，吾人得

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + dx + h \quad (g)$$

各常數 d ， e ， g ， h ，現可由方程式 (e) 及阻礙梁在 xy 平面內作剛

體之三個拘束條件決定之。設 A 點，末端斷面之形心，係固定者，則在 $x=l, y=0$ 處 u 及 v 均為零，由 (g) 式得

$$g = 0 \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl$$

自 (g) 之第二式中代入 $y=0$ 得梁之撓曲線，

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l-x)$$

求此方程式內常數 d ，吾人須用第三個拘束條件，即消去梁在 xy 平面內對固定點 A 轉動之可能性。此項拘束可以不同方式表達之。試取兩種情況：(1) 當梁軸線單元固定於 A 點時。如此則拘束條件為

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=l, y=0} = 0 \quad (k)$$

(2) 在 A 點處斷面上一豎向單元為固定時。如此則拘束條件為

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l, y=0} = 0 \quad (l)$$

在第一種情況中由方程式 (k) 得

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

由方程式 (e) 得

$$e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

代各常數於 (g) 式，得

$$\begin{aligned} u &= -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{vPy^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}\right)y \\ v &= \frac{vPxy^2}{2EI} + \frac{Px^2}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \end{aligned} \quad (m)$$

撓曲線方程式為

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \quad (n)$$

所得受力端 ($x=l$) 之撓度值為 $Pl^3/3EI$ 。此與初等材料力學書中所導出者相符。

爲例釋斷面爲剪應力所致之形變，設考察固定端處 ($x=l$) 之位移 u 。對此端由方程方 (m) 知

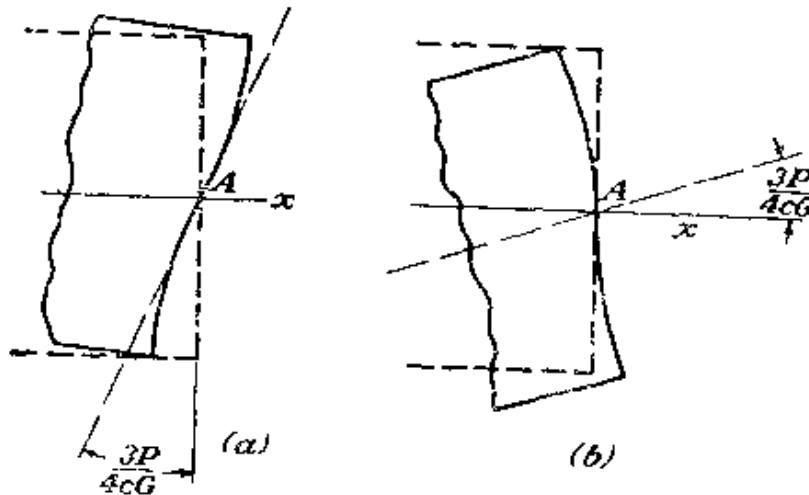


圖 27

$$(u)_{x=l} = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} - \frac{Pc^2 y}{2IG}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l, y=0} = -\frac{Pc^2}{2IG} = -\frac{3}{4} \frac{P}{cG} \quad (o)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l} = -\frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

形變後斷面如圖 27a 所示。因剪應力 $\tau_{xy} = -3P/4c$ 作用於 A 點，在 A 點上斷面之單元在 xy 平面內對 A 點以順時向轉動 $-3P/4cG$ 角。

如斷面上一豎向單元在 A 處固定 (圖 27b)，而非梁軸之水平單元，由條件 (1) 及 (g) 之第一式

$$e = \frac{Pl^2}{2EI}$$

另自 (e) 式得

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

代於 (g) 之第二式，結果為

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2IG}(l-x) \quad (r)$$

將此式與 (n) 式比較，所得之結論為由於軸線在 A 處 (圖 27b) 之轉動，懸臂梁軸線之撓度增加值為

$$\frac{Pc^2}{2IG}(l-x) = \frac{3P}{4cG}(l-x)$$

此為所稱梁撓度剪力效應 (effect of shearing force) 之估計 (註 1)。在實際情況中，箱入端之條件與圖 27 所示者有異。固定面斷 (註 2) 通常不能自由變形而端面上力之分布亦不同於 (b) 式所示者。無論如何，解 (b) 對長懸臂梁距端點遠處為可採用者。

第二十二節 梁受均勻荷力之撓曲

設一單位寬度之窄矩形斷面梁，兩端支承，受均勻分布密度為 q 荷力所撓曲，如圖 28 所示。上下兩面上已知條件為：

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0 \quad (\sigma_y)_{y=+c} = 0 \quad (\sigma_y)_{y=-c} = -q \quad (a)$$

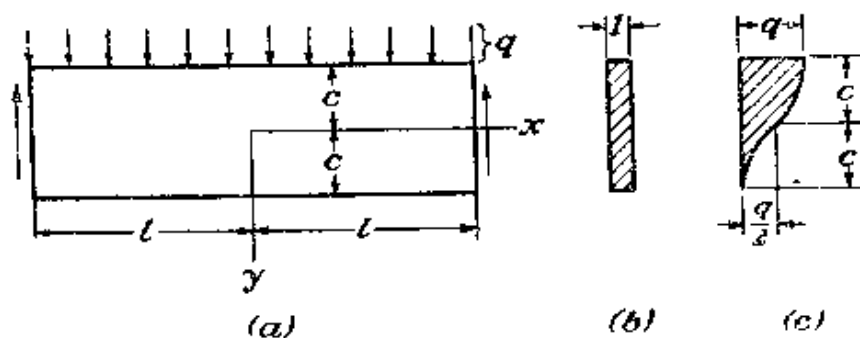


圖 28

(註 1) 其他例見習題 3 第 63 頁，及第 47 頁正文。

(註 2) 支承彈性本身之效應曾由 W. J. O'Donnell 予以實驗及理論之探討，見 J. Appl. Mech., vol. 27, pp. 461-464, 1960.

兩端 $x = \pm l$ 處條件爲

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \mp ql \quad \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0 \quad \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0 \quad (b)$$

方程式 (b) 中後兩式說明在梁之兩端面無縱向力及無撓矩作用。所有 (a) 及 (b) 各條件可由第18節所得之某些多項式解組合後予以適應。吾人由解 (g) 開始，即圖25所示者。爲消去沿 $y = c$ 面上之拉應力及沿 $y = \pm c$ 兩面上剪應力，吾人自第18節 (b) 解重疊一簡壓 $\sigma_y = a_2$ 及取圖23中應力 $\sigma_y = b_3 y$ ， $\tau_{xy} = -b_3 x$ 。如此可得以下各式

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d_5(x^2 y - 2/3 y^3) \\ \sigma_y &= 1/3 d_5 y^3 + b_3 y + a_2 \\ \tau_{xy} &= -d_5 x y^2 - b_3 x \end{aligned} \quad (c)$$

由 (a) 中各條件得

$$\begin{aligned} -d_5 c^2 - b_3 &= 0 \\ 1/3 d_5 c^3 + b_3 c + a_2 &= 0 \\ -1/3 d_5 c^3 - b_3 c + a_2 &= -q \end{aligned}$$

各常數值爲

$$a_2 = -\frac{q}{2} \quad b_3 = \frac{3q}{4c} \quad d_5 = -\frac{3q}{4c^3}$$

代於 (c) 式並注意 $2c^3/3$ 爲單位寬度矩形斷面對形心軸之慣性矩，吾人得各應力分量爲

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3q}{4c^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) = -\frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) \\ \sigma_y &= -\frac{3q}{4c^3} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) = -\frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \quad (d) \\ \tau_{xy} &= -\frac{3q}{4c^3} (c^2 - y^2) x = -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2) x \end{aligned}$$

此等應力分量可驗證適應縱向面上條件 (a) 及兩端面上 (b) 之前兩條件。爲使兩端上力偶消失，吾人疊加一純撓 $\sigma_x = d_3 y$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 如圖 22，於 (d) 解上。然後自以下條件決定常數 d 。在 $x = \pm l$ 處

$$\int_{-c}^c \sigma_x y dy = \int_{-c}^c \left[-\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left(l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y \right] y dy = 0$$

由此得

$$d_3 = \frac{3}{4} \frac{q}{c} \left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right)$$

最後結果爲

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{4}{3} \frac{q}{c^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + \frac{3}{4} \frac{q}{c} \left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right) y \\ &= \frac{q}{2I} (l^2 - x^2) y + \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) \end{aligned} \quad (33)$$

此式內第一項爲通常初等撓曲理論所得之撓應力，第二項代表所需之修正。此項修正與 x 無關，倘梁跨較其深度爲大時，與最大撓應力相較其值小。對此等梁初等撓曲理論所得應力 σ_x 值爲足夠精確者。必須了解 (33) 式僅當兩端上正交力之分布合於下式時

$$\bar{X} = \pm \frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right)$$

亦即在 $x = \pm l$ 處與 σ_x 相同時方爲正確解。此等分布力之合力及合力偶均爲零。因此，由聖維南原理吾人對在遠處對應力所生效應，例於較梁深度爲大各處可予忽計。故當無 \bar{X} 作用於兩端時，解 (33) 有足夠之精確度。

正確解 (33) 與其第一項所代表之近似解差別原因係由導近似解時設梁縱向纖維係受簡拉情況。由解 (d) 知纖維間有壓應力 σ_y 存在。此等壓應力導致解 (33) 內第二項之修正。沿梁深度壓應力 σ_x 分布係如圖 28c 所示，剪應力 τ_{xy} 之分布，由 (d) 第三式代表，在梁

斷面上與通常初等理論所得者符合。

當梁係受自身重量作用而非分布力 q 時，此解必須修正，由(33)式中取 $q=2\rho gc$ 及 (d) 之後兩式中附加應力

$$\sigma_x=0 \quad \sigma_y=\rho g(c-y) \quad \tau_{xy}=0 \quad (e)$$

對應力分布，(e) 可得自方程式 (29) 並取

$$\phi = 1/6\rho g(y^3 + 3cx^2)$$

故代表由重量及邊界力所生之可能應力情況。在頂面 $y=-c$ 上得 $\sigma_y=2\rho gc$ ，在底面 $y=c$ 上得 $\sigma_y=0$ 。故當應力 (e) 加於前解時，用 $q=2\rho gc$ ，兩水平邊面上應力均為零，梁之荷力僅含其本身重量。

位移 u 及 v 可由前節所舉之方法算出，設在中間斷面形心處 ($x=$ ， $y=0$) 水平立移為 ν ，豎向立移為 δ ，用解 (33) 及 (d) 得

$$u = \frac{q}{2EI} \left[\left(l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \nu x \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right]$$

$$v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^3}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + \nu \left[(l^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\} \\ - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right] + \delta$$

由 u 之算式可知梁之中和面不在中線上。由於壓應力

$$(\sigma_y)_{y=0} = -\frac{q}{2}$$

中線有一拉應變 $\nu q/2E$ ，並得

$$(u)_{y=0} = \frac{\nu q x}{2E}$$

由 v 之算式吾人得撓曲線方程式

$$(v)_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right] \quad (f)$$

設中線兩端 ($x=\pm l$) 處撓度為零，得

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{q l^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad (34)$$

括弧前之因數爲初等分析所得之撓度，係設撓曲時梁斷面保持平面所得者。第二項代表修正，通常稱爲剪力效應。

將 (f) 式對 x 微分兩次，得以下之曲率算式：

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad (35)$$

由此可知曲率並非完全與撓矩成正比（註1）。括弧內另一項代表通常初等理論結果應加之修正。對曲率較廣泛之探討證示算式 (35) 之修正項亦可應用於任何連續變更之荷力（註2）。荷力爲集中力時剪應力效應將在以後討論（見第126頁）。

對梁撓曲線曲率剪力效應蓋琴氏(Rankine)（註3）及哥拉斯赫夫氏(Grashof)（註4）均曾提供初等導法。在單位寬度矩形斷面梁中和軸上取最大剪應變爲 $3/2(Q/2cG)$ ， Q 爲剪力，對應之曲率增加量爲上述剪應變對 x 之導數， $3/2(q/2cG)$ 。修正後之曲率爲

$$\frac{q}{EI} \frac{l^2 - x^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{q}{2cG} = \frac{q}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2(1 + \nu) \right]$$

將此式與 (35) 式比較，知初等理論修正項過大（註5）。

曲率之修正 (35) 不能全歸於剪力。一部分係由壓應力 σ_y 所造成。此應力沿梁深度並分均勻分布。由此應力所生沿 x 之側向擴張由梁上部至底部逐漸遞減，

(註1) 此點經 K. Pearson 首先指出，見 *Quart. J. Math.*, vol. 24, p. 63, 188

(註2) 參考 T. V. Kármán 論文，見 *Abhandl. Aerodynam. Inst., Tech. Hochschule, Aachen*, vol. 7, p. 3, 1927.

(註3) Rankine, "Applied Mechanics," 14th ed., p. 344, 1895.

(註4) Grashof, "Elastizität und Festigkeit," 2d ed., 1878.

(註5) 較佳之接近值可由應變能觀點求得，參閱 S. Timoshenko, "Strength of Materials," 3d ed., vol. 1, p. 318.

如此則生一反向曲率 (向上凸出)。此反曲率與剪力效應共同組成 (35) 式之修正項。

第二十三節 其他連續荷力梁

增高二維問題解多項式次數 (見第18節), 吾人可獲各式連續變化荷力撓曲問題之解 (註1)。例如, 取一六次多項式, 並與 (18) 節所述各解組合, 吾人可求靜水壓力下豎向懸臂梁之應力, 如圖 29 所示。如此可證示所有懸臂梁縱向邊上已知條件, 可取以下應力系統予以適應:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{qx^3 y}{4c^3} + \frac{q}{4c^3} \left(-2xy^3 + \frac{6}{5}c^2xy \right) \\ \sigma_y &= -\frac{qx}{2} + qx \left(\frac{-y^3}{4c^3} - \frac{3y}{4c} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{3qx^2}{8c^3} (c^2 - y^2) - \frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \cdot \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2)\end{aligned}\quad (a)$$

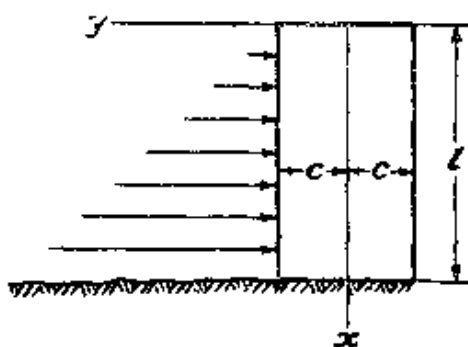


圖 92

此處 q 為流體單位體積重量, 故在 x 處荷力密度為 qx 。在同一高度上剪力及撓矩各為 $qx^2/2$ 及 $qx^3/6$ 。顯然 (a) 式中 σ_x 及 τ_{xy} 之第一項均為通常初等理論中所得之應力。

梁頂端上 ($x=l$) 正交應力為零。剪應力為

(註1) 見 Timpe 論文, loc. cit.; 另參閱 W. R. Osgood, J. Res. Nat. Bur. Std., ser. B, vol. 28, p. 159, 1942.

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{8c^3}(c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \cdot \frac{3}{5}(c^2 - y^2)$$

此雖非零，在但此面中各處均為小值且其總和為零，故條件接近於無外力作用之自由端。

在 (a) 式 σ_x 內加一項 $-q_1 x$ ， q_1 為懸臂梁材料單位體積重量，即納入梁重對應力分布之效應。如此所得之解曾被提議 (註 1) 用於計算矩形斷面之工壩內應力分布。必須留意此解並不適應壩底面之條件。僅當底面上力之分布情況與解 (a) 所示者相同時解 (a) 方為正確。實際情況為壩係連結於地基上，其條件與解所代表者不同。由聖維南原理知底面拘束之影響對底面大距離處可以忽計，但在工壩例中 $2c$ 之尺度對壩高 h 言並非小值，故不能忽視此效應 (註 2)。

取一七次多項式應力函數，梁荷力為拋物線式之應力亦可求得。第六章中 (見第 181) 頁將說明應用複變函數任何次數之應力函數可立即寫出。

(註 1) M. Levy, *Compt. Rend.*, vol. 126, p. 1235, 1898.

(註 2) 工壩內應力問題具極大實用重要性，曾經多人討論。參閱 K. Pearson, *On Some Disregard Points in the Stability of Masonry Dams*, *Drapers' Co. Research Memos.*, 1904; K. Pearson and C. Pollard, *An Experimental Study of the Stresses in Masonry Dams*, *Drapers' Co. Research Memos.*, 1907. 另參閱 L. F. Richardson, *Trans. Roy. Soc. (London) series A*, vol. 210, p. 307, 1910; and S. D. Carothers, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. 33, p. 292, 1913. I. Muller, *Publications du laboratoire de photo élasticité*, Zürich, 1930. Fillunger, *Oesterr. Wochschr. öffentl. Baudienst*, 1913, Heft, 45. K. Wolf, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien*, vol. 123, 1914.

50 彈性力學理論 (全一册)

在一般性連續分布荷力 q 情況下 (圖30)，在距兩端相當距離處斷面上之應力，可由以下方程式計算之 (註1)：

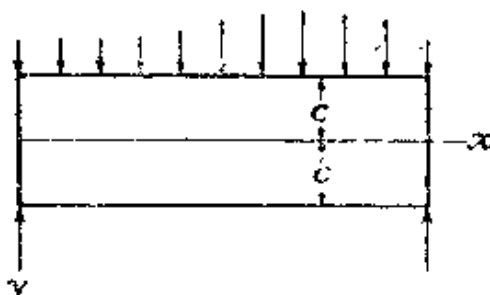


圖 30

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{My}{I} + q \left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3y}{10c} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} + q \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{2I}(c^2 - y^2)\end{aligned}\tag{36}$$

內 M 及 Q 為照通常算法所得之撓矩及剪力， q 為所取斷面處荷力密度，此等方程式與前對均勻荷力所得結果相符 (閱第22節)。

如密度為 q 之荷力係分布於梁之底面 ($y = +c$)，應力公式可由重疊一均勻拉應力 $\sigma_y = q$ 於 (36) 式中求得，如此則

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{My}{I} + q \left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3y}{10c} \right) \\ \sigma_y &= \frac{q}{2} + q \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{2I}(c^2 - y^2)\end{aligned}\tag{36'}$$

(註1) F. Seewald. *Abhandl. aerodynam Inst., Tech. Hochschule, Aachen*, vol. 7, p. 11, 1927. 對此等近似發展閱 B. E. Gatewood and R. Date, *J. Appl. Mech.*, vol. 29, 1962, pp. 747-749.

第二十四節 傅立葉級數式之二維問題解 (註1)

前已說明如連續分布荷力施於窄矩形斷面梁上時，在某些簡單例中可取多項式型之應力函數。取應力函數為傅立葉級數，應用範圍大為廣泛，每一作用於上下兩面荷力之分量與此種級數有相同可能性。例如，可有斷續情況。

應力函數方程式

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

可取下式之函數 ϕ

$$\phi = \sin \frac{m\pi x}{l} f(y) \quad (b)$$

予以適應。內 m 為一整數， $f(y)$ 僅為 y 之函數，將 (b) 代於 (a) 式並用 $m\pi/l = \alpha$ ，得下列方程式以求 $f(y)$

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{(4)}(y) = 0 \quad (c)$$

此常係數線性微分方程式之普遍解為

$$f(y) = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y$$

應力函數為

$$\phi = \sin \alpha x (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y) \quad (d)$$

對應之應力分量為

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sin \alpha x (C_1 \alpha^2 \cosh \alpha y + C_2 \alpha^2 \sinh \alpha y + C_3 \alpha (2 \sinh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y) + C_4 (\sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y))$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\alpha^2 \sin \alpha x (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y) \quad (e)$$

(註1) 最早期之傅立葉解，至今仍為最完整者，當推 E. Mathieu, 所著 "Théorie l'Elasticité des Corps Solides," seconde partie, chap. 10, pp. 140-178, Gauthier-Villars, Paris, 1890. 用單變數 x 及 y 之傅立葉級數重疊以解有限矩形問題。由無限集聯立代數方程式求傅立葉係數收斂性亦予討論。

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\alpha \cos \alpha x (C_1 \alpha \sinh \alpha y + C_2 \alpha \cosh \alpha y + C_3 (\cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y) + C_4 \alpha (2 \cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y))$$

現取一矩形斷面梁兩端支承上下兩面各受連續分布荷力 $A \sin \alpha x$ 及 $B \sin \alpha x$ 作用。圖31示 $\alpha = \pi/4$ 及 A 與 B 之正值。應力分布可用 (e) 求得，各積分常數 C_1, \dots, C_4 可於梁上下兩面 $y = \pm c$ 條件求出。此等條件為

對 $y = +c$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = -B \sin \alpha x$$

對 $y = -c$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = -A \sin \alpha x$$

(f)

代此等值於 (e) 內第三式，得

$$C_1 \alpha \sinh \alpha c + C_2 \alpha \cosh \alpha c + C_3 (\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c) + C_4 (\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c) = 0$$

$$-C_1 \alpha \sinh \alpha c + C_2 \alpha \cosh \alpha c + C_3 (\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c) - C_4 (\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c) = 0$$

故

$$C_3 = -C_2 \frac{\alpha \cosh \alpha c}{\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c}$$

$$C_4 = -C_1 \frac{\alpha \sinh \alpha c}{\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c} \quad (g)$$

用 $y = \pm c$ 兩面上條件於 (e) 之第二式中，得

$$\alpha^2 (C_1 \cosh \alpha c + C_2 \sinh \alpha c + C_3 c \cosh \alpha c + C_4 c \sinh \alpha c) = B$$

$$\alpha^2 (C_1 \cosh \alpha c - C_2 \sinh \alpha c - C_3 c \cosh \alpha c + C_4 c \sinh \alpha c) = A$$

將上兩式相加及相減並用 (g) 式，得

$$C_1 = \frac{A+B}{\alpha^2} \frac{\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c}$$

$$C_2 = -\frac{A-B}{\alpha^2} \frac{\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c}$$

$$C_3 = \frac{A-B}{\alpha^2} \frac{\alpha \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \quad (h)$$

$$C_4 = -\frac{A+B}{\alpha^2} \frac{\alpha \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c}$$

代於方程式 (e)，得下列各應力分量：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (A+B) \frac{\alpha c \cosh \alpha c - \sinh \alpha c \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \sin \alpha x \\ &\quad - (A-B) \frac{\alpha c \sinh \alpha c - \cosh \alpha c \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \sin \alpha x \\ \sigma_y &= -(A+B) \frac{\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \sin \alpha x \quad (k) \\ &\quad + (A-B) \frac{\alpha c \sinh \alpha c + \cosh \alpha c \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \sin \alpha x \\ \tau_{xy} &= -(A+B) \frac{\alpha c \cosh \alpha c \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cos \alpha x \\ &\quad + (A-B) \frac{\alpha c \sinh \alpha c \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cos \alpha x \end{aligned}$$

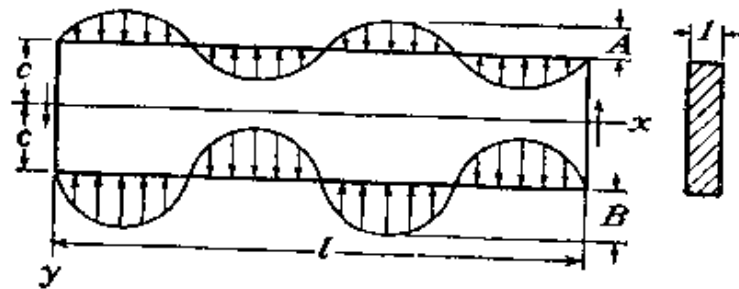


圖 31

此等應力適應圖 (31) $y = \pm c$ 兩面條件。在梁之兩端 $x=0$ 及 $x=l$ 處，應力 σ_x 為零，僅剪應力 τ_{xy} 存在。此應力由兩項代表〔式 (k)〕。第一項與 $(A+B)$ 成比例，其所代表之應力對末端斷面上下兩半部言，其值相同而符號相反。此應力在末端面上總和為零。第二項與 $(A-B)$ 成比例，在梁兩端上總和與作用於縱向兩面 ($y = \pm c$) 上荷力維持平衡。

如兩面上荷力相同，係數 A 與 B 相等，兩端上反作用力消失。現對此特殊情況予以較詳細之考察，設梁之長度較其深度為大值，由 (k) 內第二式在中面 $y=0$ 正交應力 σ_y 為

$$\sigma_y = -2A \frac{\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \sin \alpha x \quad (1)$$

對長梁 $\alpha c = m\pi c/l$ 為小值，如半波數目 m 不過大。如此則將

$$\sinh \alpha c = \alpha c + \frac{(\alpha c)^3}{6} + \frac{(\alpha c)^5}{120} + \dots \quad \cosh \alpha c = 1 + \frac{(\alpha c)^2}{2} + \frac{(\alpha c)^4}{24} + \dots$$

代入 (1) 並忽計微量階數高於 $(\alpha c)^4$ 各項得

$$\sigma_y = -A \sin \alpha x \left(1 - \frac{(\alpha c)^4}{24} \right)$$

故對小值之 αc 中面上應力分布與梁上下兩面 ($y = \pm c$) 相同。因此壓力在梁或板中傳遞過程中無顯著變更，倘此壓力沿兩面無急劇變化時。

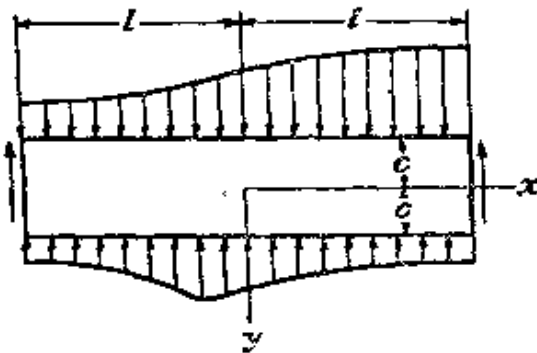


圖 32

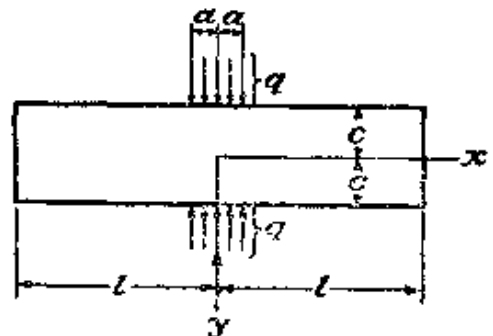


圖 33

此例中剪應力 τ_{xy} 值甚小，在兩端斷面上下兩部分剪應力總和為對兩水平面 ($y = \pm c$) 上及中面 ($y = 0$) 壓力差所需之均衡小量。

在最普遍之情況下沿梁上下兩面 (圖32) 豎向前力之分布可由下列級數代表之 (註1)：

對頂面用

$$q_u = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m' \cos \frac{m\pi x}{l}$$

對底面用

$$q_l = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m' \cos \frac{m\pi x}{l}$$

(m)

(註1) 對傅立葉級數參閱 Osgood, "Advanced Calculus," 1928; 或 Byerly, "Fourier Series and Spherical Harmonics," 1902; 或 Churchill, "Fouries Series and Boundary Value Problems," 1963.

常數 A_0 及 B_0 代表梁之均勻荷力，前於第22節已予討論。含 $\sin(m\pi x/l)$ 各項所生應力可由各(k)解相加求得。由 $\cos(m\pi x/l)$ 各項所生應力可於(k)式內互換 $\sin \alpha x$ 及 $\cos \alpha x$ 及更換 τ_{xy} 符號求得。

爲例釋(註1)此應力計算方法取圖33所示之矩形板，在此對稱荷力下，(m)式內含 $\sin(m\pi x/l)$ 各項均消失，係數 A_0 及 A_m' 由通常方法計算：

$$A_0 = B_0 = \frac{qa}{l} \quad A_m' = B_m' = \frac{1}{l} \int_{-a}^a q \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2q \sin(m\pi a/l)}{m\pi} \quad (n)$$

常數項 A_0 及 B_0 代表 y_0 向均勻壓力等於 qa/l 。三角函數項所生應力可由(k)式算出，在此解中將 $\sin \alpha x$ 與 $\cos \alpha x$ 互換並變更 τ_{xy} 之符號。

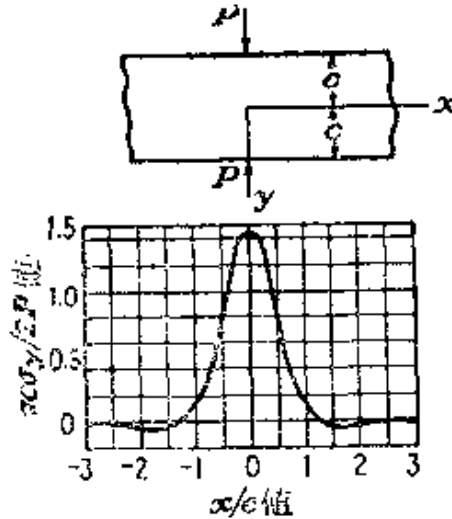


圖 34

現考察中面 $y=0$ 上情況，此處僅有正交應力 σ_y 。用(k)內第二式得

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a}{l}}{m} \cdot \frac{\frac{m\pi c}{l} \cosh \frac{m\pi c}{l} + \sinh \frac{m\pi c}{l}}{\sinh \frac{2m\pi c}{l} + 2 \frac{m\pi c}{l}} \cdot \cos \frac{m\pi x}{l}$$

(註1) M. C. Ribière, 曾作出數種此類問題，見 *Compt. Rend.*, vol. 126, pp. 402-404 and 1190-1192, 1898, 另見 F. Bleich, *Bauingenieur*, vol. 4, p. 255, 1923.

費郎 (註 1) (Filon) 氏對 a 為極小時 (即集中力 $P = 2qa$) 無限長條內此種應力會予計算。其計算結果為圖 34 所示。由圖知 σ_y 對 x 遞減甚速。在 $x/c = 1.35$ 處變為零以後換為拉應力。費郎亦曾討論圖 35 所示之例，此時兩 P 作相對之移

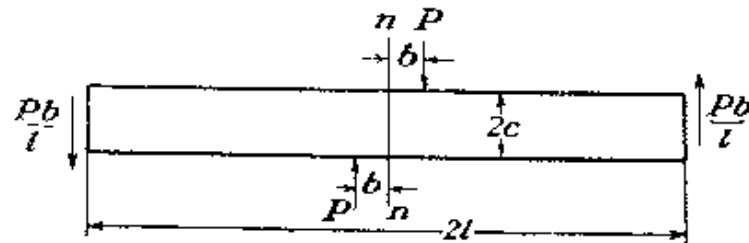


圖 35

動。在 nn 斷面上剪應力分布具實用價值其結果如圖 36 所示。對比例 b/c 之小值此分布與初等理論所得之拋物線式分布不相符合，在梁之頂面及底面處有極大之剪應力存在，梁之中間部分剪應力反甚小。

在圖 34 所示問題內中線 $y = 0$ 處由對稱條件將無剪應力及豎向位移。因此上半部分相當於一落於平滑剛體上之彈性層 (註 2)。

(註 1) L. N. G. Filon, *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. A. vol. 201, p. 67, 1903. 同一問題亦經以下各作者討論，見 A. Timpe, *Z. Math. Physik*, vol. 55, p. 1907; G. Mesmer, *Vergleichende spannungsoptische Untersuchungen* dissertation, Göttingen, 1929; F. Seewald, *loc. cit.*, H. Bay, *Ingenieur-Arch.*, vol. 3, p. 435, 1932. 近似解見 M. Pigeaud, *Compt. Rend.*, vol. 161, p. 673, 1915. 無限長矩形板問題見 J. N. Goodier, *J. Appl. Mech.*, vol. 54, no. 18, p. 173, 1932.

(註 2) 非平滑底討論見 K. Marguerre, *Ingenieur-Arch.*, vol. 2, p. 108, 1931; G. R. Abrahamson and J. N. Goodier, *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pp. 608-610, 1961; 不能伸長之柔層埋於彈性材料中為土壤力學問題，見 M. A. Biot, *Phys.*, vol. 6, p. 367, 1935.

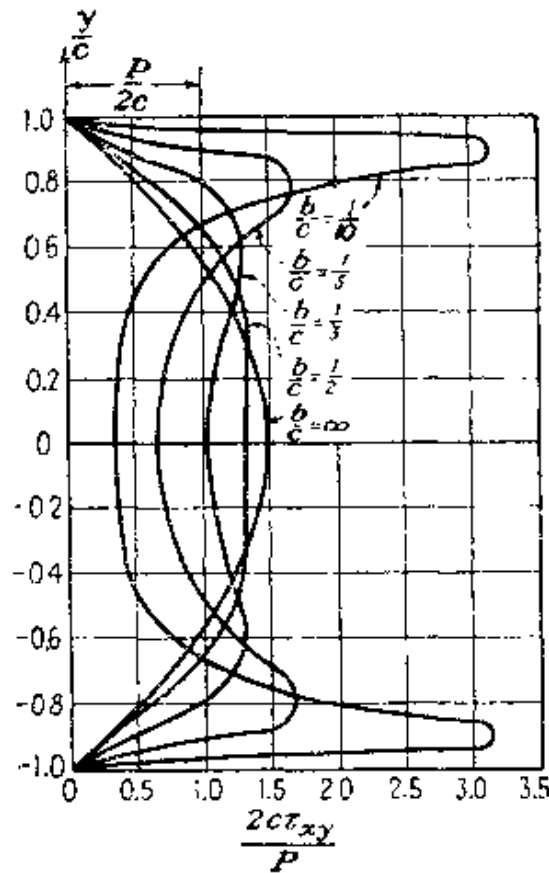


圖 36

現取另一極端例，設板之高度 $2c$ 較長度 $2l$ 為大（圖37）。吾人將用此例以證明當對 P 作用點距離增加時斷面上應力分布迅趨於均勻。用（k）內第二式以 $\cos \alpha x$ 代 $\sin \alpha x$ 及（n）內係數 A_m' 及 B_m' ，得

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\alpha a}{m} (\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cos \alpha x \quad (p)$$

內 $qa = P/2$ 。如 l 與 c 比較為小值， αc 為一大數，故對 $\sinh \alpha c$ 較可忽計。吾人亦可置

$$\sinh \alpha c = \cosh \alpha c = 1/2e^{\alpha c}$$

距板中點遠處斷面上吾人可寫 $\sinh \alpha y = \cosh \alpha y = 1/2e^{\alpha y}$ 。代於方程式（p），得

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\alpha a}{m}}{2m} \{ (\alpha c + 1)e^{\alpha(y-c)} - \alpha y e^{\alpha(y-c)} \} \cos \alpha x$$

$$= -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{m\pi a}{l})}{2m} \left[\frac{m\pi}{l} (c-y) + 1 \right] e^{(m\pi/l)(y-c)} \cos \frac{m\pi x}{l}$$

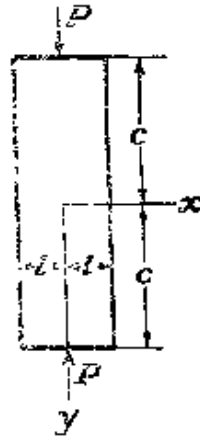


圖 37

如 $c-y$ 並非甚小，例如 $c-y > l/2$ ，此級數迅速收斂，計算 σ_y 時僅需取前數項即可。如此則

$$\sin \frac{m\pi a}{l} = \frac{m\pi a}{l}$$

用 $2aq = P$ 得

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m\pi}{l} (c-y) + 1 \right] e^{(m\pi/l)(y-c)} \cos \frac{m\pi x}{l}$$

對 $y = c-l$

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \left(\frac{\pi+1}{e^{\pi}} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{2\pi+1}{e^{2\pi}} \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{3\pi+1}{e^{3\pi}} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)$$

此級數前三項即足夠精確，應力分布如圖 38b 所示。同圖中亦示 $c-y = l/2$ 及 $c-y = 2l$ 之應力分布（註 1）。顯然在對末端距離等於板條寬度處應力分布即接近均勻，此與通常根據聖維南原理所得結論相符。

對一長條如圖 37 所示，倘沿邊更變率不太急劇時應力 σ_x 將經板之寬度 $2l$ 傳遞而甚少變化。此解所得應力，對此點將需修正，特別接近兩端 $y = \pm c$ 時為

（註 1）F. Bleich, loc. cit. 此結果經較詳盡分析及度量驗正見 P. Theocaris:

(1) *J. Appl. Mech.*, vol. 26, pp. 401-406, 1959; (2) *Intern. J. Engr. Sci.*, vol. pp. 1-19, 1964.

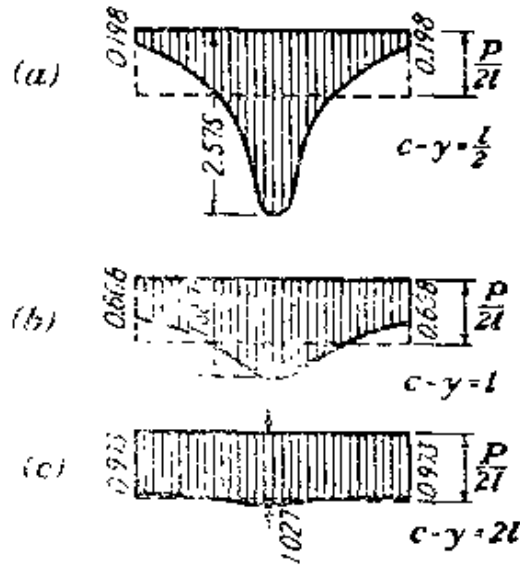


圖 38

然。圖37問題當 $c=2l$ 時用另一方法（註）所得之解，在中點水平面得一接近均勻分布之壓應力，與圖38相符。接近荷力 P 作用點附近區域之應力分布待以後討論之（見第100頁）。

第二十五節 傅立葉級數之其他應用 重力荷載

第24節所討論問題為單“跨度” l 或 $2l$ 。但所獲之解亦可視為代表平行於 x 軸長條上之周期應力情況，因傅立葉級數代表一週期函數。含一序列相同跨度及類似荷力之連續梁在適當之末端條件下將具此種週期性應力分布。如在某一鋼筋

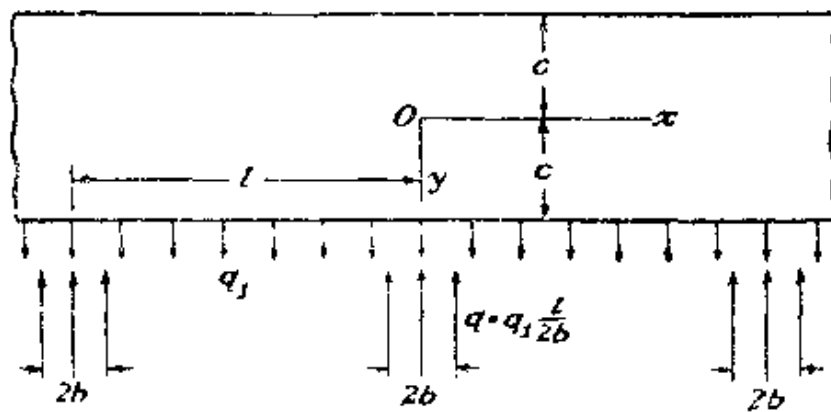


圖 39

（註）J. N. Goodier, *Trans. ASME*, vol. 54, p. 173, 1932.

混凝土建築中，梁實際為一牆其支承距離與其高度相若（圖39），可用此法予以分析（註）。初等梁理論不足應用。在底面上有一均勻分布之荷力 q_1 ，由均勻分布於 $2b$ 寬度之反作用力所支承區間為 l ，代表24節方程式 (m) 之一特例。如荷力 q_1 係施於頂面則僅需於頂底兩面各加一等值反向均勻分布之 q_1 。

如荷力係梁自身之重量則體力問題可簡化為面力問題。下列簡單應力系統

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -\rho g(y+c) \quad \tau_{xy} = 0$$

適應平衡及配合方程式 (19) 及 (24)。顯然此代表圖39中支承上均勻分布壓力 $2\rho g c$ 。除支承處外（寬 $2b$ ），底面上 σ_y 為零之條件，可將此應力分布體系加於以 $2\rho g c$ 代替 q_1 之圖39所代表者適應之，應力為 q 及 q_1 所造成而與體力無關。

第二十六節 末端效應 特徵解

第24及25兩節中所取之傅立葉級數式應力函數適用於兩對邊已知荷力（或位移）問題。如一矩形區域四邊均有已知條件，則不足用。此時可加一 y 變數之傅立葉級數。此導致馬秋 (Mathieu) 氏（見第51頁註 1）“交叉重疊法”

不同型之應力函數可用以檢討當上下兩邊無荷力時（或位移，或他種齊次條件）兩端上荷力情況。例如，當 $y = \pm c$ 為自由面時，取函數

$$\phi = C e^{-\gamma x/c} \left(\kappa \cos \frac{\gamma y}{c} + \frac{\gamma y}{c} \sin \frac{\gamma y}{c} \right) \quad (a)$$

對常數 C ， γ ， κ 任意值適應微分方程式 (30)。在 $y = \pm c$ 上邊界條件 $\sigma_y = 0$ ， $\tau_{xy} = 0$ ，均可適應，如吾人取

$$\phi = 0 \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad y = \pm c \quad (b)$$

因此等式亦指

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad y = \pm c$$

但條件 (b) 對任一斷面 $x = \text{常數}$ 亦指零合力及力偶。與 x 軸對稱關係使僅對 x 向之力需予檢討。對此得

(註) 此類問題之討論及參考資料見 “Die Statik im Eisenbetonbau,” by K. Beyer, 2d ed., p. 723, 1934; 另閱 H. Craemer, *Ingenieur-Arch.*, vol. 7, p. 325, 1936.

$$\int_{-c}^c \sigma_x dy = \int_{-c}^c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=-c}^{y=c} = 0$$

故兩端上荷力為自成平衡。

因函數 (a) 對 y 為偶性，僅可在 $y=c$ 處施用條件 (b)。結果為

$$\kappa \cos \gamma + \gamma \sin \gamma = 0 \quad \gamma \cos \gamma + (1-\kappa) \sin \gamma = 0 \quad (c)$$

消去 κ 後，得

$$\sin 2\gamma + 2\gamma = 0 \quad (d)$$

倘 $\cos \gamma \neq 0$ 。除 $\gamma=0$ 顯明但無關重要之根外，(d) 式其他根為複數。此等根以共軛複數出現，即如 γ 為一根， $-\gamma$ 亦然。其中含正實數部分為 (a) 型之應力函數，當 x 增加時其值減小，因此適合於一端 ($x=0$) 自成平衡問題。為使實值部分增值，前兩個非零根 (註 1) 為

$$\gamma_2 = 2.1061 + 1.1254i \quad \gamma_4 = 5.363 + 1.5516i \quad (e)$$

用偶數指標係因吾人僅取 (a) 內 y 之偶函數。如吾人另取奇函數

$$\kappa' \sin \frac{\gamma y}{c} \cos \frac{\gamma y}{c} \quad (f)$$

方程式 (d) 則由

$$\sin \gamma - 2\gamma = 0 \quad (g)$$

替代，前兩個非零根為

$$\gamma_3 = 3.7488 + 1.3843i \quad \gamma_5 = 6.9500 + 1.6761i \quad (h)$$

欲求 κ' 之對應值，(c) 之第一式換為

$$\kappa' \sin \gamma + \gamma \cos \gamma = 0 \quad (i)$$

(註 1) 見 J. Fadl, *Ingenieur-Arch.*, vol. 11, 1941, p. 125. 此種函數係 Fadl 及 Papcovitch (1940) 獨立引用，對此及以後文獻(1) J. P. Benthem, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 16, 1963, pp. 413-429; (2) G. Horvay and J. S. Born, *J. Appl. Mech.*, vol. 24, 1957, pp. 261-268; (3) J. N. Goodier and P. G. Hodge, "Elasticity," p. 20, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958; (4) M. W. Johnson, Jr. and R. W. Little, *Quart. Appl. Math.*, vol. 22, pp. 335-344, 1965.

回視 (a) 所代表之對稱例，代入選定之根 γ ，例如，(e) 式之 γ_2 及自 (c) 式第一式 (或第二) 所得與其有關之 κ ，得一複數形式之應力函數，暫視 C 為一，因此函數適應方程式 (30)，其實值與虛值部分各單獨適應此式而皆可取為應力函數。然後每一均可予以實數係數， γ 之實數部分含一指數因子，當 x 增值時規定遞減速率。此速率最低值出現於對應 γ_2 之函數；由 (e) 式，指數因子為

$$e^{-2.1061x/C}$$

此提供對衰減測定方法，倘此處所取無限集之特徵函數可以代表任何可能自成平衡之末端荷力。雖實際確屬如此，但實際決定各係數值時可遇極繁複之計算。為避免此困擾，較簡單之接近函數曾經列出 (註 1) 並用於一系列論文中。

設末端條件非預定荷力而係預定位移。在某些例中各頂點 $x=0, y=\pm c$ 處應力可為異點，各異點項 (註 2) 性質之鑑別至為重要，如可能，用閉合形式代表之使解之級數部分僅代表非異點部分。問題之一例為拉條之一端嵌入使無位移受拉力作用曾經此法解出 (註 3)。混合拉條問題，彈性常數在 $x>0$ 部分與 $x<0$ 中為不同值，亦曾被檢討 (註 4)。

(註 1) 見 Horvay and Born, *op. cit.*

(註 2) 閱第 42 節

(註 3) 閱 Benthem, *op. cit.*

(註 4) K. T. S. Iyengar and R. S. Alwar, *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 14, pp. 344-352, 1963; and *Z. Angew. Mech.* vol. 43, pp. 249-258, 1963.

習 題

1. 檢討以下應力函數所代表之平面應力問題

$$\phi = \frac{3F}{4c} \left(xy - \frac{xy^3}{2c^2} \right) + \frac{P}{2} y^2$$

2. 檢討以下應力函數所解之問題

$$\phi = -\frac{F}{d^3} xy^2(3d-2y)$$

所示區域為 $y=0, y=d, x=0$, 及 x 正右方。

3. 證

$$\phi = \frac{q}{8c^3} (x^2 (y^3 - 3c^2y - 2c^3) - \frac{1}{5}y^5 (y^2 - 2c^2))$$

為一應力函數，當用於區域 $y = \pm c, x=0$, 及 x 為正時求所解之問題。

4. 應力函數

$$\phi = S \left(\frac{1}{4}xy - \frac{xy^2}{4c} - \frac{xy^3}{4c^2} + \frac{ly^2}{4c} + \frac{ly^3}{4c^2} \right)$$

試用於受均勻剪力施於底邊之懸臂梁 ($y = \pm c, 0 < x < l$)，上邊及一端 ($x=l$) 無外力作用。以何觀點言解非完整？比較各應力與初等拉力及撓曲公式。

5. 圖26所示懸臂梁問題中，在 $x=l$ 處支承條件為

$$\text{在 } x=l, y=0 \text{ 處: } u=v=0$$

$$\text{在 } x=l, y=\pm c \text{ 處: } u=0$$

證撓度現為

$$(v)_{x=0} = \frac{Pl^3}{3EI} \left[1 + \frac{1}{2}(4+5\nu) \frac{c^2}{l^2} \right]$$

繪支承端 ($x=l$) 之變形並在圖中指出如何使此型支承符合實際 (鉸接？固定面上的軸承座？)

6. 圖28所示之梁設荷力為其自身重量而非施於頂邊之 q 。求位移分量 u 及 v 之算式。另求其厚度之算式 (原為一單位)。

7. 圖26所示懸臂梁，設非一窄矩形斷面為寬矩形斷面，並由作用於豎邊上之力維持平面應變狀態。荷力為每單位寬 P 作用於末端。

驗證 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 與第21節所得結果相同，求 σ_z 之算式，寫出位移分量 u 及 v ，如在 $x=l$ 處一橫向單元係固定。

8. 證如 V 為一平面調和函數，亦即適應拉普拉司方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

則函數 $xV, yV, (x^2+y^2)V$ 均適應第18節之 (a) 式，故可用為應力

64 彈性力學理論 (全一冊)

函數。

9. 證 $(Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y} + Cy e^{\alpha y} + Dy e^{-\alpha y}) \sin \alpha x$

爲一應力函數。

導一半無限板 $y > 0$ 內應力之級數代表式，在直邊 ($y = 0$) 上正交壓力之分布爲

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

證沿邊上一點之應力 σ_x 爲壓應力且等於該處所施壓力。設 y 變爲大值時應力逐漸消失。

10. 證第24節方程式 (e) 所提供之應力及問題9所得應力均適應第17節方程式 (b)。

第四章 極坐標二維問題

第二十七節 極坐標之一般方程式

討論圓環及盤、圓軸線窄矩形斷面曲桿等問題應力時，用極坐標較方便。板中面上一點之位置可由對原點 O (圖 40) 距離及 r 與 Ox 軸間夾角規定之。

設考慮自板中割新小單元 1234 之平衡， $O2$ 及 $O4$ 為與板垂直之兩徑向斷面，1 及 3 為與板垂直兩圓柱面。徑向正交應力分量由 σ_r 代表，周向正交應力分量由 σ_θ 代表，剪應力用 $\tau_{r\theta}$ ，每一符號均代表單元中點 P ，坐標為 r, θ 處之應力。因應力變化關係，在 1, 2, 3, 4 各邊中點上值

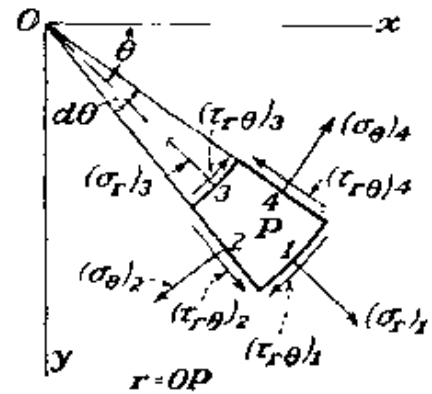


圖 40

不與 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 完全相同，在圖 40 中以 $(\sigma_r)_1$ 等表示之。邊 3, 1 等之半徑各用 r_2, r_1 表示。在邊 1 上之徑向力為 $(\sigma_r)_1 r_1 d\theta$ ，亦可寫為 $(\sigma_r r)_1 d\theta$ ，類此，邊 3 上徑向力為 $-(\sigma_r r)_3 d\theta$ 。邊 2 上正交力有對 OP 半徑分量 $-(\sigma_\theta)_2 (r_1 - r_2) \sin(d\theta/2)$ ，亦可改寫為 $(-\sigma_\theta)_2 dr (d\theta/2)$ 。邊 4 之對應分量為 $-(\sigma_\theta)_4 dr (d\theta/2)$ 。邊 2 及 4 剪力和為 $[(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4] dr$ 。

將各徑向力相加，包括單位體積之體積力 R 在內，吾人得單元之平衡方程式為

$$(\sigma_r r)_1 d\theta - (\sigma_r r)_3 d\theta + (\sigma_\theta)_2 dr \frac{d\theta}{2} - (\sigma_\theta)_4 dr \frac{d\theta}{2} + [(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4] dr + Rr d\theta dr = 0$$

除以 $dr d\theta$ 後變為

$$\frac{(\sigma_r r)_1 - (\sigma_r r)_2}{dr} - \frac{1}{2} [(\sigma_\theta)_2 + (\sigma_\theta)_1] + \frac{(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_1}{d\theta} + Rr = 0$$

如使單元尺度逐漸趨小，至極限值零，式內第一項之極限值為 $\partial(\sigma_r r)/\partial r$ 。第二項為 σ_θ ，第三項為 $\partial\tau_{r\theta}/\partial\theta$ 。周向平衡方程式可以類似方式導出。兩方程式之最後形式為

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

內 S 為單位體積力之周向分量。

用極標解二維問題時此兩方程式替代方程式 (18)。當體積力為零時，取

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\phi}{\partial r \partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

可適應 (37)， ϕ 為以 r 及 θ 為函數之應力函數。此可由直接代入予以驗正。以下討論中含 (38) 式之引導。

不直接導 (37) 式，吾人可先視問題中應力分布係由 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 各分量所代表。吾人可由此等分量求 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 各分量。由 (13) 式知

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (a)$$

同樣亦可以 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 表示 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ，其關係為 (見第 149 頁

習題 1)。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\quad (b)$$

欲求 (38) 式，用兩坐標系中導數之關係。吾人知

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

由此得

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}\end{aligned}$$

因此對任何函數 $f(x, y)$ ，在極坐標內，知

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (c)$$

爲求 $\partial^2 f / \partial x^2$ ，可對 (c) 式重複其運算。如此則

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

整理後，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \\ &\quad - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (d)$$

類此，另得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (\text{e})$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (\text{f})$$

如吾人視 f 爲應力函數 $\phi(x, y)$ 如 (29) 式但設 $\rho g = 0$ ——(d), (e), (f) 左方導數即爲 σ_y , σ_x , 及 τ_{xy} 。將各式右方代入(a)式, 結果即得 (38) 式。

爲轉換第32頁微分方程式 (a) 爲極坐標, 先將 (d) 及 (e) 相加, 得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) f \quad (\text{g})$$

此示右方運算式爲左方拉普拉司運算式之極坐標式。其次, 將 (b) 之前兩式相加, 得

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta \quad (\text{h})$$

當體積力爲零時, (24) 式爲

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (\text{i})$$

由 (i), (h), 及 (g) 式, 得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (39)$$

由此偏微分方程式各種解可得不同邊界條件下二維問題之極坐標解。本章中將討論若干此種問題。

第二十八節 軸對稱應力分布

當應力分布僅與 r 有關時, 配合方程式 (39) 變爲

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}\right) = \frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (40)$$

此為一常微分方程式，並可由引新變數 t 使 $r = e^t$ ，將此方程式化為一常係數線性方程式。如此可立得 (40) 之通解。此解含四個積分常數，必須由邊界條件求出。代入後可驗正

$$\phi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D \quad (41)$$

為此通解，對稱應力分布問題解大部分可由此求得 (註1)，對應之應力分量，由 (38) 式，得

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \log r) + 2C \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \log r) + 2C \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

如在坐標原點上有一洞孔，常數 A 及 B 為零，否則當 $r=0$ 時 (42) 式中應力分量變為無窮大。因此，對無體積力及原點上無孔之板上，僅有一種軸對稱應力分布可能存在，此即 $\sigma_r = \sigma_\theta = \text{常數}$ ，板係在其平面中受各向均勻拉力或壓力。

如原點上有一洞孔，除均勻拉力或壓力外由 (42) 式可得其他解。例如，取 B 為零 (註2)，(42) 式化為

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2C \end{aligned} \quad (43)$$

(註1) 與 θ 無關之應力函數不能提供所有與 θ 無關之應力分布。函數 $A\theta$ ，見第131頁 (q) 式，解釋此點。

(註2) B 必須為零之證明需用位移觀點，見第79頁。

此解可使代表受內外均勻壓力空心圓柱體內之應力分布 (註1) (圖41)。設 a 及 b 為圓柱之內外半徑， p_i 及 p_o 為均勻之內外壓力。如此則邊界條件為

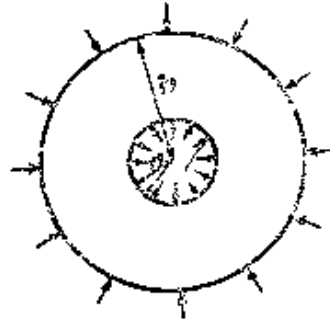


圖 41

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_i \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_o \quad (a)$$

代入 (43) 內第一式，得下列兩式以定常數 A 及 C ：

$$\frac{A}{a^2} + 2C = -p_i$$

$$\frac{A}{b^2} + 2C = -p_o$$

因此

$$A = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2}$$

$$2C = \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}$$

將此等常數代於 (43) 式中，得應力分量算式如下：

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}$$

(註1) 此問題為 Lamé 氏所解，見 “Leçons sur la théorie …… de l'élasticité,” Gauthiers, Paris, 1852.

$$\sigma_{\theta} = -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \quad (44)$$

徑向位移 u 極易求出，此時 $\epsilon_{\theta} = \frac{u}{r}$ ，而對平面應力

$$E\epsilon_{\theta} = \sigma_{\theta} - \nu\sigma_r$$

由 (43) 或 (44) 知 $\sigma_r + \sigma_{\theta}$ 在圓柱內任何處均為一常數。因此沿圓柱體軸線方向 σ_r 及 σ_{θ} 所產生之位移為均勻伸長或壓縮，故垂直於此軸之斷面保持為平面。因此由兩鄰近斷面所割出之柱體單元由 (44) 式應力所生之變形與鄰近單元之變形不生干擾，故可視單元係在平面應力情況中，如以上討論所設。

當 $p_o = 0$ 時圓柱僅受內壓力，(44) 式現為

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta} &= \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (45)$$

此等方程式證示 σ_r 永為壓應力， σ_{θ} 永為拉應力。後者在圓柱內面上值為最大，該處

$$(\sigma_{\theta})_{\max} = \frac{p_i (a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} \quad (46)$$

$(\sigma_{\theta})_{\max}$ 永較內壓力之數值為大，當 b 逐漸增大時則趨近於內壓力值，但永不能較 p_i 為小，不論外部增加若干材料。方程式 (45) 及 (46) 在機械設計中各種應用通常於材料力學初等書籍中討論之 (註1)。

具偏心洞孔之圓柱體問題由傑弗雷氏 (G. H. Jeffery) 解出

(註1) 參閱 S. Timoshenko, "Strength of Materials," 3d. ed., vol. 2, chap. 6, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1956.

(註1)。如洞孔半徑為 a ，外面半徑為 b ，兩中心距離為 e ，最大應力，當受壓內力 p_i 時，係最薄處內面上之周向應力，如 $e < 1/2a$ ，其值為

$$\sigma = p_i \left[\frac{2b^2(b^3 + a^3 - 2ae - e^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)} - 1 \right]$$

如 $e=0$ ，此與 (46) 式符合。

第二十九節 曲桿之純撓曲

取一窄矩形斷面圓形軸線曲桿，並設力偶 M 施於兩端使其曲率面內撓曲如圖42所示 (註2)。沿桿長撓矩為常數，故在所有徑向斷面上應力分布亦一致，因此問題解可得自 (41) 式。

用 a 及 b 代表邊界線之內外兩半徑，並設斷面寬為一單位，邊界條件為

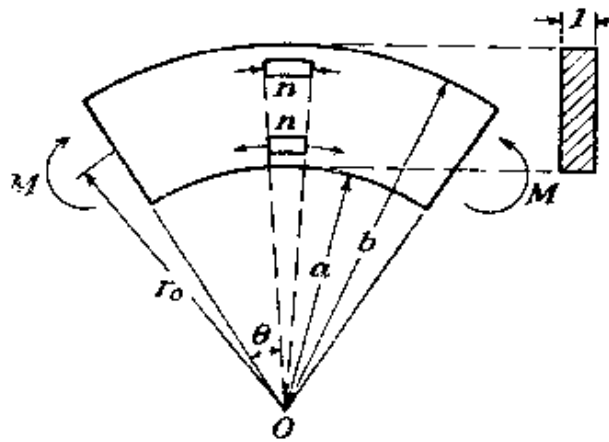


圖 42

(註1) 見 Trans. Roy. Soc. (London), ser. A, vol. 221, p. 265, 1921. 另見 Brit. Assoc. Advan. Sci. Rept., 1921. 用另一方法之完整解見本書第66節。

(註2) 由兩維問題之一般討論，第 16 節，知以下對應力解亦可用於平面應變。

$$(1) \quad \sigma_r = 0 \quad r = a \quad \text{及} \quad r = b$$

$$(2) \quad \int_a^b \sigma_\theta dr = 0 \quad \int_a^b \sigma_\theta r dr = -M \quad (a)$$

$$(3) \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{沿邊界}$$

條件(1)指內外邊界面上無正交外力作用；條件(2)指兩端面上正交應力總和為力偶 M ；條件(3)指整個邊界上無切向力作用。用

(42) 第一式及邊界條件(a)中(1)式，得

$$\frac{A}{a^2} + B(1 + 2 \log a) + 2C = 0$$

$$\frac{A}{b^2} + B(1 + 2 \log b) + 2C = 0 \quad (b)$$

為使兩端撓力偶等於 M ，須適應條件

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} r dr = -M \quad (d)$$

因知

$$\int_a^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} r dr = \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_a^b - [\phi]_a^b$$

由(b)得

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_a^b = 0$$

由(d)得

$$[\phi]_a^b = M$$

用(41)式之 ϕ ，得

$$A \log \frac{b}{a} + B(b^2 \log b - a^2 \log a) + C(b^2 - a^2) = M \quad (e)$$

此式連同(b)兩式完全決定常數 A, B, C ，解此三聯立方程式，得

$$A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \log \frac{b}{a} \quad B = -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2)$$

$$C = \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \log b - a^2 \log a)] \quad (f)$$

式內

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\log \frac{b}{a} \right)^2 \quad (g)$$

代 (f) 式各常數值於 (42) 式，得各應力分量爲

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

此應力分布在兩端上可驗證無正交合力，故所有邊界條件均被適應。因此 (47) 爲問題之正確解 (註 1)，倘兩端上正交力之分布係 (47) 第二式所示。如造成撓力偶 M 之力在兩端上係其他方式之分布，近兩端處應力分布將不同於 (47)。但由聖維南原理知不在兩端附近，例如距離大於桿高度處，(47) 式解之差誤即可忽計。此點可由圖 102 說明。

將 (47) 式解與初等材料力學書中通常所得解予以比較頗具實用意義。如桿之高度， $b - a$ ，較桿中線半徑 $(b + a)/2$ 爲小值時，通常設應力分布與直桿相同。如桿之高度並非小數值，通常設桿斷面撓曲時仍保持爲平面，並由此可證示應力 σ_θ 分布在任一斷面上均爲拋物線式

(註 1) 此解係 H. Golovin 所得，見 *Trans. Inst. Tech., St. Petersburg* 1881。此論，以俄文印行，未爲他國所知。同一問題後由 M. C. Ribière (*Compt. Rend.*, vol. 108, 1889, 及 vol. 132, 1901) 及 L. Prandtl 所解。閱 A. Föppl, "Vorlesungen über Technische Mechanik," vol. 5, p. 72, 1907; 及 A. Timpe, *Z. Math. Physik* vol. 52, p. 348, 1905.

(註1) 。在上述各情況中應力 σ_θ 之最大 (註2) 及最小值，可由下式代表

$$\sigma_\theta = m \frac{M}{a^2} \quad (h)$$

下表中為因子 m 之數值，由上述兩初等方法及正確解 (47) 式算出 (註3) 。由此表知根據斷面保持平面假設之初等解可得相當正確結果。

方程式 (k) 係數 m 值

b/a	線性應力分布	雙曲線應力分布	正確解
1.3	± 66.67	+ 72.98 - 61.27	+ 73.05 - 61.35
2	± 6.000	+ 7.725 4.863	+ 7.755 - 4.917
3	± 1.500	+ 2.285 - 1.095	+ 2.292 - 1.130

以後將證明，在純撓曲時，斷面實際保持平面，初等解與正確解差別原因係初等解中對應力分量 σ_r 之忽視及設桿之縱向纖維為簡壓狀態。

由 (47) 內第一式知應力 σ_r 永為正值，如圖 42 所示。由圖 42

(註1) 此近似理論係 H. Résal 所提出，見 *Ann. Mines*, p. 617, 1862, 及 E. Winkler, *Zivilingenieur* vol. 4, p. 232, 1858; 另閱其所著 "Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit," chap 15, prag, 1867. 繼續發展見 F. Grashof, "Elastizität und Festigkeit", p. 251, 1878, 及 K. Pearson, "History of the Theory of Elasticity," vol. 2. part 1, p. 251, 1893.

(註2) (47) 式 σ_θ 之最大值永係在內面上 ($r=a$) 。證明見 J. E. Brock, *J. Appl. Mech.*, vol. 31, p. 559, 1964.

(註3) 此結果係取自 V. Billevicz 博士論文密西根大學，1931.

所示單元 $n-n$ 上, σ_θ 之作用方向亦可得相同結論。對應之切向力有徑向合力使纖維生分離趨勢並生徑向拉應力。此應力向中和面處遞增, 在接近此面變為最大值。此最大值遠較 $(\sigma_\theta)_{\max}$ 為小。例如, $b/a = 1.3$ 時, $(\sigma_r)_{\max} = 0.06(\sigma_\theta)_{\max}$; $b/a = 2$ 時, $(\sigma_r)_{\max} = 0.138(\sigma_\theta)_{\max}$; $b/a = 3$, $(\sigma_r)_{\max} = 0.193(\sigma_\theta)_{\max}$ 。圖43示 $b/a = 2$ 時 σ_θ 及 σ_r 之分布。由此圖知 σ_r 最大值略離中面趨近於曲率中心。

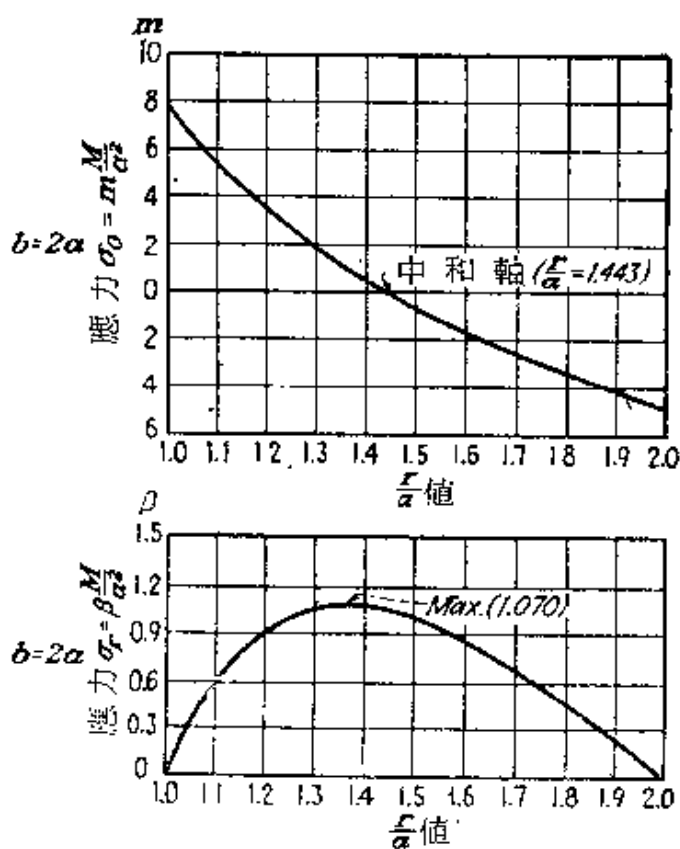


圖 43

第三十節 極坐標應變分量

考慮極坐標位移時設 u 及 v 為徑向及切向之位移分量。如單元 $abcd$ (圖44) ad 邊之位移為 u , bc 邊之徑向位移為 $u + (\partial u / \partial r) dr$ 。單元 $abcd$ 之徑向單位拉長為

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (48)$$

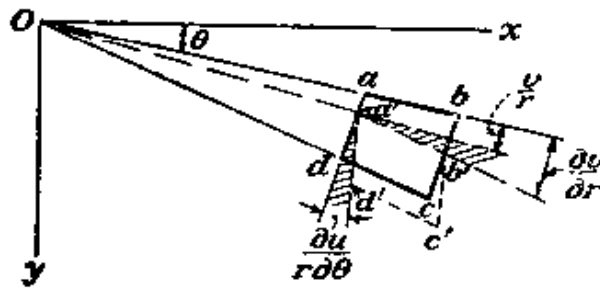


圖 44

切線方向應變不僅與位移 v 有關，與徑向位移 u 亦有關係，設單元 $abcd$ (圖44) 之 a 及 d 兩點僅有徑向位移 u ， ad 弧長度變為 $(r+u)d\theta$ ，故切向應變為

$$\frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}$$

邊 ab 及 cd 切向位移差為 $(\partial v / \partial \theta) d\theta$ ，故由位移 v 所造成應變為

$$\epsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \quad (49)$$

現考慮剪應變，設 $a'b'c'd'$ 為單元 $abcd$ 變形後位置 (圖44)。 ad 及 $a'd'$ 方向間夾角係由位移 u 所造成，等於 $\partial u / r \partial \theta$ 。類此， $a'b'$ 及 ab 間夾角為 $\partial v / \partial r$ 。必須注意此角僅一部分 (圖中陰影部分) 算為剪應變，另一部分，等於 v/r ，代表單元 $abcd$ 對經 O 點軸線作剛體轉動時之角位移。因此，代表剪應變之角變值為

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (50)$$

代各應變分量算式 (48)，(49)，(50) 於虎克定律

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_{\theta}) \\ \epsilon_{\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_r) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta}$$

可得足夠方程式以求 u 及 v 。

第三十一節 軸對稱應力之位移

將 (42) 式之各應力分量代於 (51) 第一式中，得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} \left[\frac{(1+\nu)A}{r^2} + 2(1-\nu)B \log r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C \right]$$

積分後為

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \log r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right] + f(\theta) \quad (a)$$

內 $f(\theta)$ 為僅含 θ 之函數。由 (51) 第二式及方程式 (49)，得

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

積分後為

$$v = -\frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta) d\theta + f_1(r) \quad (b)$$

內 $f_1(r)$ 為僅含 r 之函數。代 (a) 及 (b) 於 (50) 式中，並知因 $\tau_{r\theta}$ 為零，故 $\gamma_{r\theta}$ 為零，得

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \frac{1}{r} f_1(r) = 0 \quad (c)$$

因此

$$f_1(r) = Fr \quad f(\theta) = H \sin \theta + K \cos \theta \quad (d)$$

內 F ， H ，及 K 為常數，由曲桿或環之拘束條件決定之。代 (d) 於 (a) 及 (b) 式，得以下位移之算式 (註)。

(註) 方程式 (c) 僅當 $f(\theta)d\theta$ 取自 (d) 不帶另加常數時始可適應。

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \log r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right] + H \sin \theta + K \cos \theta \quad (52)$$

$$v = \frac{4Br\theta E}{E} + Fr + H \cos \theta - K \sin \theta$$

內常數 A ， B ，及 C 在每一例中應代入。例如，取純撓曲，取斷面形心（圖42）以度量 θ ，並設此處徑向單元為固定者，拘束條件為

$$u=0 \quad v=0 \quad \frac{\partial v}{\partial r}=0 \quad \text{對 } \theta=0 \text{ 及 } r=r_0=\frac{a+b}{2}$$

用此於 (52) 式中，得以下各式計算積分常數 F ， H 及 K ：

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r_0} + 2(1-\nu)Br_0 \log r_0 - B(1+\nu)r_0 + 2C(1-\nu)r_0 \right] + K &= 0 \\ Fr_0 + H &= 0 \\ F &= 0 \end{aligned}$$

由此知 $F = H = 0$ ，位移 v 為

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - K \sin \theta \quad (53)$$

故任何斷面位移含一平移部分 $-K \sin \theta$ ，對斷面上各點均相同，及斷面之轉動角 $4B\theta/E$ ，此係對曲率中心 O （圖42）。由此知撓曲時斷面保持平面，如通常初等撓曲理論所設。

討論整體圓環對稱應力分布時（見第69頁），普遍解 (42) 中常數 B 曾取為零，並由此得藍姆問題解。求得 (52) 式位移後，可知取 B 為零所含意義。 B 在位移 v 中佔 $4Br\theta/E$ 項。此項非單值；當 θ 增加 2π 時，即經一圓周回至原點時，其值增加。此一多值式之位移對整環言為不可能者，故在該例中，必須取 $B = 0$ 。

一整環為多重連結體之一例，亦即割一斷面時可不使物體分為兩部分。求此種物體內應力時，有關應力之邊界條件不足以完全決定應力分布，其他方程式，代表位移須為單值之條件，必須予以考慮（參閱第 34 及第 43 節）。多值解之物理意義可由多重連結體之起始應力解釋之。如環兩斷面間一部分經被割離（圖 45），而兩端由銲接或其他方法重新連結，環內即生起始應力，亦即外力不存在時環內所生之應力。如 α 為一小角，代表環被割離部分，切向位移使兩端重合為

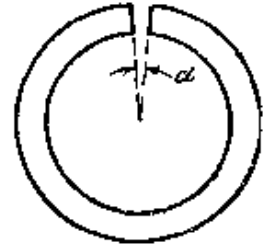


圖 45

$$v = \alpha r \quad (e)$$

同一位移，置 $\theta = 2\pi$ 於 (53) 式中，為

$$v = 2\pi \frac{4Br}{E} \quad (f)$$

由 (e) 及 (f) 得

$$B = \frac{\alpha E}{8\pi} \quad (g)$$

常數 B ，於 (53) 式內為一多值項，現具固定值，視環內起始應力如何造成而定。代 (g) 式於第 29 節 (f) 式內，得使環兩端重合撓矩（圖 45）為

$$M = - \frac{\alpha E}{8\pi} \frac{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 [\log(b/a)]^2}{2(b^2 - a^2)} \quad (h)$$

環內起始應力可由此式及純撓矩解 (47) 式求得。

第三十二節 旋轉盤

圓形旋轉盤內應力分布具極重要實用性（註 1）。如盤之厚較其半

（註 1）此問題之完整討論及廣泛參考資料，見 K. Löffler 所著：“Die Berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen,” Springer-Verlag OHG, Göttingen, Germany, 1961.

徑爲小值，徑向及切向應力在盤厚度上變化可予忽視（註1），問題即易於求解（註2）。如厚度爲常數，可用（37）式，僅須使體積力等於慣性力（註3）。如此則

$$R = \rho\omega^2 r \quad S = 0 \quad (a)$$

內 ρ 爲盤材料之單位體積質量， ω 爲盤之角速度。因對稱關係， $\tau_{r\theta}$ 爲零， σ_r 及 σ_θ 與 θ 無關。方程式（37）第二式恆適應，第一式可寫爲

$$-\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (b)$$

$$\epsilon_r = -\frac{du}{dr} \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (c)$$

吾人可解（51）式應力—應變關係爲應力分量方程式，得

$$\sigma_r = -\frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta) \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_r)$$

然後用（c）得

$$\sigma_r = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) \quad (d)$$

代入（b）式，知 u 須適應

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho\omega^2 r^3 \quad (e)$$

此式之通解爲

$$u = \frac{1}{E} \left[(1-\nu)Cr - (1+\nu)C_1 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8} \rho\omega^2 r^3 \right] \quad (f)$$

（註1）扁平旋轉橢圓體盤問題之正確解由 C. Chree 解出，見 *Proc. Roy. Soc. (London)*, vol. 58, p. 39, 1895. 解中證明旋轉軸上最大與最小應力差僅爲厚爲其直徑八分之一均勻盤最大應力百分之五。

（註2）此問題較詳盡理論見本書第 134 節。

（註3）盤重可忽視。

內 C_1 及 C_2 爲任意常數。對應之應力分量由 (d) 式爲

$$\begin{aligned}\sigma_r &= C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta &= C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2\end{aligned}\quad (g)$$

積分常數可由邊界條件求得。

對一實心盤，必須取 $C_1 = 0$ ，爲使中心處 u 爲零。常數 C 由盤圓周上 ($r=b$) 條件決定。如圓周上無外力作用，得

$$(\sigma_r)_{r=b} = C - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 = 0$$

由此得

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2$$

應力分量，由 (g) 式爲

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2\end{aligned}\quad (54)$$

最大應力在盤中心處 (註1)，其值爲

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2$$

如圓盤中心處有一圓孔半徑爲 a ，(g) 式之積分常數可自內外兩週界上條件求得。如無外力作用於兩邊界上，則

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0 \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0$$

由此得

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2) \quad C_1 = -\frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 a^2 b^2$$

(註1) 由 σ_r, σ_θ 定義知當與 θ 無關時兩者在中點上必相等。

代於 (g) 式

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right)\end{aligned}\quad (56)$$

最大徑向應力在 $r = \sqrt{ab}$ 處，其值為

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b-a)^2$$

周向應力最大係在內邊界上，其值為

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} a^2 \right)$$

此應力值大於 $(\sigma_r)_{\max}$ 。

當孔口半徑 a 趨於零時，最大周向應力趨近兩倍於實圓盤之應力 (55)；亦即作一小圓孔於旋轉實圓盤中心 (註 1) 使其最大應力增加兩倍。其他此類孔口應力集中現象將於以後討論 (閱第 35 節)。

設應力在盤厚度上無變化，以上對等厚度圓盤之分析方法亦可引伸於厚度變化盤中。如 h 為盤之厚度，依半徑 r 變更，圖 40 單元之平衡方程式為

$$\frac{d}{dr} (hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (k)$$

用 (d) 式以 u 表示應力分量，(k) 式變為

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u + \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \left(r \frac{du}{dr} + \nu u \right) = \frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r^3 \quad (l)$$

當 h 為 r 之函數時，此為 u 之微分方程式，當

$$h = Hr^n \quad (m)$$

(註 1) 對偏心孔見 Ta-Cheng Ku, *J. Appl. Mech.*, vol. 27, pp. 359-360, 1960, 及該文所附資料。

時此式極易積分， H 及 n 為常數。通解之形式為

$$u = mr^{n+2} + Ar^\alpha + Br^\beta$$

內
$$m = \frac{(1-\nu^2)\rho\omega^2}{E[8+(3+\nu)n]}$$

α 及 β 為二次方程式

$$x^2 + nx + n\nu - 1 = 0$$

之根， A 及 B 為任意常數。

旋轉圓盤實際形狀之近似表示可將盤劃分用 (m) 式之曲式使接近適用於各部分 (註1)，錐形盤曾由多人討論 (註2)。常見情形為將盤分為數部而視每一部分為等厚度圓盤 (註3)。

第三十三節 一端受力曲桿之撓曲 (註4)

開始取圖46所示簡單情況。一圓軸線窄矩形斷面桿下端受拘束上

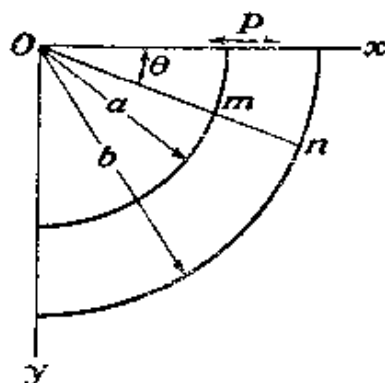


圖 46

(註1) M. Grüber, *VDI*, vol. 50, p. 535, 1906.

(註2) A. Fisher, *Z. Oesterr. Ing. Arch. Vereins*, vol. 74, p. 46, 1922;
H. M. Martin, *Eng.*, vol. 116, p. 274, 1923; K. E. Bisshopp,
J. Appl. Mech., vol. 11, p. A-1, 1944.

(註3) 此係 M. Donath 所發展；見所著“Die Berechnung Rotierender
Scheiben und Ringe nach einm neuen Verfahren,” Berlin,
1929；另見 K. Löffler 書 *op. cit.*

(註4) 見 H. Golovin, *op. cit.*

端受徑向力 P 之撓曲。任意斷面 m_n 上撓矩與 $\sin \theta$ 成正比，正交應力 σ_θ ，根據撓曲曲桿初等理論與撓矩為正比，設此亦可用於正確解，由 (38) 式第二式知應力函數 ϕ ，適應下列方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (a)$$

應與 $\sin \theta$ 成比例。取

$$\phi = f(r) \sin \theta \quad (b)$$

並代入 (a) 式，知 $f(r)$ 應適應以下常微分程式

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} \right) = 0 \quad (c)$$

此方程式可轉換為一常係數線性微分分方程式（見第 69 頁），其通解為

$$f(r) = Ar^3 + B \frac{1}{r} + Cr + Dr \log r \quad (d)$$

內 A ， B ， C 及 D 為積分常數，其值由邊界條件決定。代 (d) 解於 (b) 式應力函數，並用公式 (38)，可得以下各應力分量之算式：

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \cos \theta \end{aligned} \quad (59)$$

由曲桿（圖46）內外兩邊界上無外力作用之條件，知

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad r = a \text{ 及 } r = b$$

由 (59) 式得

$$\begin{aligned} 2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a} &= 0 \\ 2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b} &= 0 \end{aligned} \quad (e)$$

最後條件爲分布於桿上端剪應力和總值應等於 P 。取斷面寬爲一個單位——或視 P 爲單位寬度荷力——得 $r=0$ 時

$$\int_a^b \tau_{r\theta} dr = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) dr = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_b^a$$

$$= \left. \left[Ar^2 + \frac{B}{r^2} + C + D \log r \right] \right|_b^a = P$$

或
$$-A(b^2 - a^2) + B \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \right) - D \log \frac{b}{a} = P \quad (f)$$

由 (e) 及 (f) 式得

$$A = \frac{P}{2N} \quad B = -\frac{Pa^2 b^2}{2N} \quad D = -\frac{P}{N}(a^2 + b^2) \quad (g)$$

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a}$$

代 (g) 式各常數值於 (59) 式，即得各應力分量算式。在桿上端上， $\theta=0$ ，得

$$\sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{N} \left[r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{1}{r} (a^2 + b^2) \right] \quad (h)$$

對桿之下端， $\theta=\pi/2$ ，

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{N} \left[3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - (a^2 + b^2) \frac{1}{r} \right] \quad (k)$$

僅當上外力分布爲 (h) 及 (k) 之方式時，(59) 式方成爲問題之正確解。對任何其他方式之力分布，接近兩端處應力分布將不同於解 (59)，但在遠距離處此解可仍視爲有效，根據聖維南原理。實際計算證明簡單理論，根據斷面撓曲後保持平面，仍提供甚佳結果。

圖47示 $\theta=0$ 斷面上剪應力 $\tau_{r\theta}$ 之分布 ($b=3a, 2a$ 及 $1.3a$)。橫坐

標為對內邊 ($r=a$) 之徑向距離。豎坐標代表數值因子，乘以平均剪應力 $P/(b-a)$ 可得所取點之剪應力。此因子值為 1.5 時為矩形斷面直梁中由拋物線式分布所得最大剪應力。由圖知當斷面深度為小值時剪應力分布趨近於拋物線式。對通常拱及穹之比例尺寸，拋物線式之剪應力分布，與矩形斷面直桿同，均為足夠正確者。

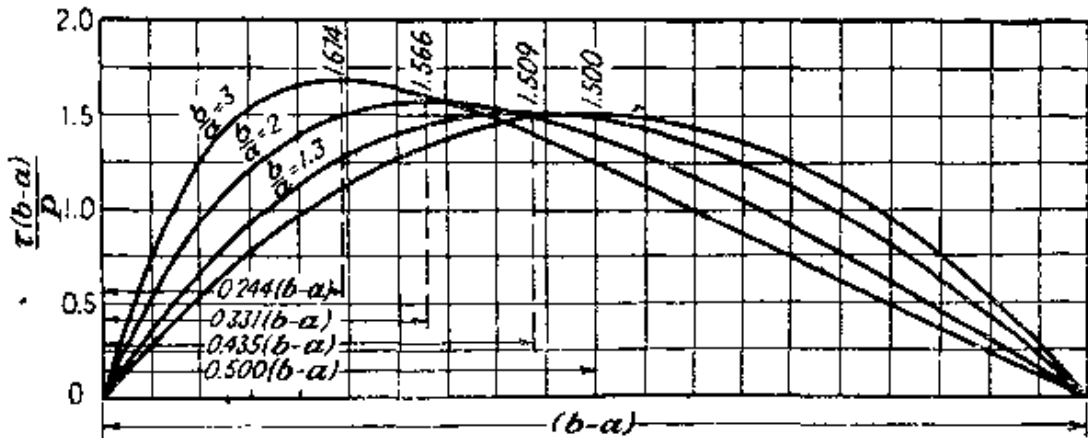


圖 47

現檢討外力 P 所造成之位移 (圖46)。用 (48) 至 (51) 式，並代入應力分量算式 (59)，得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\sin \theta}{E} \left[2Ar(1-3\nu) - \frac{2B}{r^3}(1+\nu) + \frac{D}{r}(1-\nu) \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\epsilon_{\theta} - u$$

$$\gamma_{r\theta} = -\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \tag{1}$$

積分後第一式變為

$$u = \frac{\sin \theta}{E} \left[Ar^2(1-3\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) + D(1-\nu)\log r \right] + f(\theta) \tag{m}$$

內 $f(\theta)$ 為僅含 θ 之函數。代 (m) 連同 ϵ_{θ} 之算式於 (1) 第二式中，並積分之，得

$$v = -\frac{\cos \theta}{E} \left[Ar^2(5+\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) - D \log r(1-\nu) + D(1-\nu) \right] - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad (n)$$

內 $F(r)$ 爲僅含 r 之函數。現再代 (m) 及 (n) 於 (1) 第三式內，得方程式

$$\int f(\theta) d\theta + f'(\theta) + rF'(r) - F(r) = -\frac{4D \cos \theta}{E}$$

此式可取

$$F(r) = Hr \quad f(\theta) = -\frac{2D}{E} \theta \cos \theta + K \sin \theta + L \cos \theta \quad (p)$$

予以適應， H, K, L 爲任意常數，其值由拘束條件決定。位移分量，由 (m) 及 (n) 式則爲

$$u = -\frac{2D}{E} \theta \cos \theta + \frac{\sin \theta}{E} \left[D(1-\nu) \log r + A(1-3\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} \right] + K \sin \theta + L \cos \theta$$

$$v = \frac{2D}{E} \theta \sin \theta - \frac{\cos \theta}{E} \left[A(5+\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} - D(1-\nu) \log r \right] + \frac{D(1+\nu)}{E} \cos \theta + K \cos \theta - L \sin \theta + Hr \quad (q)$$

桿上端徑向撓度可由在 v 式取 $\theta=0$ 求得，因此

$$(u)_{\theta=0} = L \quad (r)$$

常數 L 可由固定端 (圖46) 條件決定。當 $\theta=\pi/2, v=0, \partial v/\partial r=0$ ，因此，由 (q) 第二式知

$$H=0 \quad L = \frac{D\pi}{E} \quad (s)$$

故桿上端撓度，由 (g) 式，爲

$$(u)_{\theta=0} = \frac{D\pi}{E} = - \frac{P\pi(a^2+b^2)}{E[(a^2-b^2)+(a^2+b^2)\log(b/a)]} \quad (e)$$

此公式之應用待以後討論，當 b 趨近於 a 時，曲桿高度， $h=b-a$ ，較 a 為小值，吾人可以算式

$$\log \frac{b}{a} = \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) = \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{h^3}{a^3} - \dots$$

代入 (60) 並忽計高階微項，得

$$(u)_{\theta=0} = - \frac{3\pi a^3 P}{Eh^3}$$

此與初等公式相符合 (註1)。

取應力函數形式為

$$\phi = f(r)\cos\theta$$

並以上述方式進行分析，可得一豎向力及一力偶施於桿上端 (圖46) 問題之解。將此解減去由力偶所造成之應力 (見第29節)，即得上端受豎向力所造成應力。已知橫向及豎向荷力兩解後，任何斜向力解即可由重疊求得。

以上討論中均設 (e) 式已適應而桿圓形邊界上無外力作用。取 (e) 式不等於零，則桿圓形邊界上受與 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 成正比之正交與切向力作用。將此等解與前得純撓及一端受力解組合，可趨近於荷砂或土壤穹之受力情況 (註2)。

第三十四節 邊緣脫節

在第33節中位移分量 (q) 係由應力分量 (59) 式導出。常數 A, B, D 對圖46所示問題由 (g) 式代表。

(註1) 閱 S. Timoshenko, "Strength of Materials," vol. 1, Art. 80, 1955.

(註2) 若干此類問題例會由 H. Golovin 討論, *loc. cit.* 另見 Ribière, *loc. cit.*

將此解應用於四分之一個環為隨意選擇。同一解亦可用於接近完整環，圖48 (a) 或 (b)。對外加位移而非外加荷力時吾人亦可予以解釋。

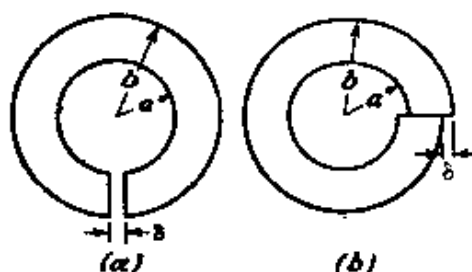


圖 48

取第33節位移 (q)，知 u 算式內第一項可提供一斷續 (discontinuity)。圖 48b 內，在 $\theta=0$ 處，[割出一徑向細縫。縫之下面為 $\theta=0$ ，上面為 $\theta=2\pi-\epsilon$ ， ϵ 為無窮小。如以此兩 θ 值計算 (q) 式之 u ，結果差一 δ 值。

$$\delta = (u)_{\theta=2\pi-\epsilon} - (u)_{\theta=0} \quad (a)$$

由 (q) 式得

$$\delta = -\frac{2D}{E} 2\pi \quad (b)$$

此割裂兩面相對位移在 48b 圖中以 δ 代表之。造成此 δ 所需力 P 可由 (g) 最後一式 (見第33節) 求得， D 為上式 (b) 所示，如已有相對位移 δ 而將兩面銲接時，每面對另一面所施力即上述力 P ，為作用及反作用。環係在自應變情況中，稱為“邊緣脫節”(edge dislocation)。對應之平面應變狀態為金屬結晶(註1)內塑性變形解釋之根據。

圖 48a 示一環具寬 δ 之平行空隙。如先割一細縫，然後予一相對

(註1) G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 134, pp. 362-387, 1934. 另參考 A. H. Cottrell, "Dislocations and Plastic Flow in Crystals," chap. 2, 1956.

位移使空隙開放，現位移之斷續為 v ，而非 u 。此可由第 33 節解求出，割裂右面取 $\theta = -\pi/2$ ，左面取 $\theta = 3\pi/2$ 。如此則

$$\delta = (v)_{\theta = -\pi/2} - (v)_{\theta = 3\pi/2} \quad (c)$$

用 33 節方程式 (g) 第二式，得

$$\delta = \frac{2D}{E} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \frac{2D}{E} \frac{3\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{4\pi D}{E} \quad (d)$$

在 (b) 及 (d) 式中 δ 僅為符號上之差別，故二例中應力僅符號差別。 P 可由第 33 節 (g) 第三式求得，然後 A 及 B 由前二式算出。此對應關係為可以預料者，因圖 48 (a) 及 (b) 之割裂均完成時，此象限即割為自由體。圖 48 (a) 中相對位移 δ ，及 48 (b) 中相對位移 $-\delta$ ，可將此象限向右推一 δ 而同時達成。此將不引進應力，故兩脫節單獨存在時必需具同值反向應力。此為一般 (註 1) “相當割裂定理” 之一例。

第三十五節 板內圓孔對應力分布之效應

圖 47 代表 x 向受均勻拉力 S 之平板。如板中點處有一小圓孔存在，圓孔附近應力分布將有變更，但由聖維原理知此種改變在較孔半徑 a 為大之遠距離處，將為可忽計者。

取在半徑 b 同心圓內板之部分， b 較 a 為一大值。半徑 b 處應力與無孔板實際相同，其算式應為

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=b} &= S \cos^2 \theta = 1/2 S (1 + \cos 2\theta) \\ (\tau_{r\theta})_{r=b} &= -1/2 S \sin 2\theta \end{aligned} \quad (a)$$

(註 1) 此處所用解釋見 I. N. Goodier, *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.*, pp. 129-133, 1938. 定理係 V. Volterra 所得，見 *Ann. Ecole. Norm. (Paris)*, Ser. 3, vol. 24, pp. 401-517, 1907. 另閱 A. E. H. Love, "Mathematical Theory of Elasticity," 4 th. ed. p. 221, Cambridge University Press, New York; A. Timpe, *Z. Math. Physik*, *loc. cit.*

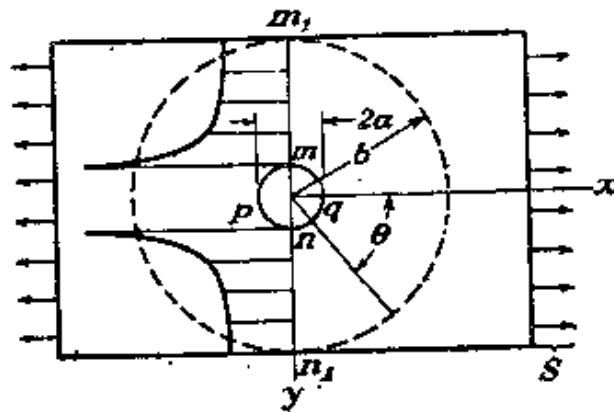


圖 49

此等應力，作用於內外半徑為 $r=a$ 及 $r=b$ 環之外部表面上，所造成環內之應力分布可視為含兩個部分。第一部分為由正交應力常數部分 $S/2$ 所造成者。環內應力可由 (44) 式計算。其餘部分為由正交正力 $1/2 S \cos 2\theta$ 連同剪力 $-1/2 S \sin 2\theta$ 所造成。後一部分環內應力可由應力函數

$$\phi = f(r) \cos 2\theta \quad (b)$$

求得。代此應力函數於配合條件

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

得以下常微分方程式以求 $f(r)$ ：

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0$$

通解為

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D$$

故應力函數為

$$\phi = \left(Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D \right) \cos 2\theta \quad (c)$$

對應之應力分量，由方程式 (38)，為

$$\sigma_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = - \left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (d)$$

各積分常數由環外表面條件 (a) 及孔邊無外力作用條件求得。此等條件為

$$2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} = -\frac{1}{2}S$$

$$2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} = 0$$

$$2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} = -\frac{1}{2}S$$

$$2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} = 0$$

解此等聯立方程式，取 $a/b=0$ ，亦即設板為無限大，得

$$A = -\frac{S}{4} \quad B = 0 \quad C = -\frac{a^4}{4}S \quad D = \frac{a^2}{2}S$$

將此等常數值代入 (d) 式並與均勻拉力 $1/2S$ 所造成之各應力分量相加 (44式)，得 (註1)

$$\sigma_r = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (61)$$

(註1) 此解係 G. Kirsch 所得：閱 VDI, vol. 42, 1898. 此經應變度量及偏光彈性法多次驗正。

位移 u , v (剛體平移除外), 用 (48) 至 (51) 式可由此求得。此留為讀者練習 (見第150頁習題6)。其中無斷續存在。

如 r 為一大值, σ_r 及 $\tau_{r\theta}$ 均趨於 (a) 式。在孔邊上, $r=a$, 吾人得

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad \sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta$$

由此知當 $\theta = \pi/2$ 或 $\theta = 3\pi/2$ 時, 亦即在垂直與拉力方向直徑 mn 兩端處 σ_θ 為最大 (圖49)。在此等點上, $(\sigma_\theta)_{\max} = 3S$ 。此為最大應力並為施於板上均勻拉力之三倍。

在 p 及 q 兩點上, θ 等於 π 及零, 故

$$\sigma_\theta = -S$$

故在此等點上有壓應力存在。

經圓孔中心與 x 向垂直之板斷面上, $\theta = \pi/2$, 由 (61) 式,

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad \sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right)$$

顯然孔之效應為局部性者。當 r 增值時, 應力 σ_θ 迅即趨於 S 。圖49示此應力之分布。孔口附近應力之局部性使 (e) 解導自無限大平板, 可以應用於有限寬度平板中。如板之寬度不小於孔之四個直徑, 用 (61) 解計算 $(\sigma_\theta)_{\max}$ 不超過百分之六 (註)。

已知受單向拉或壓之 (d) 解, 對兩垂直方向受拉或壓之解可由重疊獲得。例如, 取兩垂直方向受等拉 S 之例, 知在圓孔邊界上拉應力為 $\sigma_\theta = 2S$ (閱第32節)。施拉力 S 於 x 向及壓力 $-S$ 於 y 向 (圖50), 吾人得純剪情況。孔口上切向應力, 由 (61) 式, 為

$$\sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta - [S - 2S \cos(2\theta - \pi)]$$

當 $\theta = \pi/2$ 或 $\theta = 3\pi/2$, 即 n 及 m 點處, 得 $\sigma_\theta = 4S$ 。當 $\theta = \pi/2$ 或

(註) 閱 S Timoshenko, *Bull. Polytech. Inst., Kiev, 1907*. 比須取 S 為荷力除以板斷面大面積。

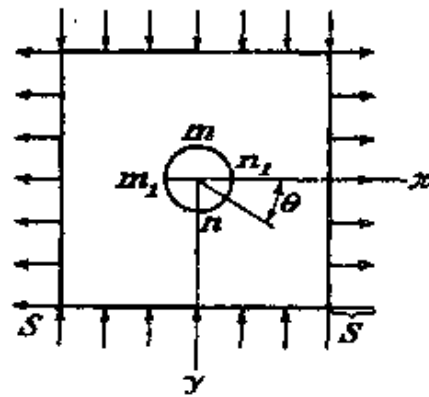


圖 50

$\theta = \pi$ ，即 m_1 及 m_1 處， $\sigma_\theta = -4S$ 。因此，一大平板在純剪狀態時，孔口上切向應力 σ_θ 為 4 倍於所施純剪應力。

孔口處高應力集中具極大之實際重要性。舉一例，設船舶甲板上有一孔口存在。當船身受撓曲作用時，造成甲板受拉或受壓情況，洞口上將產生高應力集中。由波浪所造成之應力循環，超應力部分金屬疲勞最後可發生疲勞破裂（註 1）。

對孔口處應力集中常需要設法降低，如機翼及機身通口等處，此可由外加圓緣（註 2）或加勁環（註 3）達成。問題之分析解已由對圓孔方法加以引申求得，結果曾與應變儀量得之數據比較（註 4）。

（註 1）閱 Thein Wah (ed.) "A Guide for the Analysis of Ship Structures", Office of Technical Services, U. S. Dept. of Commerce, Washington, D. C. 1960, 內緒論，及文獻。

（註 2）閱 S. Timoshenko, *J. Franklin Inst.*, vol. 197, p. 505, 1924; 另 S. Timoshenko, "Strength of Materials", 3d. ed., vol. 2, p. 305, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1956.

（註 3）S. Levy, A. E. McPherson, & F. C. Smith, *J. Appl. Mech.*, vol. 15, p. 160, 1948. 早期參考資料見本文中，1955 年前參考資料見 J. N. Goodier & P. G. Hodge, "Elasticity & Plasticity", 1958, 11.

（註 4）*hoc. cit.*

受拉力半無限平板接近於直邊處有一圓孔 (圖51) 問題曾由傑弗雷氏 (G. B. Jeffery) 予以分析 (註1)。較後曾由明德林氏 (R. D. Mindlin) (註2) 修正其結果並與偏光彈性試驗比較 (閱第五章)。孔口上應力，在最近於邊緣之 n 點處，當 mn 與 np 較為一小值時，為未受干擾時拉應力之極大倍數 (註3)。

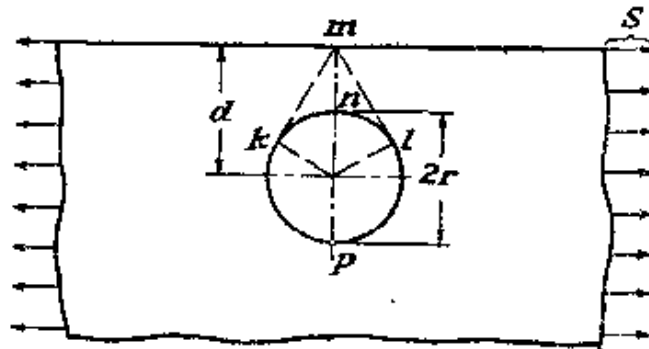


圖 51

傑弗雷亦曾研究均勻壓力 p_i 作用於孔邊界之問題。此為第 72 頁所述偏心孔問題之特例。如孔口距直線邊緣距離極大時，由方程式(45)為

$$\sigma_{\theta} = p_i \quad \sigma_r = -p_i$$

如孔口接近直邊，切向應力沿孔口邊界不再為常數，最大切向應力係在 k 及 l 處，其算式為

(註1) *Proc. Soc. Exptl. Stress Anal.*, vol. 5, p. 56, 1948.

(註2) 另參閱 W. T. Koiter, *Quart. Appl. Math.*, vol. 15, p. 303, 1957.

(註3) *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 229, p. 49, 1930

對圓形及其他形孔口解及計算大量參考資料可追蹤“應用力學評論”(Applied Mechanics Reviews)，以下各書應參考：R. E. Peterson, “Stress Concentration Factors in Design,” New York, 1953; J. N. Goodier and P. G. Hodge, “Elasticity and Plasticity,” New York, 1958; G. N. Savin, “Stress Concentration around Holes,” New York, 1961. (譯自俄文1951版)

$$(\sigma_{\theta})_{\max} = p_i \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2} \quad (62)$$

此應力應與板直邊上 m 點之拉應力相較，其值為

$$\sigma_{\theta} = \frac{4p_i r^2}{d^2 - r^2} \quad (63)$$

當 $d = r\sqrt{3}$ 時，兩算式結果相同，如 d 大於此值，最大應力在圓周邊界上，於為較小時，最大應力在 m 點上。

有限寬度平板對稱軸上有一圓孔時（圖52）曾由賀藍（第96頁註3）氏（R. C. J. Howland）討論之，彼所得結果為當 $2r = 1/2d$ 時， $\sigma_{\theta} = 4.3S$ 在 n 處及

$$\sigma_{\theta} = 0.75S$$

在 m 點處。

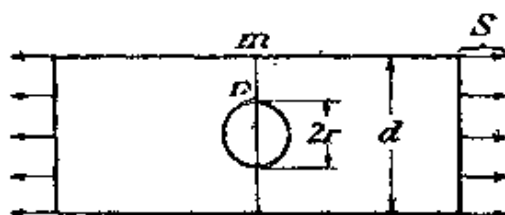


圖 52

本節中對圓孔附近應力分析方法亦可用於平板受純撓曲問題中（第96頁註3），若干受拉力及撓曲之特例均已算出（註），此包括帶

（註）Z. Tuzi, *Phil. Mag.*, February, 1930, p. 210; also *Sci. Papers Inst. Phys. Chem. Res. (Tokyo)*, vol. 95, 1928. 對應之橢圓孔問題較早解出 K. Wolf, *Z. Tech. Physik*, 1922, p. 160. 帶中圓孔解見 C. J. Howland and A. C. Stevenson, *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 232, p. 155, 1933. 級數解收斂證明見 R. C. Knight, *Quart. J. Math., Oxford Series*, vol. 5, p. 255, 1934.

條及半無限平板 (第97頁註) 內一孔及一系列孔 (註1-3) 圓形排列之孔口 (第96頁註3) 及帶條上半圓槽溝。

亨司特 (Hengst) 所創立之方法曾用於兩向受等拉力正方平板上 (註4) , 及剪刀作用下 (註5) , 孔口為常式或加勁。

無限平板內有一圓孔外力施於圓孔邊界上 (註6) , 帶條之對應問題 (註7) , 一排圓孔平行接近於半無限平板之直邊 (註8) 各解均已獲得。

如在拉力 S 作用下無限平板內有一橢圓孔 , 主軸之一平行於拉力 , 垂直於拉力之主軸兩末端上應力為

$$\sigma = S \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (64)$$

內 $2a$ 為垂直於拉力橢圓之主軸 , $2b$ 為另一主軸 , 此與其他有關橢圓問題、雙曲線問題及兩圓問題均將於第六章討論 , 參考資料亦見該處。

(註1.) K. J. Schulz, *Proc. Nederl. Akad. van Wetenschappen*, vol. 45 pp 233, 341, 457, and 524, 1942, vol. 48, pp. 282 and 292, 1945.

(註2) 林致平 Chih-Bing Ling, "Collected Papers in Elasticity and Mathematics," Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan China, 1963.

(註3) M. Isida, *Bull. Japan. Soc. Mech. Engr.*, vol. 3, pp. 259-266 1960. M. Isida and S. Tagami, *Proc. 9th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, pp. 51-54, 1959. M. Isida. 其他若干有關論文均載此等刊物內。

(註4) H. Hengst, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 18, p. 44, 1938.

(註5) C. K. Wang, *J. Appl. Mech.*, vol. 13, p. A-77, 1946.

(註6) W. G. Bickley, *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 227, p. 383, 1928.

(註7) R. C. Knight, *Phil. Mag.*, ser. 7, vol. 19, p. 517, 1935.

(註8) C. B. Ling and M. C. Hsu, *Bur. Aeron. Res. Tech. Rept. 16*, Chengtu, China, February, 1945. See also n. 4, p. 95.

一細長孔 (a/b 爲大值) 垂直於拉力方向造成極高之應力集中 (註1), 此解釋橫向於施力裂縫趨向增長之原因。裂縫兩端鑽孔後可使裂縫增長停止, 因可消除高應力集中之尖銳曲率。

當一孔口用剛性或與平板不同彈性物質填滿時, 吾人得剛性或彈性填塞問題。圓形 (註2) 及橢圓形 (註3) 填塞均已解出。剛性填塞結果會由偏光彈性方法驗正 (註4)。

圖49所示問題 (61) 式解對平面應變時與平面應力相同。但在平面應變時, 軸向應力

$$\sigma_z = \nu(\sigma_y + \sigma_\theta)$$

必須作用於平板末端, 平行於 xy 面, 作 ϵ_z 爲零, 在末端處清除此應力, 以達成自由末端條件, 將引進其他應力非爲二維 (平面應力或應變) 性質。如孔口直徑較兩端間厚度爲小值, 干擾將僅限於兩頭附近。但如孔口直徑與度爲同階值時, 問題必須視爲三維者。對此種問題探討結果 (註5) 表示 σ_θ 保持爲最大應力分量, 其值與由二維理論所得者極爲接近。

(註1) 窄溝問題見 M. Sadowsky, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 10, p. 77, 1930.

(註2) K. Sezawa and G. Nishimura, *Rept. Aeron. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ.*, vol. 6, no. 25, 1931; J. N. Goodier, *Trans. ASME*, vol. 55, p. 39, 1933.

(註3) L. H. Donnell, "Theodore von Kármán Anniversary Volume," p. 293, Pasadena, 1941.

(註4) W. E. Thibodeau and L. A. Wood, *J. Res. Nat. Bur. Std.*, vol. 20, p. 393, 1938.

(註5) A. E. Green, *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 193, p. 229, 1948; E. Sternberg & M. Sadowsky, *J. Appl. Mech.*, vol. 16, p. 27, 1949.

第三十六節 直邊界上一點之集中力

設在一無限大平板水平直邊 AB 上 (圖53a) 有一集中力 P 作用。沿板厚荷力為均勻分布者，如圖 53b 所示。取厚度為一單位，故 P 為每單位厚度荷力。

應力分布視作用於完整封閉邊界上之力而定，例如 $ABmn$ ，而不僅視 AB 上情況。即令 $ABmn$ 移至無窮遠處亦係如此。

有一基本解 (註 1) 稱為簡單徑向分布。任一距荷力作用點 r 之單元 C 上係受徑向簡壓，應力分量為

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (65)$$

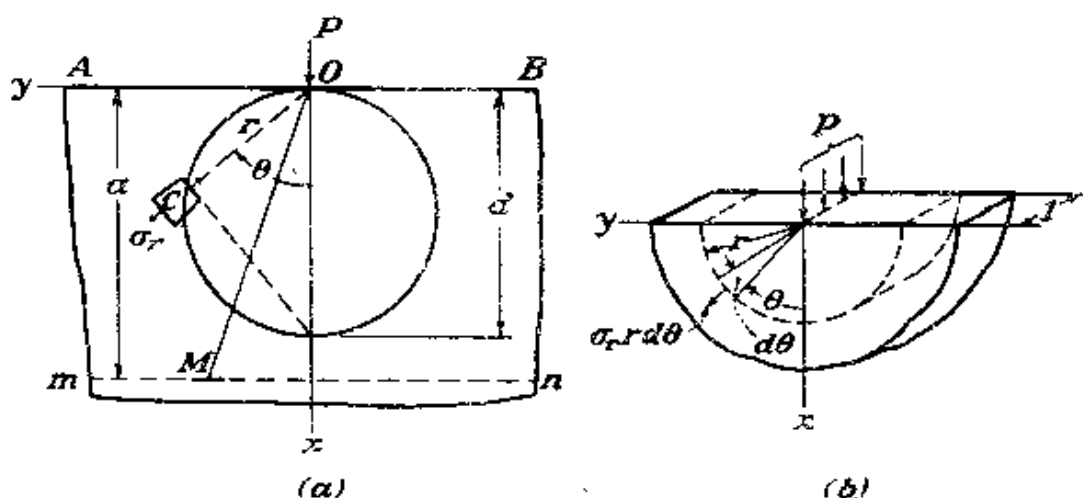


圖 53

切向應力 σ_θ 及剪應力 $\tau_{r\theta}$ 為零。此等應力分量極易驗證適應平衡方程式 (37)。

(註 1) 此問題係 Flamant 氏根據 J. Boussinesq 三維問題解 (見第 417 頁) 求得，見 *Compt. Rend.*, vol. 114, p. 1465, 1892, Paris. 將解引伸於斜向力係 Boussinesq 完成，見 *Compt. Rend.*, vol. 114, p. 1510, 1892. 另參考 J. H. Michell 論文，*Proc. London Math. Soc.*, vol. 32, p. 35, 1900. 實驗研究見 Carus Wilson, *Phil. Mag.*, vol. 32, p. 481, 1891.

AB 上邊界條亦全適應因 σ_θ 及 $\tau_{r\theta}$ 沿直邊 AB 爲零，除 P 作用點外（ $r=0$ ）此邊上無外力作用。此處 σ_r 變爲無窮大。作用於半徑 r 圓軸面上（圖 53b）力之總和必須與 P 均衡。此總和可由對每一單元 $r d\theta$ 豎向分量 $\sigma_r r dr d\theta$ 積分求得。如此可得

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r r \cos \theta d\theta = -\frac{4P}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = -P$$

爲證（65）式爲問題正確解必須考慮配合條件（39）。上解係導自應力函數

$$\phi = -\frac{P}{\pi} r\theta \sin \theta$$

由（38）式得：

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (65')$$

此與（65）解相符。代函數 ϕ 於（39），知此式亦可適應。

在其餘邊界上此解需固定形式力之分布，例如，在半徑 R 半圓上，所需力爲（65）式所規定者，內 $r=R$ 。

取任何 d 直徑之圓，圓心在 x 軸上，在 O 點處切於 y 軸（圖 53a），如此則圓上任一點 C ， $d \cos \theta = r$ 。因此，由（65）式

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}$$

亦即，所有此圓上各點應力值皆相同，但荷力作用點除外。

取一對板直邊距離爲 a 之水平面 mn ，在此面任一點上 M （圖53a）應力之正交及剪分量由徑向管壓算出

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \cos^4 \theta$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos^3 \theta$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \sin \theta \cos^3 \theta \quad (66)$$

圖 (54) 示沿水平面 mn 上應力 σ_x 及 τ_{xy} 分布情況

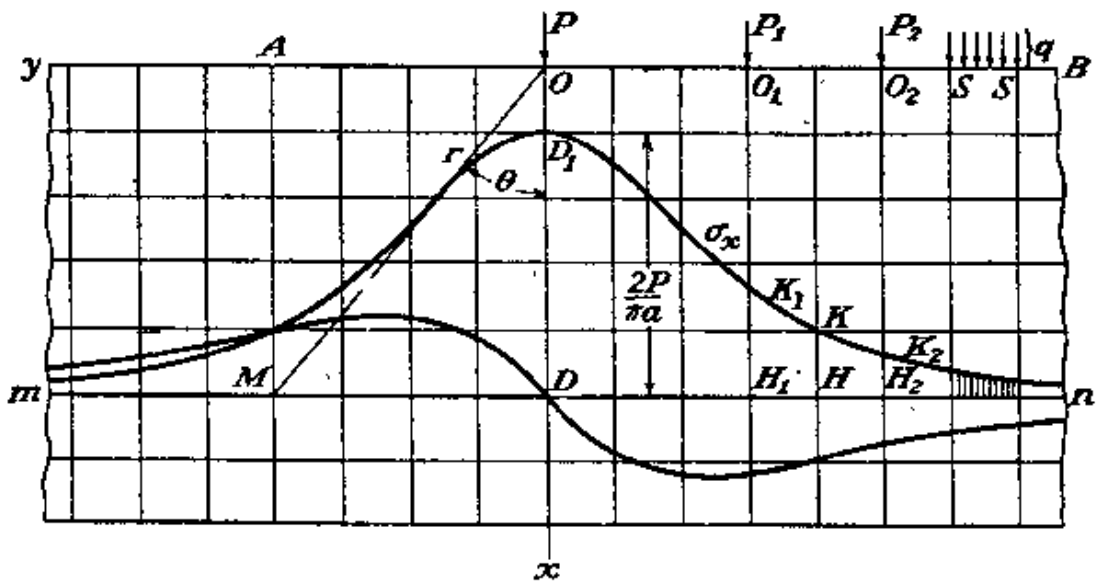


圖 54

在荷力作用點處，應力在理論上為無窮大，此因有限力作用於無窮小面積上。事實為荷力將分布於有限但寬度甚小面積上。即使如此，塑性區域可設想由一小半徑圓柱面割出，如圖 53b 所示。彈性方程式即可應用於板其餘部分。

對水平力 P 施於半無限板 (圖55) 可得一類比解。此例之應力分量可自同一方程式 (65') 求得；僅須自荷力方向起量角 θ ，如圖所示，計算作用於一圓柱面上力之總和，用圖55所示虛線，得

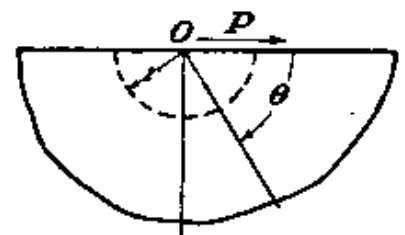


圖 55

$$-\frac{2P}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = -P$$

此合力與外 P 均衡，因應力分量 $\tau_{r\theta}$ 及 σ_θ 在直邊上為零，(65') 解適應邊界條件。

已知橫向及豎向集中兩各解後，由重疊法可求任何斜向力之解。將斜向力 P 分解為兩分量， $P \cos \alpha$ 及 $P \sin \alpha$ (圖56)，任一點 C 上徑向應力為〔由 (65') 式〕

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2}{\pi r} \left[P \cos \alpha \cos \theta + P \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] \\ &= -\frac{2P}{\pi r} \cos(\alpha + \theta) \end{aligned} \quad (67)$$

故 (65') 式可用於任何方向之集中力，僅須自力線起量角 θ 。

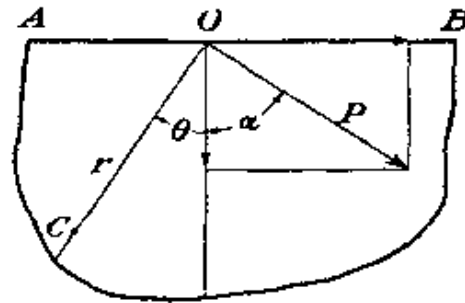


圖 56

當一力偶作用於無限平板直邊上時 (圖 57a) 應力函數 a 仍可應用。在 O_1 處拉力 P ，對原點距離 a ，其應力函數可自 (a) 式求得，暫視 a 為 (x, y) 之函數，對 P_1 言，用 $y+a$ 代 y ， $-P$ 代 P 。將此與原函數組合，即得等值反向施於 O 及 O_1 兩力之應用函數，其形式為

$$-\phi(xy+a) + \phi(xy) \quad (a)$$

當 a 值極小時，此式趨於

$$\phi_1 = -a \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (b)$$

代 (a) 於 (b) 式，並知 (見第67頁)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

故得

$$\phi_1 = \frac{Pa}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta) = \frac{M}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta) \quad (68)$$

內 M 爲所施力偶之力矩。

以相同推論，對 ϕ_1 微分，可得應力函數 ϕ_2 ，代表兩等值反向力偶作用於 O 及 O_1 (圖 57 *b*) 兩短距離點上之應力函數。因此得

$$\phi_1 = \phi_2 - \left(\phi_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} a \right) = -a \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{2Ma}{\pi r} \cos^2 \theta \quad (69)$$

如力偶轉向改變時，僅須改變函數 (69) 之符號

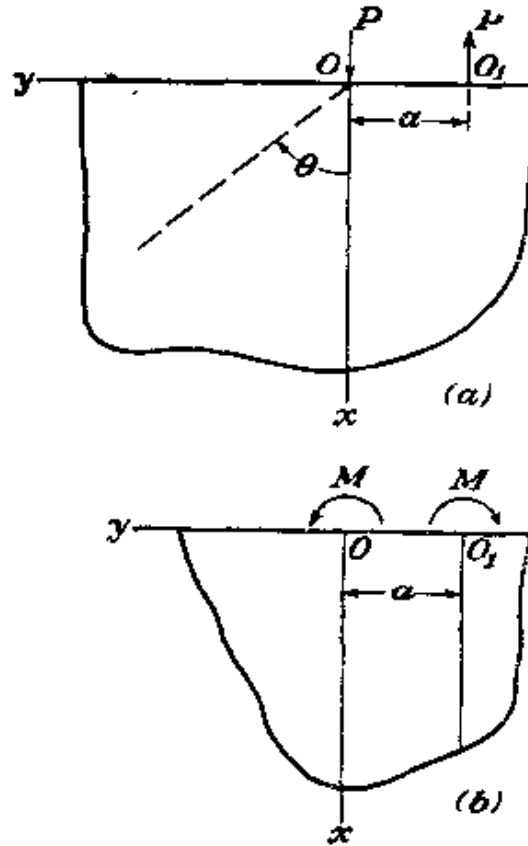


圖 57

由連續微分所得之函數組曾用於解半無限平板受平行於直邊拉力下因半圓缺口所造成之應力集中 (註)。最大拉力略大於缺口遠處不受干擾拉應力三倍。

(註) F. G. Maunsell, *Phil. Mag.*, vol. 21, p. 765, 1936.

兩邊均有一缺口之板條亦曾被討論（註）。應力集中因數（最大值與最小斷面平均應力值比）低於三，當缺口加大時趨於一。

已知應力分布後，對應之位移可由（48）至（50）式以通常所用方法求得。對一垂直於直邊之力（圖53），

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = \nu \frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r} \\ r r_\theta &= r \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0\end{aligned}\quad (c)$$

對第一式積分，得

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r + f(\theta) \quad (d)$$

內 $f(\theta)$ 為僅含 θ 之函數。代於（c）第二式積分得

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad (e)$$

內 $F(r)$ 為僅含 r 之函數。代（d）及（e）於（c）第三式知

$$f(\theta) = -\frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta \quad F(r) = Cr \quad (f)$$

內 A ， B ，及 C 為積分常數，其值由拘束條件決定。位移之算式，由

（註）拉力及撓曲理論及偏光彈性實驗，會由 M. Isida 集各家結論加以比較，見 *Sci. Fac. Eng., Takushima Univ., Japan*, vol. 4, no. 1, pp. 67-69, January, 1953. 此中包括 M. M. Frocht, R. Guernsey, Jr. 及 D. Landsberg, *J. Appl. Mech.*, vol. 19, p. 124, 1952; 林治平, *J. Appl. Mech.*, pp. 141-146, 及 vol. 14, pp. 275-280, 1947; H. Neuber, "Kerbspannungslehre", pp. 35-37, 1937. 或 pp. 42-44, Springer-Verlag, OHG, Berlin, 1958 (2nd. ed.) 另參考 H. Poritsky, H. D. Snively, 及 C. R. Wylie, *J. Appl. Mech.*, vol. 6, p. 63, 1939.

(d) 及 (e) , 爲

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta$$

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cos \theta \\ + \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \sin \theta + A \cos \theta - B \sin \theta + Cr \quad (g)$$

設半無限板之拘束條件爲在 x 軸上各點無側向位移 (圖53) 。如此則 $\theta=0$ 時 $v=0$, 由 (g) 第二式得 $A=0$, $C=0$ 。用此等積分常數值 , x 軸上各點豎向位移爲

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{2P}{\pi E} \log r + B \quad (h)$$

爲求常數 D 設 x 軸上距原點 d 處一點無豎向移動。如此由 (h) 式得

$$B = \frac{2P}{\pi E} \log d$$

所有積分常數均爲已知後 , 半無限板內任一點之位移可由 (g) 式求出。

舉一例 , 試求直邊上各點之位移。水平位移可將 $\theta = \pm \pi/2$ 代入 (g) 第一式。吾人得故

$$(u)_{\theta=\pi/2} = -\frac{(1-\nu)P}{2E} \quad (u)_{\theta=-\pi/2} = -\frac{(1-\nu)P}{2E} \quad (70)$$

故原點兩方直邊上每一點上均有同一常數位移 , 趨向於原點。吾人可視此一位移具物理可能性 , 因已設荷力點附近材料 , 即圖 53b 小半徑圓柱面內所包圍者業經移去 , 而僅在此小範圍內彈性方程式不能應用。事實上 , 當然 , 此部分材料經受塑性變形 , 故可許沿直邊發生位移 (70) 。直邊上豎向位移可由 (g) 第二式算出。因位移沿增值 θ 方向視爲正 , 變形對稱於 x 軸 , 知距原點 r 處向下位移爲

$$(v)_{\theta=-\pi/2} = -(v)_{\theta=\pi/2} = \frac{2P}{\pi E} \log \frac{d}{r} - \frac{(1+\nu)P}{\pi E} \quad (71)$$

在原點處此位移為無窮大，為免出此項困難，必須如前假設原點附近在小半徑圓柱面內材料經已割離。對直邊上其他各點，(71)式得有限位移。

第三十七節 直邊上一般荷力

上節中 σ_x 及 τ_{xy} 兩曲線可視為影響線 (圖54)。設此等曲線代表 P 等於單位值所造成應力。如此則對其他值之力 P ，在 mn 面任一點 H 上應力將為 \overline{HK} 與 P 之乘積。

如若干豎向力 P, P_1, P_2, \dots ，作用於半無限平板直線邊界 AB 上，水平面 mn 上應力可由每一力所造成應力疊加求得。對其中每一個力，可將原作用於 O 點 P 所生之 σ_x 及 τ_{xy} 曲線移動對應於新原點 O_1, O_2, \dots 由此知，例如，由 P_1 對 mn 平面上 D 點所生之應力 σ_x 為 $\overline{H_1K_1}$ 與 P_1 之乘積。同理由 P_2 在 D 處所生應力為 $\overline{H_2K_2} \cdot P_2$ ，等等。因此，在 mn 面 D 點上由 P, P_1, P_2, \dots ，所造成之總正交應力為

$$\sigma_x = \overline{DD_1} \cdot P + \overline{H_1K_1} \cdot P_1 + \overline{H_2K_2} \cdot P_2 + \dots$$

由此知圖54所示之 σ_x 曲線為 D 點上正交應力 σ_x 之影響線。同理知 τ_{xy} 曲線為 mn 平面上 D 點之剪應力影響線。

繪製此等曲線後，對 AB 邊上任何豎向荷力對 D 點處所生之應力分量即可極易算出。如在直邊 \overline{SS} 部分有均勻荷力密度為 q (圖54)，由此荷力所生 D 點上正交應力可由 q 與虛線部分之影響面相乘求得。

均勻分布荷力問題可由另一方式求解。設應力函數為

$$\phi = Ar^2\theta \quad (a)$$

內 A 為一常數。對應應力分量為

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 2A\theta$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 2A\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -A \quad (b)$$

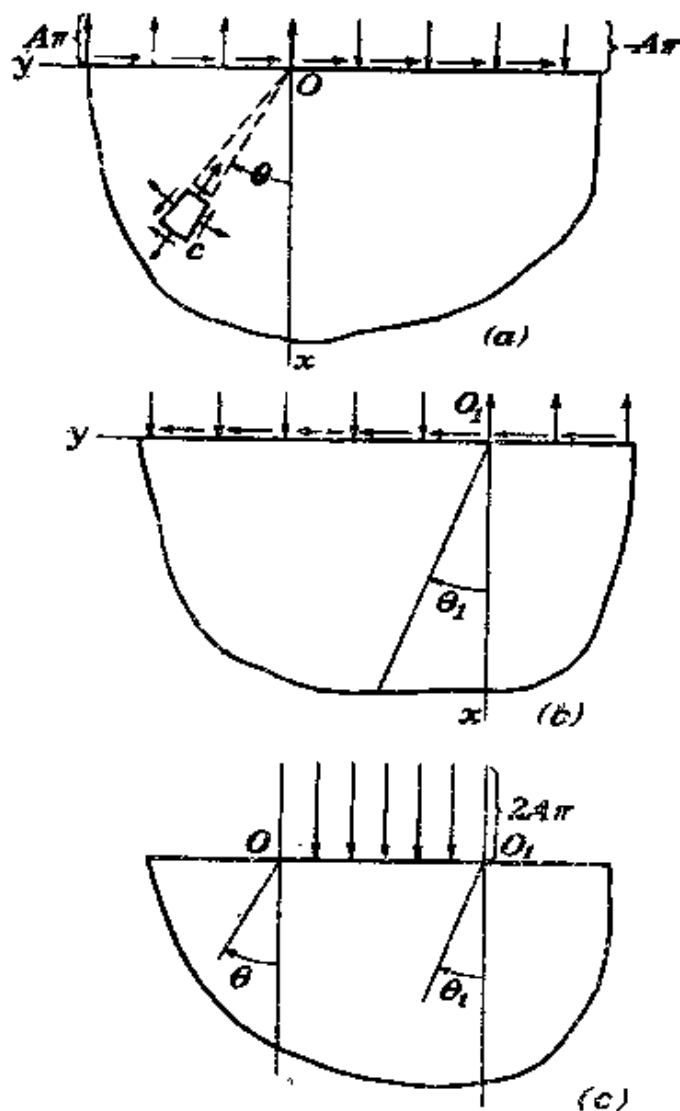


圖 58

用於半無限平面中，所得對應荷力分布為圖 58a 所示。在板直線邊界上一均勻分布剪力密度為 $-A$ 及一在原點改變符號之均勻分布密度為 $A\pi$ 之正交力作用。

將原點移至 O_1 並更換應力函數符號，得圖 58b 所示之荷力分布。重疊此兩種荷力情況 (圖 58a 及 b)，吾人得半無限平板直邊上一部

分受均勻荷力如圖 58c 所示。爲求此均勻荷力密度，取

$$2A\pi = q \quad A = \frac{1}{2\pi}q$$

平板上任一點應力可由以下應力函數求得 (註 1)。

$$\phi = A(r^2\theta - r_1^2\theta_1) = \frac{q}{2\pi}(r^2\theta - r_1^2\theta_1) \quad (c)$$

由 (b) 式知應力函數 (c) 內第一項代表，在平板任一點 M 上 (圖 59a)，平板內各向均勻拉應力 $2A\theta$ 及一純剪 $-A$ 。應力函數第二項代表均勻壓應力， $-2A\theta_1$ 及一純剪 A 。均勻拉應力與均勻壓應力可直接相加，得以下均勻壓應力

$$p = -2A\theta - 2A\theta_1 = -2A(\theta + \theta_1) = -2A\alpha \quad (d)$$

內 α 爲半徑 r 及 r_1 間角，

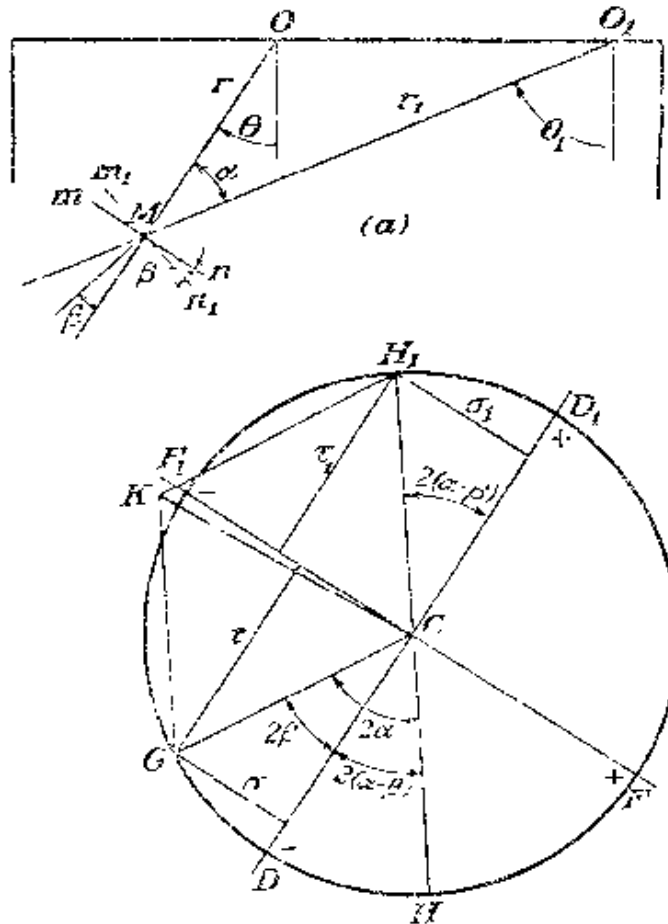


圖 59

(註 1) 此解係 J. H. Michell 所得，見 *Proc. London Math. Soc.*, vol. 34, p. 134, 1902.

為重疊此兩種純剪，一對應於 r 方向另一對應於 r_1 ，吾人用馬氏圓 (圖 59b)，其半徑為純剪 A 之數值。取兩個直徑， DD_1 平行於 r 及 FF_1 垂直於 r ，為 r 及 σ 軸，即得一對應於 r 向純剪之代表形式。半徑 CF 及 CF_1 代表主應力 A 及 $-A$ ，在 M 點處與 r 成 $\pi/4$ 角，對應於此純剪，半徑 CD 代表垂直於 r 之 mn 平面上剪應力 $-A$ 。對任一與 mn 面 (圖 59a) 成斜角 β 之平面 m_1n_1 ，應力分量為圓上 G 點之 σ 及 τ 坐標，角 $GCD=2\beta$ 。

同一圓亦可用於求沿 r_1 向由純剪所造成之應力分量 (見第 19 頁)。仍取平面 m_1n_1 ，並注意此面上法線與 r_1 方向成 $\alpha-\beta$ 角 (圖 59a)，故應力分量為圓上 H 點坐標所代表。為使對應於 r_1 方向純剪為適當符號，必須更改應力分量之符號，如此得圓上 H_1 點，平面 m_1n_1 上總應力為向量 CK ，其分量為正交應力 $-(\sigma+\sigma_1)$ 及剪應力 $\tau_1-\tau$ 。對所有 β 值向量 CK 為同大小，因分量長度， CH_1 及 CG ，及其間夾角， $\pi-2\alpha$ ，與 β 無關 (閱第 20 頁)。

當 $\tau_1=\tau=0$ ，角 β 決定 M 處主應力之方向。由圖知如

$$2\beta=2(\alpha-\beta)$$

τ 及 τ_1 數值相等，故 $\beta=\alpha/2$ 。因此主應力方向平分半徑 r 與 r_1 間夾角。故主應力值為

$$\pm 2\sigma = \pm 2A \sin 2\beta = \pm 2A \sin \alpha \quad (e)$$

將此與均勻壓力 (d) 合併，任一點 M 上主應力總值為

$$-2A(\alpha + \sin \alpha) \quad -2A(\alpha - \sin \alpha) \quad (f)$$

沿經 O 及 O_1 任一圓，角 α 保持為常數，故主應力 (f) 亦為常數。在邊界上，在 O 及 O_1 兩點間 (圖 59a)，角 α 等於 π ，由 (f) 知，兩主應力均等於 $-2\pi A = -q$ 。邊界其餘部分 $\alpha=0$ ，兩主應力均為零。

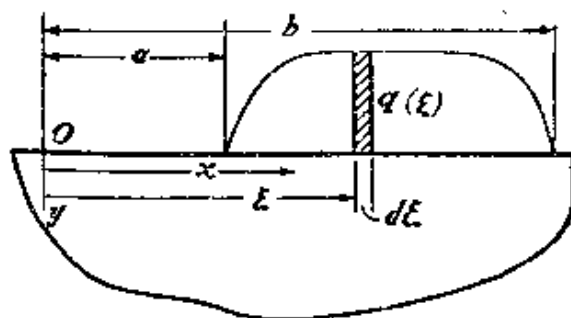


圖 60

因此如一任意荷力分布(圖60)視為大量不同密度荷力作用於邊界短單元上，此一荷力單元下(如圖60所示)水平應力 σ_x 完全係該單元所造成，而

$$\sigma_x = \sigma_y = -q \tag{g}$$

沿邊界全長，

半無限板沿直邊上若干其他分布力情況曾由卡魯茲 (S. D. Carothers) 氏予以討論(註1)。此間另一解法待後討論(見第146頁)。

對應於(b)式應力分量之位移可用第31節之方式對 u 及 v 直接積分求得，不計剛體項，結果為

$$u = \frac{2A}{E}(1-\nu)r\theta \quad v = -\frac{4A}{E}r \log r \tag{h}$$

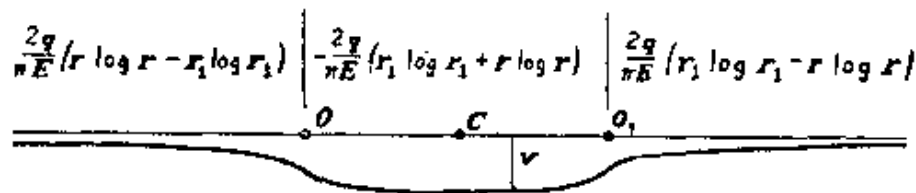


圖 61

用此等值於(c)式所代表之重疊中，吾人可得原在板水平直邊上任何點向下位移算式。由 v 之定義與其自身 $r\theta$ 系統關係，為 θ 增量方向之位移。為求圖58c直邊下向位移，對 O 右方任一點取 v ，對左方任一點取 $-v$ 。以 O_1 為據系統所提供者，相當於(c)式內之一 $-r_1^2\theta_1$ 項，在 O_1 處作類似之符號更換。圖58c平面應力之向下位移如圖61所示。圖61中各算式使中點及無窮遠處斜率為零。在 O 及 O_1 處，斜率為無界，可視為異點(與第153頁習題18比較)。

在邊緣中點 C 處，設 $OO_1 = 2a$ ，位移為

$$v_c = -\frac{2q}{\pi E}(2a \log a) \tag{i}$$

如吾人視此荷力為非均勻分布之荷力單元(圖60)，寬度 $2a$ 變

(註1) 見 *Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 97, p. 110, 1920.

爲無窮小。因對 $a \rightarrow 0$ 時 $a \log a$ 之極限值爲零，知如此計算任何荷力單元下位移時，此單元本身所提供者可予忽計。由他處荷力單元所造成之位移（見圖60），對邊 $y=0$ 上任何點，爲

$$v(x) = -\frac{2}{\pi E} \int_{\xi=a}^{\xi=b} q(\xi) \log |x-\xi| d\xi \quad (j)$$

符號 $|x-\xi|$ 代表 ξ 處荷力單元及 x 處觀察點之距離。另可加剛體位移項目。

被積分函數在 $x=\xi$ 處爲異性，即在 x 點上有荷力單元時如此。但吾人已知此單元不生位移，故此積分取爲庫希主值。

方程式 (j) 亦可用於求荷力分布密度 q ，其在直邊上所生位移爲已知。例如，設沿直邊上荷力部分位移爲常數（圖62），可證示沿此部分壓力分布爲（註1）

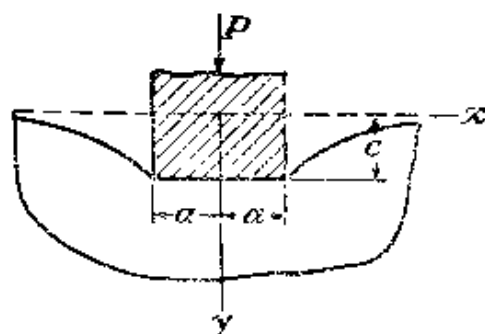


圖 62

(註1) M. Sadowsky, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 8, p. 107, 1928. 對接觸點非均勻位移見(1) N. I. Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity," (translated by J. R. M. Radok), Erven P. Noordhoff, NV, Groningen, Netherlands, 1963. (2) L. A. Galin "Contact Problems in the Theory of Elasticity," translated by H. Moss, I. N. Sneddon (ed.), Departments of Mathematical and Engineering Research, North Carolina State College, Raleigh, N. C., 1961 對局部銳角圓化效應見 J. Goodier & C. B. Loutzeheiser, *J. Appl. Mech.*, vol. 32, pp. 462-463, 1965.

$$q = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$$

第三十八節 力作用於楔之一端

第36節中所討論之徑向應力分布亦可用以代表集中力作用於頂端上楔內應力。取一對稱例，如圖63所示。垂直於 xy 面楔之厚設為一單位。沿 $\theta = \pm\alpha$ 兩面上，邊界條件可取以下應力分量予以適應

$$\sigma_r = -\frac{kP \cos \theta}{r} \quad \sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (\text{a})$$

常數 k 將調整使適應 O 點處平衡條件。作用於虛線柱面上壓力和等於 $-P$ ，故得

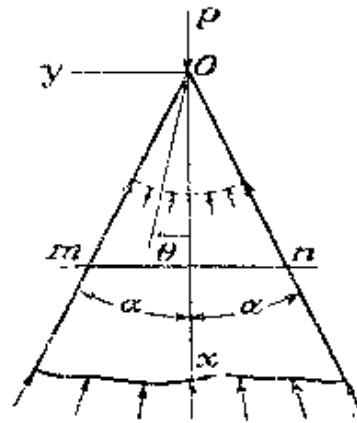


圖 63

$$-2 \int_0^\alpha \frac{kP \cos^2 \theta}{r} r d\theta = -kP \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = -P$$

因此

$$k = \frac{1}{\alpha + 1/2 \sin 2\alpha}$$

由 (a) 式 (註1)，知

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha)} \quad (72)$$

(註1) 此解係 Michell 所得，*loc. cit.* 另參閱 A. Mesnager, *Ann. Ponts. Chaussées*, 1901.

取 $\alpha = \pi/2$ 即得前所討論半無限平板解 (65)。在任一斷面 mn 上正交應力分布非均勻者，在 m 或 n 處正交應力與斷面中點處最大應力比例為 $\cos^2 \alpha$ 。

如外力與楔軸線垂直 (圖64)，解 (a) 仍可應用，只須角 θ 由 P 作用線算起。常數因子 k 可由下列平衡條件算出

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sigma_r r \cos \theta d\theta = -P$$

由此得

$$k = \frac{1}{\alpha - 1/2 \sin 2\alpha}$$

故徑向應力為

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r(\alpha - 1/2 \sin 2\alpha)} \quad (73)$$

任一斷面 mn 上正交及剪應力為

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{P y x \sin^2 \theta}{y^3 (\alpha - 1/2 \sin 2\alpha)} \\ \tau_{xy} &= -\frac{P x^2 \sin^2 \theta}{y^3 (\alpha - 1/2 \sin 2\alpha)} \end{aligned} \quad (b)$$

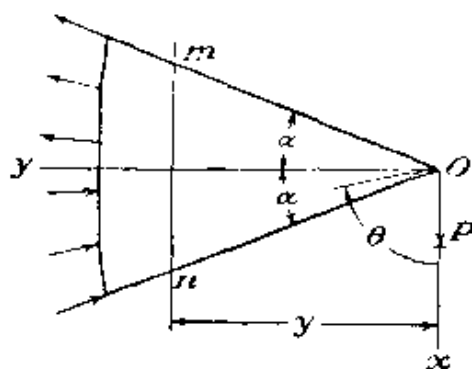


圖 64

如 α 為一小角時，吾人可用

$$2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{(2\alpha)^3}{6}$$

用 I 代表斷面 mm 之慣性矩，(b) 式可寫為

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{P y x}{I} \left[\left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta \right] \\ \tau_{xy} &= -\frac{P x^2}{I} \left[\left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta \right] \end{aligned} \quad (c)$$

對小值之 α 角，因子 $(\tan \alpha / \alpha)^3 \sin^4 \theta$ 可取為接近於一。如此則 σ_y 算式與初等梁公式相同。最大剪應力出現於 m 及 n 點上，其值大於初等理論所得矩形斷面形心處最大剪應力值。

已知圖63及圖64兩種情況解法後，對 xy 平面內任何方向之 P 可分解為分量並用重疊法計算其所生應力(註1)。所應注意者為(72)及(73)解僅當楔支承端上係由此等解所示之徑向力分布支持時方為正確解。否則僅在距支承端遠處以上各解方為正確。

第三十九節 撓矩作用於楔之一端

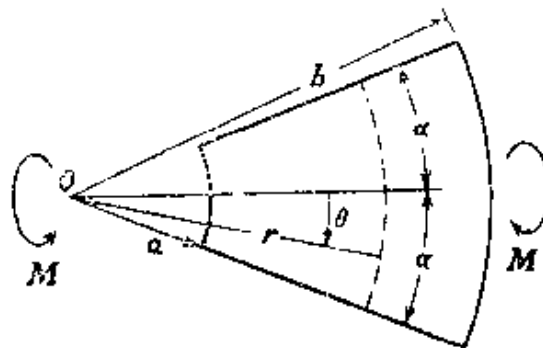


圖 65

應力函數

$$\phi_1 = C_1 \sin 2\theta \quad (a)$$

提供

$$\sigma_r = -4C_1 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta \quad \sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = 2C_1 \frac{1}{r^2} \cos 2\theta \quad (b)$$

(註1) 若干楔中應力分布問題，見 A. Miura, "Spannungskurven in Rechteckigen und Keilförmigen Trägern," Berlin, 1928.

另一應力函數

$$\phi_2 = C_2 \vartheta \quad (c)$$

提供

$$\sigma_r = 0 \quad \sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = \frac{C_2}{r^2} \quad (d)$$

將兩解組合，得

$$\sigma_r = -4C_1 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta \quad \sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} (2C_1 \cos 2\theta + C_2)$$

如取 C_2 為

$$C_2 = -2C_1 \cos 2\alpha$$

則在 $\theta = \pm\alpha$ 兩側面上將無外力作用。如此則應力為

$$\sigma_r = -4C_1 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta \quad \sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = 2C_1 \frac{1}{r^2} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \quad (f)$$

在半徑 r 之圓柱面上 (圖65)，應力 σ_r 和為一非零橫向力。但 $\tau_{r\theta}$ 和亦係如此，而對 (f) 式直接計算知總力為零。總和為一力矩 M ，對單位厚度言，其值為

$$M = \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{r\theta} r^2 d\theta = 2C_1 (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) \quad (g)$$

顯然應力 (f)，在 $r=a$ 及 $r=b$ 內，對應該力偶 M 之撓曲，圖65， C_1 可由 M 及 α 代表如 (g) 式，內半徑 a 值任取小值 (註1)。

算式 (g) 內括弧中之

$$\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha$$

對一楔形言不能為零。對 $0 < 2\alpha < 2\pi$ 僅當 $2\pi = 257.4^\circ$ 時其值消失，但此時區域幾變為三象限之環 (圖66)。力偶 M 變為零， ϕ_1 及 ϕ_2 所提供

(註1) 此解為 S. D. Carother 所得，*Pro. Soc. Edinburgh*, sect. A, vol. 23, pp. 292-306, 1912. 另 C. E. Inglis 亦得此解，*Trans. Inst. Nav. Arch. London*, vol. 64, p. 253, 1922.



圖 66

者等值反向，兩弧面 $r=a$ 及 $r=b$ 上荷力為自行平衡者。

當 $2\alpha > 257.4^\circ$ 時力偶 M 又不為零，(g) 式決定 C_1 值，但此時在 $r=a$ 上另有其他方式荷力，保持一力偶 M ，使應力對 r 之降低慢 (註1) 於 (f) 式所示之 r^{-2} 。事實上 2α 大於 180° 時即係如此。(f) 式之應用，連同 (g)，限於小角楔形，其時在 $r=a$ 及 $r=b$ 上變更荷力效應可局部化。

第四十節 集中力作用於梁

集中力作用下梁內應力分布問題具極大實用興趣，前曾證示 (第 23 節)，窄矩形斷面梁在連續荷力下，通常初等撓曲理論所得之應力分布相當正確，但在集中力作用點附近對應力分布必有嚴重之局部干擾，故對此問題進一步探討成為必須，對此等局部應力首先係由威爾遜氏 (Carus Wilson) 予以實驗研究 (註2)。彼以矩距斷面玻璃梁兩端支承加力於中點如圖 67 所示，用偏極光 (見第 156 頁) 證示應力分布接近於正交集中力於半無限板所造成之應力分布情況，沿斷面 AD，正交應力並非線性，在 D 點上拉應力小於初等梁理論所得結果。此等結論曾由史塔克氏 (註3) (G. G. Stokes) 根據經驗式假設

(註1) E. Sternberg & W. T. Koiter, *J. Appl. Mech.*, vol. 25, pp. 575-581, 1958.

(註2) *Loc. cit.*

(註3) Wilson, *loc. cit.* 另參閱 G. G. Stokes, "Mathematical and Physical Papers," vol. 5, p. 238.

予以解釋。圖67所示系統圖可由圖68兩系統重疊求得之，作用於半無限板 mn ， np ，及 pq 各面上徑向壓應力 (圖68a) 由在 n 及 p 處支承矩形梁邊上徑向拉應力予以對銷 (圖 68b)。此梁之應力須疊於半無限板應力上以達史塔克所討論之問題。

計算此梁應力時，採用初等梁理論公式，梁中點斷面 AD 處撓矩為取反作用 $P/2$ 之力矩減去作用於半梁徑向拉力之力矩。此徑向拉應力分布靜力相當於柱面 abc 上象限 ab 內之壓力分布 (圖68c)，或用 (65) 式，相當於一水平力 P/π 及一豎向力 $P/2$ ，作用於 A 點，如此

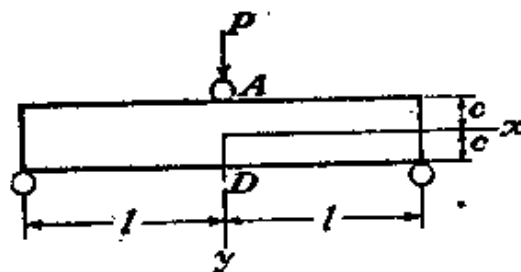


圖 67

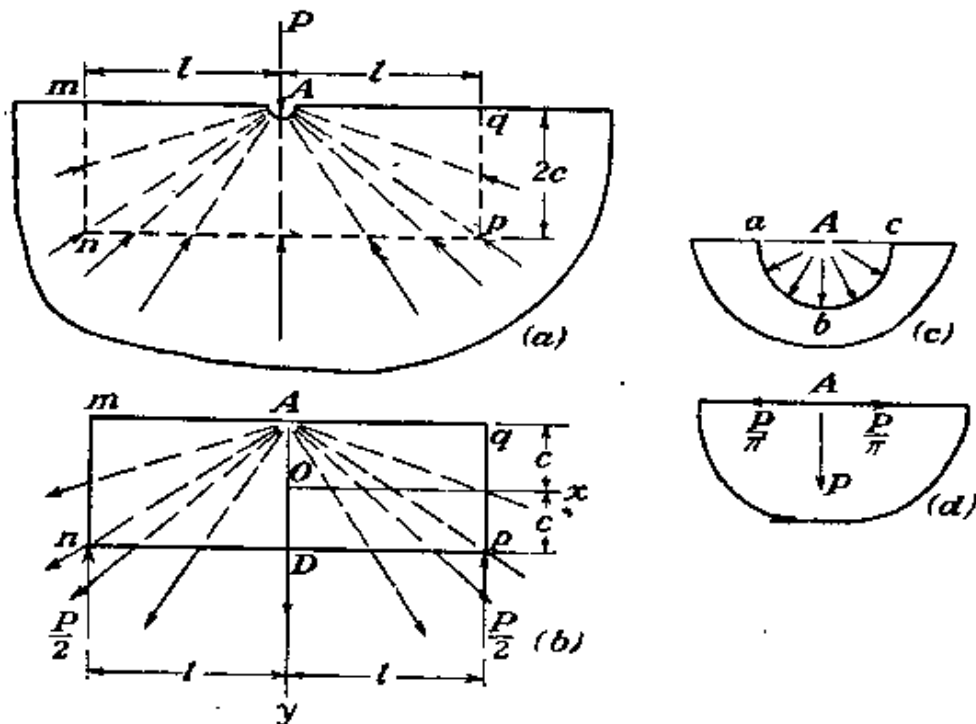


圖 68

則撓矩，亦即對 O 點之力矩，為

$$\frac{P}{2}l - \frac{P}{\pi}c$$

對應之撓曲應力為（註1）

$$\sigma_x' = \frac{P}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y = \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y$$

對此撓曲應力應另加由水平力 P/π 造成之均勻分布拉應力。斷面 AD 上正交應力，因此為

$$\sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c}$$

此與史塔克所得公式相符，在某些適當限制條件下此項公式之可靠性可由近代偏光彈性技術予以驗證（註2）。

較佳之接近值可考慮底面上連續分布力（圖 68b）並用（36'）式求得，在 D 點處此荷力密度，由（65）式知為 $P/\pi c$ 。將此值代入（36'）式並與上式 σ_x 值合併，得第二次接近值，

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3y}{10c} \right) \\ \sigma_y &= \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \end{aligned} \quad (a)$$

另需加半無限板應力

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi(c+y)} \quad (b)$$

（註1）取 P 為單位厚度荷力。

（註2）M. M. Frocht, "Photoelasticity", vol. 2, pp. 104-107, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948; C. Saad & A. W. Hendry, *Proc. Soc. Exptl. Stress Anal.*, vol. 18, pp. 192-198, 1961. 對短梁因衝擊造成應力，閱 A. A. Betser and M. M. Frocht, *J. Appl.*, vol. 24, pp. 509-514, 1957.

以求上 AD 之總應力。

與以下一較精確解 (參閱第 123 頁表) 比較, 證示除在梁底面 D 點外, (a) 及 (b) 式所得應力均相當精確, 該處對初等梁公式之修正量為

$$-\frac{3P}{2\pi c} + \frac{P}{2\pi c} + \frac{1}{5} \frac{P}{\pi c} = -0.254 \frac{P}{c}$$

而較佳解則僅為 $-0.133(P/c)$ 。

此問題之三角級數解曾由費倫氏 (L. N. G. Filon) 氏求得 (註 1), 彼將解法用於集中力問題並計算若干特殊情況 (閱第 24 節), 其結果較晚近研究結果甚合。

藍姆氏 (H. Lamb) (註 2) 曾再推進一步, 彼取無限長梁, 荷相等集中力作用於等距離向上向下相間並得若干撓曲線。結果證示初等奧伊拉-柏奴利理論當梁高與長度較為小值時極為正確。另證示藍琴及哥拉司赫夫 (Rakine & Grashof) 所用對初等理論之剪力修正 (閱第 47 頁) 略嫌誇大, 應降低至其值之 0.75 (註 3)。

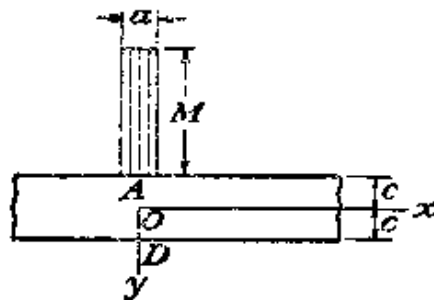


圖 69

在集中力作用點附近應力分布及曲率曾由卡門及西瓦得 (T. V. Kármán

(註 1) L. N. G. Filon, *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 201, p. 63, 1903.

(註 2) *Atti. IV Congr. Intern. Mat.*, vol. 3, p. 12, Rome, 1909.

(註 3) Filon 在其論文中 (*loc. cit.*) 得同一結論。

及 F. Seewald) 作較詳盡之研究 (註 1)。卡門取無限長梁並應用半無限板受兩等值反向力偶作用於兩鄰近點解 (圖 57b)。沿梁底面由此程序所引進應力可由一三角級數解 (見第 24 節) 予以消除。對一無限長梁, 級數將由傅立葉積分代表之。如此卡門得以下應力函數

$$\phi = \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cdot \cosh \alpha y - \sinh \alpha c \sinh \alpha y \cdot \alpha y}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cos \alpha x d\alpha$$

$$- \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha c \sinh \alpha c + \cosh \alpha c) \cdot \sinh \alpha y - \cosh \alpha c \cosh \alpha y \cdot \alpha y}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cos \alpha x d\alpha \quad (e)$$

撓矩圖為一窄矩形時 (圖 69), 此函數提供梁內應力分布。對梁頂面上受最普遍形式之豎向荷力時 (註 2), 對應撓矩圖可分為若干矩形單元如圖 69 所示之一, 其對應之應力函數可由沿梁長積分 (c) 式求得。

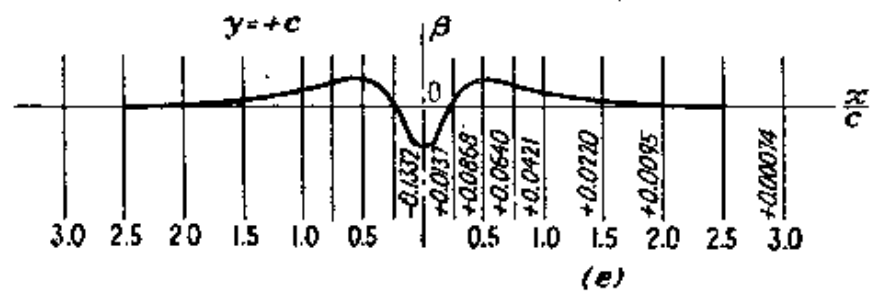
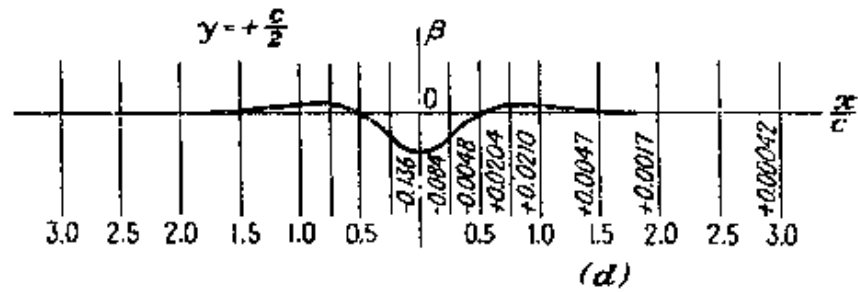
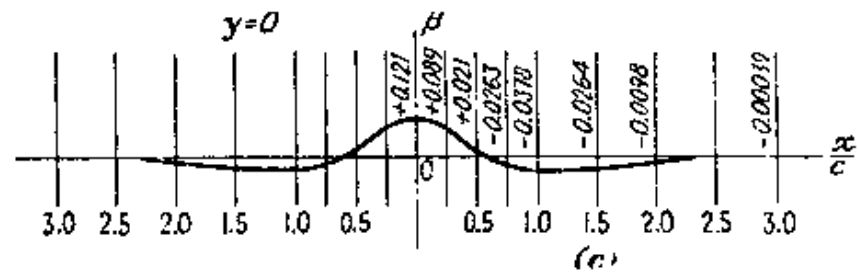
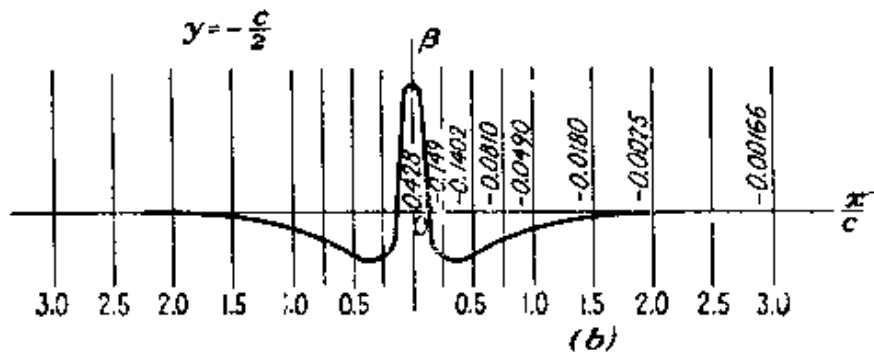
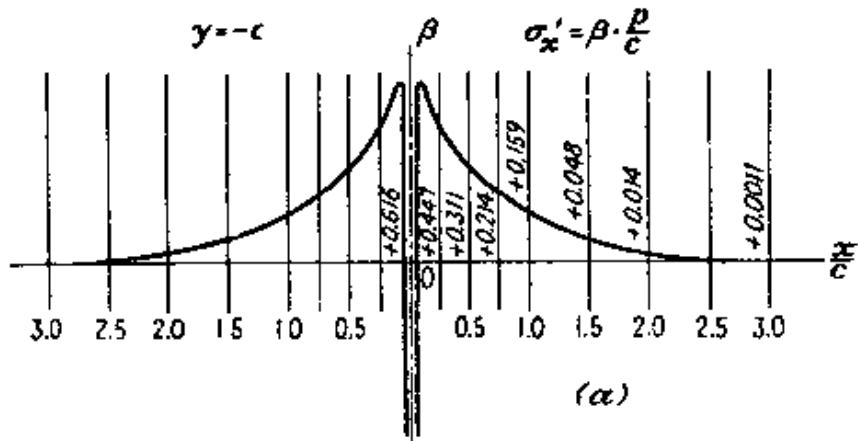
此方法由西瓦得用於解受一集中力 P 之梁 (圖 67)。彼證示 σ_x 可分為兩部: 一為可由初等梁公式計算者; 另一部分為近於著力點之局部效應。前一部分, 稱為 σ_x' , 可以 $\beta(P/c)$ 形式表之, β 為一數字因數, 視所計算應力點之位置而定。此因數值見圖 70。其他兩應力分量 σ_y 及 τ_{xy} 亦可用 $\beta(P/c)$ 代表之。對應之 β 值見圖 71 及 72。由各圖知局部應力對著力點而離增加時迅速降低, 當距離等於梁高時通常可以忽計。用 $x=0$ 處因數 β 值, 斷面 AB (圖 67) 上五點之局部應力列於下表。為比較計 (註 3) 由 (a) 及 (b) 式 (見第 119 頁) 所得局部應力亦算出。此等方程式所得局部應力足夠正確。

已知應力後, 梁之曲率及撓度計算即無困難。此等計算證示撓曲線之曲率亦可分為兩部分——一為初等梁理論所提供者, 另為集中力 P 之局部效應。此額外之中線曲率可由下式代表

(註 1) *Abhandl. Aerodynam. Inst., Tech. Hochschule, Aachen, vol. 7, 1927.*

(註 2) 集中荷力施於梁頂底兩面中間例由 R. C. J. Howland 予以討論, 見 *Proc. Roy. Soc. (London), vol. 124, p. 89, 1929.* 梁內若干成對力見 K. Girkmann, *Ingenieur-Arch.*, vol. 13, p. 273, 1943. *I* 梁中腹板內縱向集中力問題, 見 Girkmann, *Oesterr. Ingenieur-Arch.*, vol. 1, p. 420, 1946.

(註 3) 即必須重疊於通常梁公式之應力。



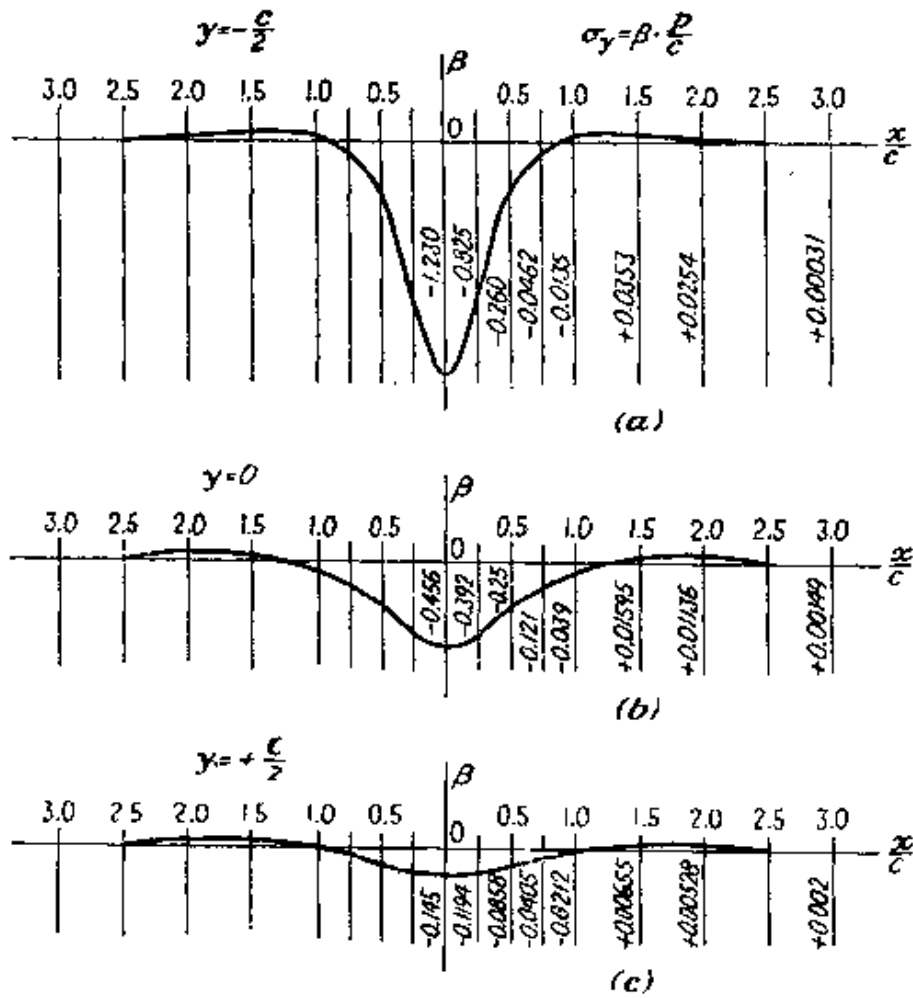


圖 71

$$\frac{1}{r} = d \frac{P}{EC^2} \tag{d}$$

內 α 為一數值因子沿梁長變更其值。圖73中示若干此因子值。由此圖知距中點大於梁高一半處斷面增加曲率即可忽計。

$y =$	$-c$	$-\frac{c}{2}$	0	$\frac{c}{2}$	c
正確解					
$\sigma_x' =$	0.428	0.121	-0.136	-0.133
$\sigma_y =$	∞	-1.23	-0.456	-0.145	0
近似解					
$\sigma_x' =$	0.573	0.426	0.159	-0.108	-0.254
$\sigma_y =$	∞	-1.22	-0.477	-0.155	0

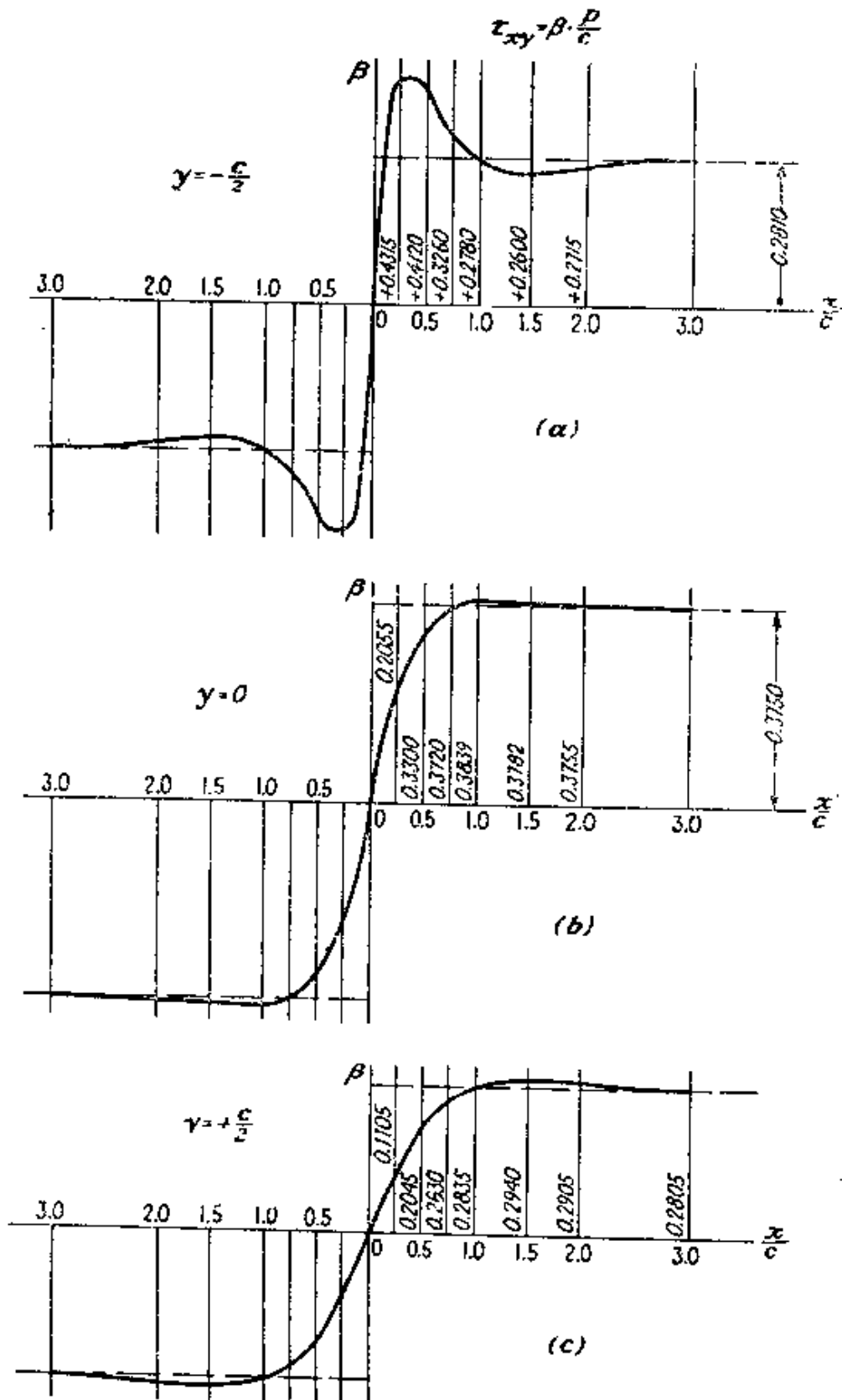


圖 72

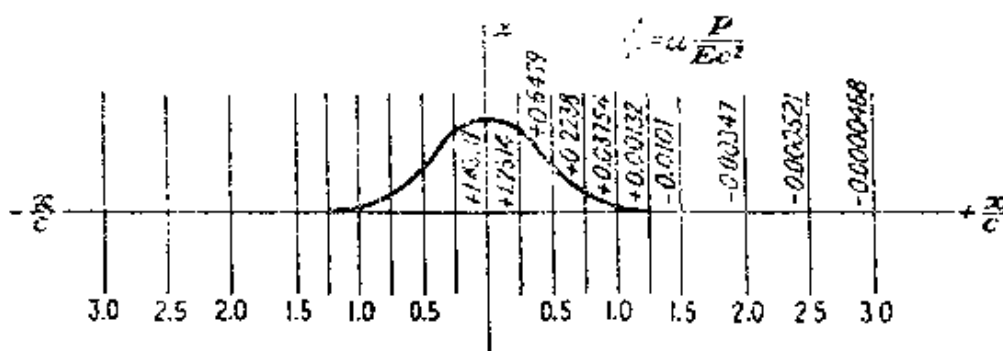


圖 73

因此種局部自率效應，兩枝撓曲線 AB 及 AC (圖74)，可視為遇於一角等於

$$\gamma = \frac{P}{c} \left(\frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) \quad (e)$$

中點處對應撓度為

$$\delta_1 = \frac{\gamma l}{4} = \frac{Pl}{4c} \left(\frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) \quad (f)$$

自此撓度中另一小修正量 δ_2 ，相當於在 A 點處消除銳角，必須減去。此量亦係西瓦得所計算等於

$$\delta_2 = 0.21 \frac{P}{E}$$

現用 δ_0 代表由初等理論所得之撓度，荷力下之總撓度為

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 - \delta_2 = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Pl}{4c} \left(\frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) - 0.21 \frac{P}{E} \quad (74)$$

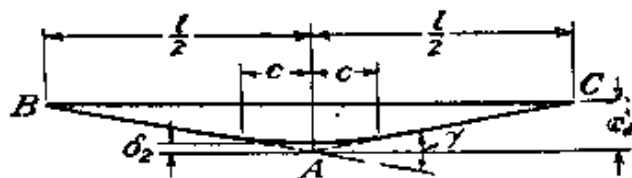


圖 74

取 $\nu = 0.3$ ，此值為

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} \left[1 + 2.85 \left(\frac{2c}{l} \right)^2 - 0.84 \left(\frac{2c}{l} \right)^3 \right] \quad (74')$$

初等藍琴-哥拉司赫夫 (閱第47頁) 理論對此例為

$$\delta = \frac{P l^3}{48 EI} \left[1 + 3.09 \left(\frac{2c}{l} \right)^2 \right] \quad (g)$$

故(g)式對剪力修正量有一較誇大值。此等公式中均未計及支承處之局部變形。

第四十一節 圓盤內之應力

設由兩等值反向力 P 作用於直徑 AB (圖75) 之筒例開始。設每一力均造成徑向簡壓[(65)式]，吾人可尋求維持此種應力分布盤周界上所需荷力。在周界任何一點 M 上，沿 r 及 r_1 方向壓應力為 $(2P/\pi)(\cos\theta/r)$ 及 $(2P/\pi)(\cos\theta_1/r_1)$ 。因 r 及 r_1 互相垂直且

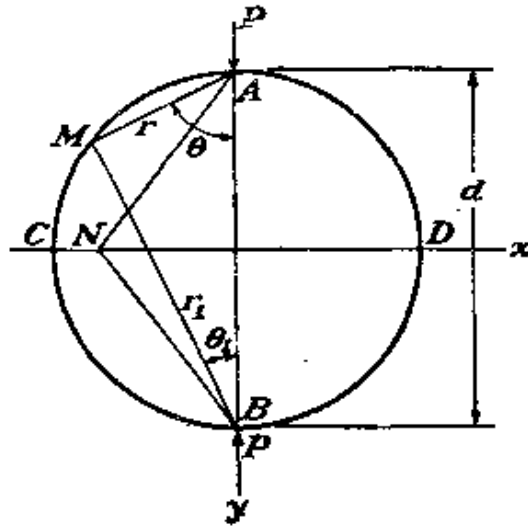


圖 75

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{\cos \theta_1}{r_1} = \frac{1}{d} \quad (a)$$

內 d 為盤之直徑，故 M 點上兩主應力為兩等值壓應力 $2P/\pi d$ 。因此經 M 點垂直於盤面任一平面上均有同一壓應力作用。故沿盤周界上應有常值單位壓力 $2P/\pi d$ 分布以維持所設之一對徑向簡壓應力分布。

如盤周界上無外力作用，任一點上應力因此可在盤平面中重疊一均勻拉應力 $2P/\pi d$ 於上述之一對徑向壓力分布上求得。設考慮經盤 N 點水平面上應力。由對稱關係知此面上無剪應力存在，由兩相等徑向壓力所造成正交應力為

$$-2\left(\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}\right) \cos^2 \theta$$

內 r 為 AN 距離， θ 為 AN 及豎向直徑間夾角。重疊一均勻拉應力 $2P/\pi d$ ，水平面 N 點上總正交應力為

$$\sigma_y = -\frac{4P}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{r} + \frac{2P}{\pi d}$$

用算式

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4x^2}}$$

得

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi d} \left[1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x^2)^2} \right] \quad (b)$$

沿直徑 CD 上最大壓應力係在盤中心處，其值為

$$\sigma_y = -\frac{6P}{\pi d}$$

在直徑兩端處壓應力 σ_y 為零。

現取兩等值反向力作用於一弦線 AB 上 (圖76)。仍設由 A 及 B 兩點輻射之徑向壓力分布，作用於在 M 點與周界相切平面上應力可重疊作用於 r 及 r_1 方向兩徑向壓力 $(2P/\pi)(\cos \theta/r)$ 及 $(2P/\pi)(\cos \theta_1/r_1)$ 求得。在 M 點處切線之法線 MN 為盤之直徑；因此 MAN 與 MBN 為直角三角形，而法線 MO 與 r 及 r_1 間角為 $\pi/2 - \theta_1$ 及 $\pi/2 - \theta$ ，在 M 處邊界單元上正交及剪應力為

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) - \frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\cos \theta \sin^2 \theta_1}{r} + \frac{\cos \theta_1 \sin^2 \theta}{r_1} \right) \\ \tau &= -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\cos \theta}{r} \cos \theta_1 \sin \theta_1 - \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin \theta \cos \theta \right) \quad (c) \end{aligned}$$

由三角形 MAN 及 MBN 知

$$r = d \sin \theta_1 \quad r_1 = d \sin \theta$$

代於 (c) 式可將其簡化爲

$$\sigma = -\frac{2P}{\pi d} \sin(\theta + \theta_1) \quad \tau = 0 \quad (d)$$

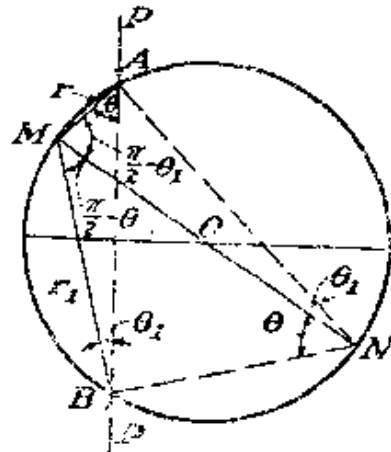


圖 76

由圖 76 知 $\sin(\theta + \theta_1)$ 沿邊界上保持爲常數。因此密度 $2P/\pi d \sin(\theta + \theta_1)$ 均勻分布壓力須加於邊界上以維持假設之徑向應力分布。爲求盤邊界上無均勻壓力問題解僅需於上述兩徑向分布重疊一均勻拉力 $2P/\pi d \sin(\theta + \theta_1)$ 即可。

盤中應力分布問題對任何平衡系統之力作用於盤邊界上時亦可解出(註 1)。設系統中之一力，作用於 A 點沿弦 AB (圖 77)。仍設爲簡單徑向應力分布，在 M 處有一簡徑向壓應力值爲 $(2P/\pi) \cos \theta_1 / r_1$ 沿 AM 之方向，設取極坐標原點於盤中心 O 處， θ 如圖中所示量法，在 M 處切於邊界單元上作用之正及剪應力分量

(註 1) 本節中各問題係 H. Hertz 所解，見 *Z. Math. Physik*, vol. 28, 1883, 或 "Gesammelte Werke", vol. 1, p. 283; 另見 J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 32, p. 44, 1900, 及 vol. 34, p. 134, 1901. 圖 75 圓盤之對應矩形問題見 J. N. Goodier, *Trans. ASME*, vol. 54, p. 173, 1932. 含荷力分布於邊界一小段之效應。

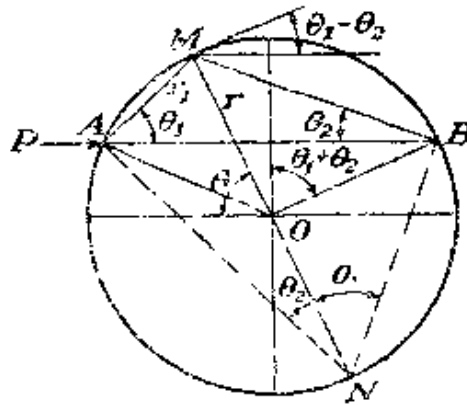


圖 77

即易於算出，如吾人察覺單元法線 MO 與壓力方向 r_1 間角為 $\pi/2 - \theta_2$ 。故

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin^2 \theta_2 \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (e)$$

由三角形 AMN 知， $r_1 = d \sin \theta_2$ ，(e) 式可寫為

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{\pi d} \sin (\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \sin (\theta_2 - \theta_1) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{\pi d} \cos (\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \cos (\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (f)$$

此作用切於邊界上 M 點處單元上應力可由單元上以下三應力重疊求得

1. 沿邊界上均勻分布之正交應力：

$$-\frac{P}{\pi d} \sin (\theta_1 + \theta_2) \quad (g)$$

2. 沿邊界上均勻分布之剪應力：

$$-\frac{P}{\pi d} \cos (\theta_1 + \theta_2) \quad (h)$$

3. 正交及剪應力為

$$-\frac{P}{\pi d} \sin (\theta_2 - \theta_1) \quad -\frac{P}{\pi d} \cos (\theta_2 - \theta_1) \quad (k)$$

之應力。

因 P 力與 M 處切線間夾角為 $\theta_1 - \theta_2$ ，故 (k) 式應力值為 $P/\pi d$ ，方向與 P 之方向相反。

130 彈性力學理論 (全一冊)

現設若干力作用於盤上，每一個均造成一徑向應力分布。如此則施於邊界以維持此一應力系統為：

1. 均勻分布之正交力，密度為

$$-\sum \frac{P}{\pi d} \cos (\theta_1 + \theta_2) \quad (1)$$

2. 剪力，密度為

$$-\sum \frac{P}{\pi d} \cos (\theta_1 + \theta_2) \quad (m)$$

3. (k) 式之向量和。此和須包括所有作用於邊界上之力。

所有外力對 O 點之力矩，由圖 77，為

$$\sum \frac{P \cos (\theta_1 + \theta_2) d}{2}$$

對一平衡系統此力矩必須為零，故剪力 (m) 為零。對應力 (k) 求其合力，與外力向量和成比例，對一平衡系統亦為零。因此僅需對盤之邊界施以均勻壓力 (1) 維持簡徑向分布。如邊界上無均勻壓力，盤中任何一點應力可重疊均勻拉力

$$\sum -\frac{P}{\pi d} \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

於簡徑向分布求待。

用此普遍方法盤內各式應力分布均可易於解出 (註 1)。例如，有一力偶作用於盤邊界上 (圖 78)，而由作用盤中心處力偶與之均衡。設 A 及 B 處有兩徑向應力分布，知此例中 (1) 及 (k) 和為零，僅需剪力 (m) 施於邊界以維持簡徑向應力分布。此剪力密度，由 (m) 式，為

$$-\frac{2P}{\pi d} \cos (\theta_1 + \theta_2) = -\frac{2M_t}{\pi d^2} \quad (n)$$

內 M_t 為力偶之矩值。為使邊界上不受剪力作用，並自邊界上轉移一對 P 力於盤中心，必需重疊圖 78b 所示系統於徑向應力分布上。圖 78b 中純周界剪力，對盤所生應力極易計算。在每一同心圓上

(註 1) 若干有趣例會由 J. H. Michell 提出討論，loc. cit.

$$\tau_{r\theta} 2\pi r^2 = M_t \quad \tau_{r\theta} = \frac{M_t}{2\pi r^2} \quad (p)$$

此應力亦可於 (38) 式取應力函數

$$\phi = -\frac{M_t \theta}{2\pi} \quad (q)$$

求得。由 (q) 式

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = -\frac{M_t}{2\pi r^2}$$

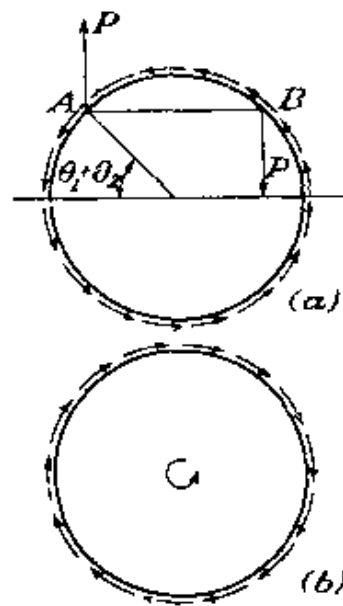


圖 78

第四十二節 力作用於無限平板一點上

如力 P 作用於無限平板中面上 (圖 79a)，應力分布可由以上討論各系統重疊求得。不過吾人不能僅將圖 79b 及 c 所示兩半無限板解重疊以建立一解。雖兩例中豎向位移相同，沿直邊水平方向位移則迥異。圖 79b 中位移係由 O 點向外者，而在圖 79c 中則係趨向 O 點。兩例中位移值，由方程式 (70) 為

$$\frac{1-\nu}{4E} P \quad (a)$$

此水平位移差異可將圖 79b 及 c 與沿直邊受剪應力之圖 79d 及 e 組合

予以消除。由後兩例所造成之位移可由圖46所示曲桿撓曲問題求得。使此桿內半徑趨於零，外半徑無限增大，即達半無限平板例。沿此平板直邊與邊界上剪應力對應之位移為，由(60)式

$$\frac{D\pi}{E} \tag{b}$$

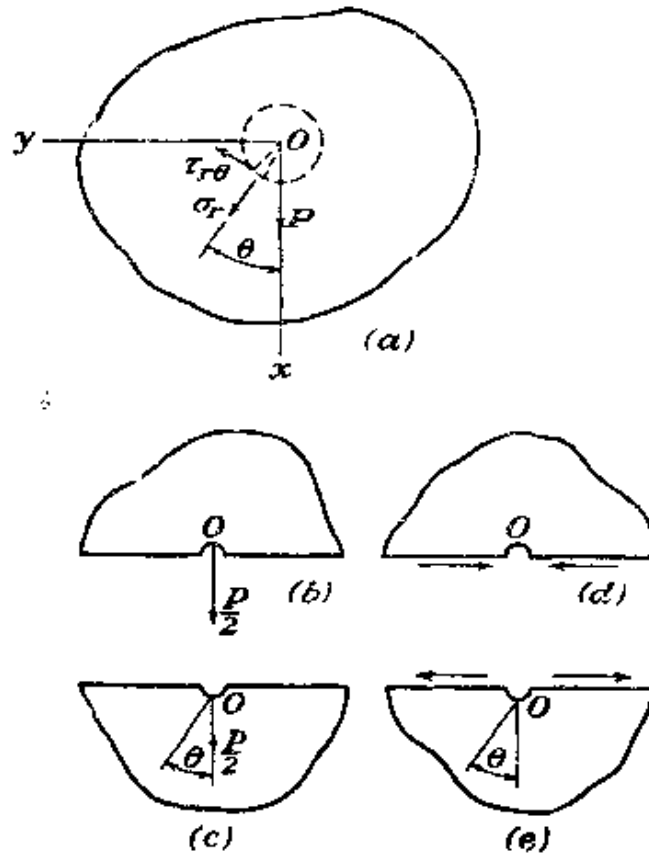


圖 79

積分常數 D 須調整至使 (a) 及 (b) 式所得位移為零。如此則

$$\frac{D\pi}{E} = \frac{1-\nu}{4E} P \quad D = \frac{1-\nu}{4\pi} P \tag{c}$$

經此調整後重疊之圖79b, c, d及e為無限平板荷力於一點，如圖79a所示。

板內應力分布現可重疊半無限平板受荷力 $P/2$ 垂直於其直邊（見第36節）所造成之應力與含積分常數 D 曲桿應力求得。注意圖46及79

對度量 θ 角之差異並用 (59) 式，曲桿內之應力為，以圖 79 所示 θ 計，

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{D \sin \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \sin \theta}{r}\end{aligned}$$

將此與 (65) 式以荷力 $P/2$ 所得應力組合，得無限平板內以下之應力分布：

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} - \frac{P \cos \theta}{\pi r} = -\frac{(3+\nu)}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \sigma_y &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \tau_{xy} &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \sin \theta}{r}\end{aligned}\tag{75}$$

自板中 O 點處 (圖 79a) 割離一半徑 r 柱面內一小單元，並將作用於單元柱面邊界上各力投影於 x 及 y 軸，得

$$\begin{aligned}X &= 2 \int_0^\pi (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = P \\ Y &= 2 \int_0^\pi (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = 0\end{aligned}$$

亦即，作用於柱面單元上各力代表施於 O 點力 P ，用方程式 (13)，各應力分量，用直角坐標，可自 (75) 式求得：

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{P \cos \theta}{4\pi r} [-(3+\nu) + 2(1+\nu) \sin^2 \theta] \\ \sigma_y &= \frac{P \cos \theta}{4\pi r} [1-\nu - 2(1+\nu) \sin^2 \theta] \\ \tau_{xy} &= -\frac{P \sin \theta}{4\pi r} [1-\nu + 2(1+\nu) \cos^2 \theta]\end{aligned}\tag{76}$$

由對一個集中力 (76) 式之解，其他荷力解可由重疊原理求得。例如，取圖80所示之例，兩等值反向力 P 作用於相隔極小距離 d 之 O 及 O_1 兩點上，任一點 M 處應力為在 O 處力所造成之應力疊加另一在 O_1 處力所造成之應力。例如，取在 M 點垂直於 x 軸之單元，以 σ_x 代表由 O 處力所生之正交應力，圖中兩力所生之正交應力為

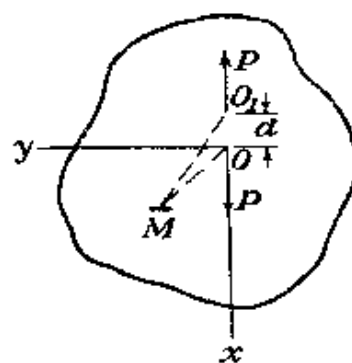


圖 80

$$\sigma_x' = \sigma_x - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d \right) = -d \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -d \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_x}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right)$$

因此圖80中應力分量可由 (76) 式微分求得，如此則

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{dP}{4\pi r^2} [-(3+\nu)\cos^2 \theta + (1-\nu)\sin^2 \theta + 8(1+\nu)\sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\ \sigma_y &= \frac{dP}{4\pi r^2} [(1-\nu)\cos^2 \theta + (1+3\nu)\sin^2 \theta - 8(1+\nu)\sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\ \tau_{xy} &= \frac{dP}{4\pi r^2} [-(6+2\nu) + 8(1+\nu)\sin^2 \theta] \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (77)$$

由以上各式知當 r 增值時，各應力分量值迅速降低，當 r 較 d 為大值時可以忽計。由聖維南原理，兩自成平衡力施於極相似處，此一結果係可預期者 (註1)。

重疊兩個 (77) 式所示應力分布，吾人可得圖81所示問題之解。此例中應力分量為

$$\sigma_x = -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta)$$

(註1) 當鄰近各力不平衡時，類似之應力降低亦可出現。圖 82a 及 (79) 式為一例。閱 E. Sternberg, *Quart. Appl. Math.*, vol. 11, pp. 393-404, 1954, 及該文內所提 R. von Mises 之論文。

$$\sigma_y = 2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} (1-2 \sin^2 \theta)$$

$$\tau_{xy} = -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} \sin 2\theta$$

同一應力分布用極坐標為

$$\sigma_r = -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} \quad \sigma_\theta = 2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (78)$$

此解與解(45)所代表厚壁圓柱受內壓力例相符合，如吾人取柱體外直徑為無限大。

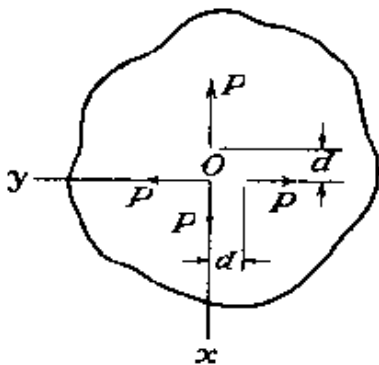


圖 81

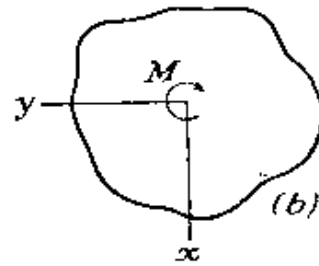
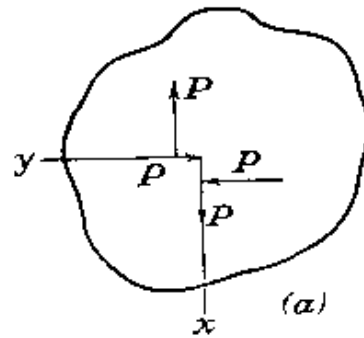


圖 82

以相同方式可得圖 82a 所示例之解，應力分量為 (註 1)

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = -\frac{M}{2\pi r^2} \quad (79)$$

此代表一力偶 M 施於原點所造成之應力 (圖 82b)。

設並非無限板而為無限長條受縱向力 P (圖 83)，吾人可自 (76) 解開始，暫視其為各向無限者。沿此條各邊應力可疊加同值反向系統予以對銷，此修正系

(註 1) A. E. H. Love, "Theory of Elasticity", *op. cit.* p. 214.

統所造成之應力可用24節所述方法予以對銷。賀蘭氏 (C. J. Howland) (註1) 所作之計算證示由集中力所造成之局部應力對集中力作用點距離增加時迅速降低，在距離大於條寬度處，斷面上應力分布實際可視為均勻分布，下表中為若干 σ_x 及 σ_y 值，根據在 $x=+$ 端固定及泊松比為1/4計算者。

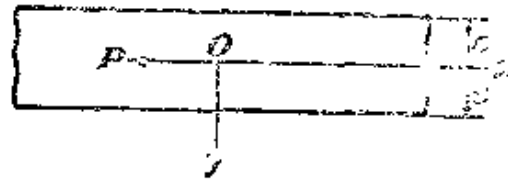


圖 83

	$\frac{x}{c} =$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{18}$	$-\frac{\pi}{30}$	0
$y = 0$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	-0.118	-0.992	∞
$y = c$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	+0.159	+0.511	0.532	0.521	0.500
$y = 0$	$\frac{\sigma_y 2c}{P} =$	0.110	0.364
	$\frac{x}{c} =$	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = 0$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	1.992	1.118	1.002
$y = c$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	0.479	0.468	0.489	0.841	0.973
$y = 0$	$\frac{\sigma_y 2c}{P} =$	-0.364	-0.110	-0.049

米蘭氏 (註2) (E. Melan) 曾對半無限板上集中力施於距邊緣某距離處問題予以論述。

(註1) *Loc. cit.* 另 · E. Melan 論文, *Z. Angew. Math.* vol. 5, p. 314, 1925.

(註2) *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 12, p. 343, 1932. 此論文修正見 L. M. Kurshin, (譯自俄文 P. P. M.) *Appl. Math. Mech.* vol. 23, p. 1403, 1959.

第四十三節 極坐標二維問題廣義解

已討論各式極坐標二維問題特殊解後，現可寫出一較廣泛應力之函數 ϕ 之級數式如 (註 1)

$$\begin{aligned} \phi = & a_0 \log r + c_0 r^2 + c_0' r^2 \log r + d_0 r^2 \theta + a_0' \theta \\ & + \frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta + (b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r \log r) \cos \theta \\ & - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + (d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r \log r) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^{2n} + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2}) \cos n\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^{2n} + d_n r^{n+2} + c_n' r^{-n} + d_n' r^{-n+2}) \sin n\theta \end{aligned} \quad (80)$$

此式第一行前三項代表對稱於坐標原點之應力分布 (見第 28 節)，第四項為圖 58 所示之應力分布，第五項所得解為純剪 (圖 78b)。第二行第一項為荷力沿 $\theta=0$ 之簡徑向應力分布。其餘各項代表一部分圓環受徑向力撓曲解 (圖 46)。第二行所有各項組合代表一力作用於無限板之解 (見第 42 節)。類比之解亦可得自第三行，僅有分別為力之方向更改 $\pi/2$ 角。其他各項 (80) 代表對剪力及正交力與 $\sin n\theta$ 及 $\cos n\theta$ 成比例，作用於環之內外邊界上之解。此種情況之一為小圓孔附近之應力分布 (見第 35 節)。

邊界條件自身對級數 (80) 內所有係數之決定非永為足夠者，對位形對帶之探討有時成爲必需。吾人將取一完整環受正交及剪力作用，其形式爲以下傅立葉級數：

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=a} &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \\ (\sigma_r)_{r=b} &= A_0' + \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n' \sin n\theta \\ (\tau_{r\theta})_{r=a} &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin n\theta \end{aligned}$$

(註 1) 此解係 J. H. Michell 所得，見 *Pro. London Math. Soc.*, vol. 31, p. 100, 1899. 另見 A. Timpe, *Z. Math. Physik*, loc. cit. 純圓環之類比解見 A. Timpe, *Math. Z.*, vol. 17, p. 189, 1923.

$$(\tau_{r\theta})_{r=b} = C_0' + \sum_{n=1}^{\infty} C_n' \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n' \sin n\theta \quad (\text{a})$$

內常數 A_0, A_n, B_n, \dots ，由已知邊界上力分布以通常方式計算 (閱第55頁)。由 (80) 式用 (38) 算出應力分量，比較當 $r=a$ ，及 $r=b$ 此等分量與 (a) 式所得之值，得足夠數目之方程式以決定 $n \geq 2$ 所有情況中係數值。對 $n=0$ ，亦即 (80) 式中第一行各項，及 $n=1$ ，亦即第二及第三行各項，進一步探討成爲必需。

取 (80) 式第一行爲應力函數，常數 a' 可由沿邊界均勻分布剪力值予以決定 (閱第130頁)。含 d_0 項所提供之應力分布爲多值者 (閱第107頁)，如爲完整環時，取 d (註1) 爲零。對其餘三常數 a_0, b_0 ，及 c_0 之決定，吾人僅有兩方程式：

$$(\sigma_r)_{r=a} = A_0 \quad \text{及} \quad (\sigma_r)_{r=b} = A_0'$$

決定此等常數所需額外方程式係由對位移考慮求得。一完整環之位移須爲 θ 之單值函數。由以前之研討知 (閱第28節) 證示如取 $C_0 = 0$ 可滿足此條件。如此則所餘兩常數 a_0 及 b_0 可由上述兩邊界條件求出。

現詳細考察 $n=1$ 所含各項。對 (80) 式內第二及第三行所含之八個常數 a_1, b_1, \dots, d_1' ，吾人用此部分 ϕ 算出應力 σ_r 及 $\tau_{r\theta}$ 。然後用條件 (a) 並使對應於 $\sin n\theta$ 及 $\cos n\theta$ 之係數在內外邊界上相等，得以下八個方程式：

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1')a^{-1} + 2b_1a - 2a_1'a^{-3} &= A_1 \\ (a_1 + b_1')b^{-1} + 2b_1b - 2a_1'b^{-3} &= A_1' \\ (c_1 + d_1')a^{-1} + 2d_1a - 2c_1'a^{-3} &= B_1 \\ (c_1 + d_1')b^{-1} + 2d_1b - 2c_1'b^{-3} &= B_1' \end{aligned} \quad (\text{b})$$

$$\begin{aligned} 2d_1a - 2c_1'a^{-3} + d_1'a^{-1} &= -C_1 \\ 2d_1b - 2c_1'b^{-3} + d_1'b^{-1} &= -C_1' \\ 2b_1a - 2a_1'a^{-3} + b_1'a^{-1} &= D_1 \\ 2b_1b - 2a_1'b^{-3} + b_1'b^{-1} &= D_1' \end{aligned} \quad (\text{c})$$

(註1) 予環內應力續斷之應力函數可解釋爲割口環之解。閱 J. N. Goodier 及 J. C. Wilhoit, Jr., *Proc. 4th Ann. Conf. Solid Mech., Univ. Texas, Austin, Texas*, pp. 152-170, 1959.

將 (c) 與 (b) 各式比較，知僅當

$$\begin{aligned} a_1 a^{-1} &= A_1 - D_1 \\ a_1 b^{-1} &= A_1' - D_1' \\ c_1 a^{-1} &= B_1 + C_1 \\ c_1 b^{-1} &= B_1' + C_1' \end{aligned} \quad (d)$$

時始可配合。由此知

$$a(A_1 - D_1) = b(A_1' - D_1') \quad a(B_1 + C_1) = b(B_1' + C_1') \quad (e)$$

如作用於環上成平衡時，(e) 式永可適應，例如，取所有各力沿 x 軸之分量總和為零，得

$$\int_0^{2\pi} \{ (b(\sigma_r)_{r=b} - a(\sigma_r)_{r=a}) \cos \theta - (b(\tau_{r\theta})_{r=b} - a(\tau_{r\theta})_{r=a}) \sin \theta \} d\theta = 0$$

代入 (a) 式之 σ_r 及 $\tau_{r\theta}$ ，吾人得 (e) 之第一式。以相同方式，取各力 y 軸向分量和，得 (e) 之第二式。

當 a_1 及 c_1 由 (d) 式決定時，(b) 及 (c) 兩系統變為完全相同，吾人僅有四個方程式以決定其餘六個常數。另所需兩個方程式由位移考慮求得。式 (80) 第二行內各項代表一徑向分布及曲桿 (圖 46) 撓曲應力組合之應力函數。重疊 (註 1) 此兩種情況之位移式，即 (q) 式 (見第 88 頁) 及 (g) 式 (見第 106 頁)，並以 $a_1/2$ 代 $-P/\pi$ 及 b_1' 代 D ，得以下 u 及 v 各值項：

$$\begin{aligned} \frac{a_1(1-\nu)}{2E} \theta \sin \theta + \frac{2b_1'}{E} \theta \sin \theta \\ \frac{a_1(1-\nu)}{2E} \theta \cos \theta + \frac{2b_1'}{E} \theta \cos \theta \end{aligned}$$

對一完整環，此等項均須消失，如應力僅係由邊界力所造成時。因此，

$$\frac{a_1(1-\nu)}{2E} + \frac{2b_1'}{E} = 0$$

$$\text{或} \quad b_1' = -\frac{a_1(1-\nu)}{4} \quad (f)$$

取 (80) 式第三行，以同理得

$$d_1' = -\frac{c_1(1-\nu)}{4} \quad (g)$$

(註 1) 如角係由豎軸算起時應以 $\theta + \pi/2$ 代替 θ 如圖 53。

方程式 (f) 及 (g)，連同 (b) 及 (c) 式，現足夠決定 (80) 式第二行及第三行所代表應力函數之各常數。

吾人結論為完整環例中邊界條件 (a) 不足以決定應力分布，對位移考慮為必需者。完整環之位移必須單值，而適應此條件必須取

$$c_0 = 0 \quad b_1' = -\frac{a_1(1-\nu)}{4} \quad d_1' = -\frac{c_1(1-\nu)}{4} \quad (81)$$

由上式知常數值 b_1' 及 d_1' 視柏松比而定。由此知完整環內應力分布通常與材料彈性性質有關。僅當 a_1 及 c_1 消失，並由 (81) 式 $b_1' = d_1' = 0$ 時應力始與彈性常數無關。此特殊情況僅當

$$A_1 = D_1 \quad \text{及} \quad B_1 = -C_1$$

時始出現(閱 (d) 式)。當作用於環內外邊界上力之總和消失時即為此種情況。例如，取作用於邊界 $r=a$ 上沿 x 向之分量和，由 (a) 式為

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) a d\theta = a\pi(A_1 - D_1)$$

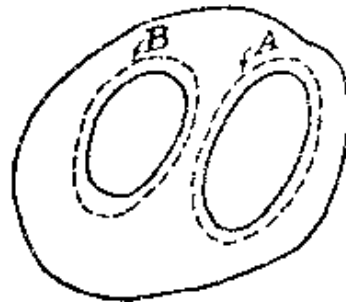


圖 84

如此為零值得 $A_1 = D_1$ 。同一方式，如沿 y 向取分量，則得 $B_1 = -C_1$ ，如 y 向和力為零。由此知如作用於一完整環內外邊界上合力為零時應力分布與材料之彈性常數無關。此等力之力矩不一定為零。

以上對圓環之結論亦適用於最普遍二維問題中多重連結體。由密其爾 (J. H. Michell) (註) 之一般研究知，對多重連結體 (圖 84)，類比於 (81) 之方程式並表達位移為單值之條件，對每一獨立路線，如圖中 A 及 B 所示，應予導出。此等物體中應力分布一般均與彈性常數有關。僅當每一邊界上合力為零時始

(註) *Loc. cit.*

與彈性常數無關（註1）。以電言模數對最大應力影響甚小，實用時可予忽計（註2）。此結論具實際重要性。以後吾人將知用透明材料時，如玻璃及電木等，可由光學方法以求應力（見第155頁），此結論意指由透明材料所獲實驗結果可立即施用於其他材料上，如鋼料等。

第四十四節 極坐標廣義解之應用

極坐標二維問題級數解之首次應用設取一圓環受兩等值反向作用於一直徑上之壓縮問題（註3）（圖85a）。吾人由圓盤解開始（見第41節）。對此盤割離一同心孔半徑為 a ，在此孔口邊緣上將有分布之正交與剪應力，重疊一等值反向系統將消除此等應力。此後一系統可用傅立葉級數前數項以足夠正確度代表之。如此則環內對應之應力可用前節之廣義解求得。此等應力連同實體圓盤應力合成環內總應力。以此方法所計算斷面 mn 及 m_1n_1 上各點 $\sigma_\theta : 2P/\pi b$ 比率當 $b=2a$ 時均列於下表中（註4，5）。

$r =$	b	0.9b	0.8b	0.7b	0.6b	0.5b
正確理論						
mn	2.940	1.477	-0.113	-2.012	-4.610	-8.942
m_1n_1	-3.788	-2.185	-0.594	1.240	4.002	10.147

（註1）體積力取為零。

（註2）對此問題之研討，見 L. N. G. Filon, *Brit. Assoc. Advan. Sci. Rept.*, 1921. 及 E. G. Coker 及 L.N.G. Filon, "Photo-elasticity," Arts, 6.07 & 6.16, Cambridge University Press, New York, 1931.

（註3）S. Timoskenko, *Bull. Polytech. Ins. Kiew*, 1910, 及 *Phil. Mag.*, vol. 44, p. 1014, 1922. 另參考 K. Wieghardt, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien*, vol. 124, Abt. II, p. 1119, 1915.

（註4）板之厚度取為一單位。

（註5） m_1n_1 上應力計算對 $b=2a, 2.5a, 3.33a, 5a, 10a$ 見 E. A. Ripperger 及 N. Davids, *Trans. ASCE*, vol. 112, pp. 619-428, 1947

雙曲線應力分布

mn	2.885	1.602	0.001	-2.060	-4.806	-8.653
m_1n_1	-7.036	-5.010	-2.482	0.772	5.108	11.18

線性應力分布

mn	3.90	1.71	-0.48	-2.67	-4.86	-7.04
m_1n_1	-8.67	-5.20	-1.73	1.73	5.20	8.67

爲比較計吾人另列由兩種初等理論對同一應力所計算結果：(1) 設斷面保持平面，此時正交應力依雙曲線分布；(2) 設應力爲線性分布。此表證示對斷面 mn ，因係在對各 P 作用點較遠距離處，雙曲線分布極接近於正確值。最大應力之差異僅約百分之三。在斷面 m_1n_1 上近似解之差誤則較顯著。在 m_1n_1 斷面上正交應力和等於 P/π ，此點頗爲興趣。由圖 68d 集中力 P 之楔性作用，此係可預期者，斷面 mn 及 m_1n_1 上正交應力分布，由以上三種方法計算結果，示於圖 85b 及

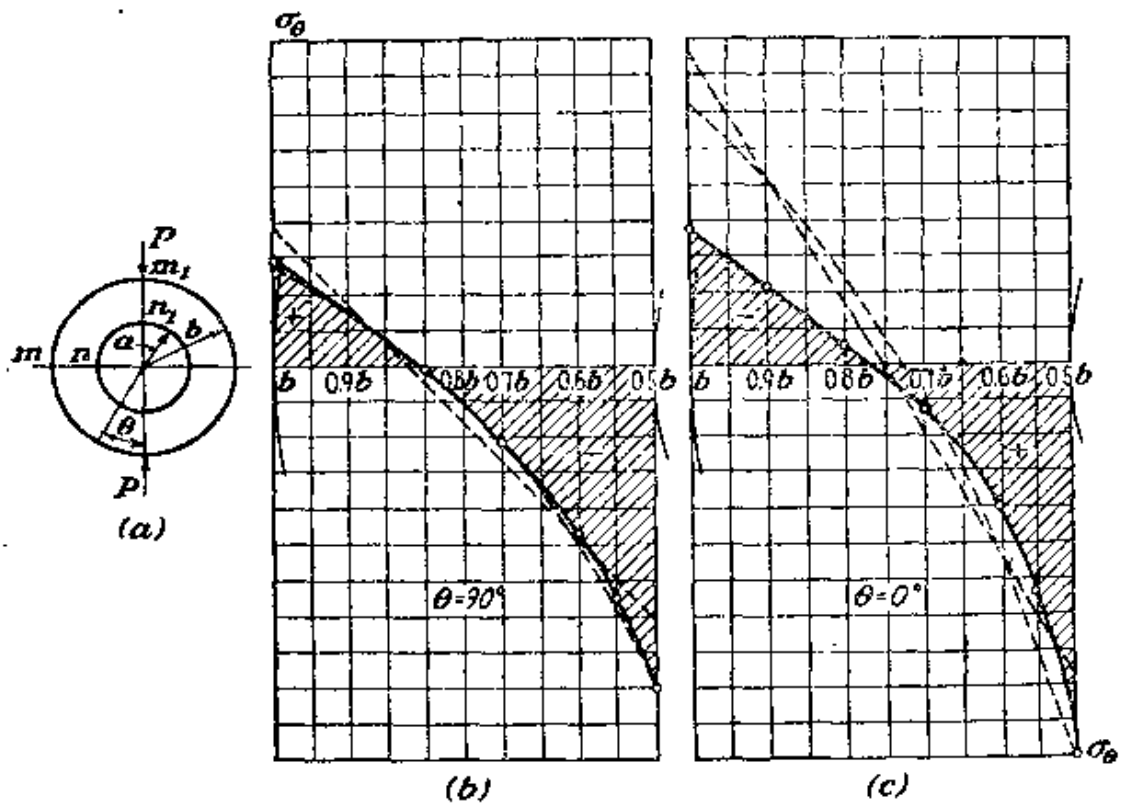


圖 85

c。以上兩等值反向力所用方法可引申於一般集中力（註1）。

另一例取眼桿之一端（圖86）（註2）。沿眼孔壓力分布視孔與栓間淨空而定。設僅有正交壓力作用於內外邊界，值為（註3）：

$$(\sigma_r)_{r=a} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{a} \quad \text{for } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(\sigma_r)_{r=b} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{b} \quad \text{for } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

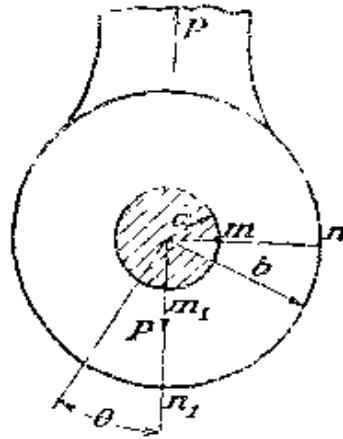


圖 86

此示壓力分布於內邊界之下半部及外邊界之上半部。將此等分布展開為三角數後，應力可用上節之一般解（80）算出。圖87示斷面 mn 及 m_1n_1 ，對 $b/a=4$ 及 $b/a=2$ ，比率 $\sigma_\theta : P/2a$ 計算結果。應注意者比例中作用於每一邊界各力之和並不為零；故應力分布與彈性常數有關。以上計算（註4）係取柏松比 $\nu=0.3$ 。

（註1）L. N. G. Filon, The stresses in a circle ring, *Selected Engineering Papers*, No. 12, London, 1924, Institute of Civil Engineers.

（註2）H. Reissner, *Jahrb. Wiss. Gesellsch. Luftfahrt*, p. 126, 1928; H. Reissner, F. Strauch, *Ingenieur-Arch.*, vol. 4, p. 481, 1933.

（註3） P 為板單位厚度力。

（註4）由偏光彈性應力之實驗測定，參閱 Frocht, "Photoelasticity," *op. cit.*, vol. 2, art. 6.4; E. G. Coker and L. N. G. Filon, "Photoelasticity," *op. cit.*, Art. 6.18; K. Takemura & Y. Hosakawa, *Tokyo Imp. Univ. Aeron. Res. Inst. Rept.* 12, 1924. 鋼眼桿應力會由 J. Mathar 研究，見 *J. Appl. Mech.*, vol. 23, pp. 85-90, 1956.

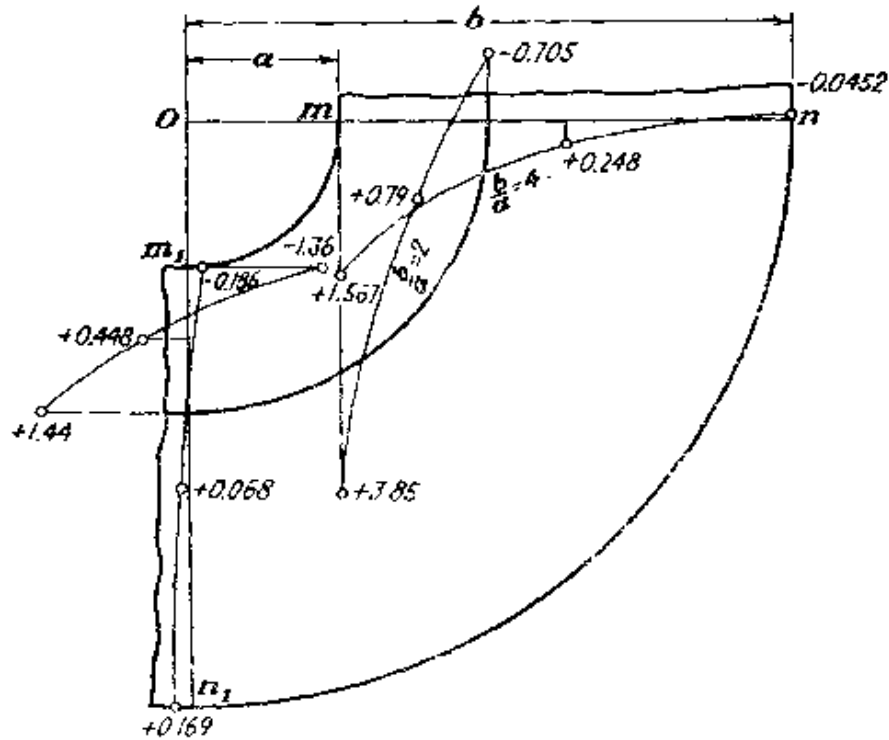


圖 87

第四十五節 沿各面荷力之楔

通解 (80) 亦可用於楔面上多項式分布荷力 (註 1)。由 (80) 式以通常方式計算應力分量，並僅取含 r^n ， $n \geq 0$ 各項，得以下增導 r 之應力分量：

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta = & 2b_0 + 2d_0\theta + 2a_2 \cos 2\theta + 2c_2 \sin 2\theta \\
 & + 6r(b_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta + a_3 \cos 3\theta + c_3 \sin 3\theta) \\
 & + 12r^2(b_2 \cos 2\theta + d_2 \sin 2\theta + a_4 \cos 4\theta + c_4 \sin 4\theta) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & (n+2)(n+1)r^n(b_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta + a_{n+2} \cos(n+2)\theta \\
 & \qquad \qquad \qquad + c_{n+2} \sin(n+2)\theta) \qquad (82) \\
 & \dots \dots \dots \\
 \tau_{r\theta} = & -d_0 + 2a_2 \sin 2\theta - 2c_2 \cos 2\theta \\
 & + r(2b_1 \sin \theta - 2d_1 \cos \theta + 6a_3 \sin 3\theta - 6c_3 \cos 3\theta) \\
 & + r^2(6b_2 \sin 2\theta - 6d_2 \cos 2\theta + 12a_4 \sin 4\theta - 12c_4 \cos 4\theta) \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

(註 1) 參考 S. Timoshenko, "Theory of Elasticity", 俄文版, p. 119, St. Petersburg, 1914.

$$\begin{aligned}
 &+r^n(n(n+1)b_n \sin n\theta - n(n+1)d_n \cos n\theta + (n+1)(n+2) \\
 &\quad a_{n+2} \sin(n+2)\theta - (n+1)(n+2)c_{n+2} \cos(n+2)\theta) \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

故每一 r 幕均與四個任意參數相關，使如在 $\theta = \alpha$ 及 $\theta = \beta$ 邊界上所施應力求為已知 r 之多項式時，楔內應力即可決定。例如，設邊界條件為（註）

$$\begin{aligned}
 (\sigma_\theta)_{\theta=\alpha} &= N_0 + N_1 r + N_2 r^2 + \dots\dots \\
 (\sigma_\theta)_{\theta=\beta} &= N_0' + N_1' r + N_2' r^2 + \dots\dots \\
 (\tau_{r\theta})_{\theta=\alpha} &= S_0 + S_1 r + S_2 r^2 + \dots\dots \\
 (\tau_{r\theta})_{\theta=\beta} &= S_0' + S_1' r + S_2' r^2 + \dots\dots
 \end{aligned} \tag{a}$$

使等幕 r 之係數相等，得

$$\begin{aligned}
 2(b_0 + d_0 \alpha + a_2 \cos 2\alpha + c_2 \sin 2\alpha) &= N_0 \\
 6(b_1 \cos \alpha + d_1 \sin \alpha + a_3 \cos 3\alpha + c_3 \sin 3\alpha) &= N_1
 \end{aligned} \tag{b}$$

在一般情況下

$$(n+2)(n+1)(b_n \cos n\alpha + d_n \sin n\alpha + a_{n+2} \cos(n+2)\alpha + c_{n+2} \sin(n+2)\alpha) = N_n$$

及對 $\theta = \beta$ 時 σ_θ ，及 $\theta = \alpha$ 與 $\theta = \beta$ 時 $\tau_{r\theta}$ 其他三組方程式。此等方程式足夠計算 (82) 式解內所含常數。

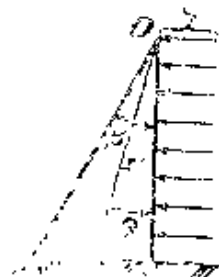


圖 8

舉一例，設取圖88所示之例。與布正交壓力 q 施於稜面 $\theta = 0$ ，另一面 $\theta = \beta$ 不受力。僅取 (82) 式中 σ_θ 及 $\tau_{r\theta}$ 之第一行，解常數 b_0, d_0, a_2 及 c_2 之方程式為

$$2b_0 + 2a_2 = -q$$

（註） N_0, N_0', S_0, S_0' 各項並非獨立。彼等代表轉角 $r = 0$ 處應力，並僅可指定三個。

$$2b_0 + 2d_0\beta + 2a_2 \cos 2\beta + 2c_2 \sin 2\beta = 0$$

$$-d_0 - 2c_2 = 0$$

$$-d_0 + 2a_2 \sin 2\beta - 2c_2 \cos 2\beta = 0$$

由此 ($k = \tan \beta$) 得

$$c_2 = \frac{q}{4k} \quad a_2 = -\frac{q \tan \beta}{4k} \quad d_0 = -\frac{q}{2k} \quad 2b_0 = -q + \frac{q \tan \beta}{2k}$$

代入 (82) 式，得各應力分量爲 (註)

$$\sigma_\theta = \frac{q}{k} \left(-k + \frac{1}{2} \tan \beta - \theta - \frac{1}{2} \tan \beta \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{q}{k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tan \beta \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right)$$

$$\sigma_r = \frac{q}{k} \left(-k + \frac{1}{2} \tan \beta - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \tan \beta \cos 2\theta \right) \quad (c)$$

對多項式荷力分布 (a) 內任何其他項之應力分量可以類似方式求出。

以上對楔形內應力計算方法可施用於半無限板，此時取 $\beta = \pi$ ，圖 (89) 所示中，應力可在 (c) 式內代 $\beta = \pi$ 求得。如此則

$$\sigma_\theta = -\frac{q}{\pi} \left(\pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{q}{2\pi} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\sigma_r = -\frac{q}{\pi} \left(\pi - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \quad (d)$$

此等應力適應直邊上各條件，及閉合邊界如 $r = b$ 半圓上之特定條件。

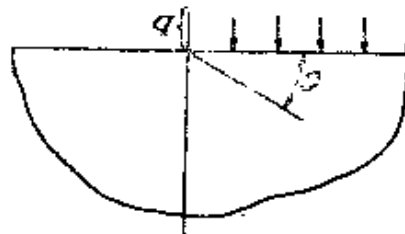


圖 89

(註) 此解由 M. Levy 以另一方法求得，見 *Compt. Rend.*, vol. 126, p. 1235, 1898. 另閱 P. Fillunger, *Z. Math. Physik*, vol. 60, 1912. 其他應用見 E. Reissner, *J. Aeron. Sci.*, vol. 7, p. 353, 1940, C. J. Tranter, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 1, p. 125, 1948.

第四十六節 楔形與凹口特徵解

在45節中應力分量(82)係取 r 之正整數冪，對應於類似形式之應力函數。但如取應力函數(80)中級數項內 $\cos n\theta$ 及 $\sin n\theta$ ，立可驗正不論 n 為整數否每項均一應力函數。事實上微分方程式(39)不論 n 為何值均可適應。此值可為一複數，其時吾人可取實值或虛值部分為實應力函數。因此，寫 $\lambda+1$ 代替 n ，吾人可取

$$\phi = r^{\lambda+1}f(\theta) \quad (\text{a})$$

內

$$\begin{aligned} f(\theta) = & C_1 \sin(\lambda+1)\theta + C_2 \cos(\lambda+1)\theta \\ & + C_3 \sin(\lambda-1)\theta + C_4 \cos(\lambda-1)\theta \end{aligned} \quad (\text{b})$$

式中 C_1, C_2, C_3, C_4 為任意常數。

應力及位移分量(不計剛體項)為下列各式：

$$\sigma_r = r^{\lambda-1} [f''(\theta) + (\lambda+1)f(\theta)] \quad (\text{c})$$

$$\sigma_\theta = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda+1)f(\theta)] \quad (\text{d})$$

$$\tau_{r\theta} = -r^{\lambda-1} \lambda f'(\theta) \quad (\text{e})$$

$$2Gu = r^\lambda [-(\lambda+1)f(\theta) + (1+\nu)^{-1}g'(\theta)] \quad (\text{f})$$

$$2Gv = r^\lambda [-f'(\theta) + (1+\nu)^{-1}(\lambda-1)g(\theta)] \quad (\text{g})$$

式中

$$g(\theta) = 4(\lambda-1)^{-1} [C_3 \cos(\lambda-1)\theta + C_4 \sin(\lambda-1)\theta] \quad (\text{h})$$

位移係對平面應力者。

現將此解應用於一楔形區域，邊界為徑向 $\theta = \pm\alpha$ ，面上無荷力，故

$$\sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \theta = \pm\alpha \quad (\text{i})$$

由(d)及(e)知此指

$$f(\alpha) = 0 \quad f(-\alpha) = 0 \quad f'(\alpha) = 0 \quad f'(-\alpha) = 0 \quad (\text{j})$$

由(b)式知此變為含 C_1, C_2, C_3, C_4 各常數之四個方程式。經整理

後相當於

$$\begin{aligned} C_1 \sin(\lambda+1)\alpha + C_3 \sin(\lambda-1)\alpha &= 0 \\ (\lambda+1)C_1 \cos(\lambda+1)\alpha + (\lambda-1)C_3 \cos(\lambda-1)\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (k)$$

$$\begin{aligned} C_2 \cos(\lambda+1)\alpha + C_4 \cos(\lambda-1)\alpha &= 0 \\ (\lambda+1)C_2 \sin(\lambda+1)\alpha + (\lambda-1)C_4 \sin(\lambda-1)\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (l)$$

每一對方程式均為齊次者，故隨意選一 λ 值，四個常數均將為零。但

(k) 式中 C_1 及 C_3 可為非零值，如係數行列式為零，亦即，如

$$(\lambda-1)\sin(\lambda+1)\alpha \cos(\lambda-1)\alpha - (\lambda+1)\sin(\lambda-1)\alpha \cos(\lambda+1)\alpha = 0$$

此簡化為

$$\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda\alpha = 0 \quad (m)$$

如取 λ 值適應此方程式， C_1 及 C_3 可為非零。比例 C_3/C_1 可由 (k) 式任一求出。但 C_1 可留為任意常數。

對另兩方程式作相同之觀察，知 C_2 及 C_4 可為非零，倘 λ 式

$$\lambda \sin 2\alpha + \sin 2\lambda\alpha = 0 \quad (n)$$

應對 (m) 及 (n) 式同時考慮，知同時適應兩式之 λ 值為 $\lambda=0$ 。但吾人對此情形不感興趣，故如一式可適應時，另一式則否。因此如 C_1 及 C_3 不為零， C_2 及 C_4 必為零，反之亦然。

取 C_2 及 C_4 不為零，(n) 式適應，由 (l) 第一式得

$$\frac{C_4}{C_2} = \frac{-\cos(\lambda+1)\alpha}{\cos(\lambda-1)\alpha} \quad (o)$$

應力函數 (a) 變為

$$\phi = r^{\lambda+1} C_2 \left[\cos(\lambda+1)\theta - \frac{\cos(\lambda+1)\alpha}{\cos(\lambda-1)\alpha} \cos(\lambda-1)\theta \right] \quad (p)$$

對每一 (n) 式之根有一複變函數，提供兩實值解。

考察 (n) 式根顯示楔形區域，即 $2\alpha < \pi$ ，有一無限集具正實值部分，其值均大於一，對應之應力函數所提供之位移及應力，由方程

式 (c) 至 (h)，當 r 趨於零時趨於零，但如 λ 爲 (n) 式一根時， $-\lambda$ 亦爲一根。因此有另一集根具負實值部分。此使應力與位移當 r 趨於零時爲無界者，楔之尖端因此不能視爲無荷力，即使合力及力矩爲零亦然。對 (m) 式之反對稱例結論亦同。對 $2\alpha > \pi$ ，即凹口板，(n) 式各根改變性質。當角 $2\alpha = 257.4^\circ$ 時 (m) 式各根改變。

此類問題當兩邊 $\theta = \pm\alpha$ 爲其他情況時亦經解出。當兩邊嵌入時 ($u=v=0$)，楔形區域之結論大體相似。一邊嵌入，另一邊自由 ($\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$)，其些應力函數使位移隨 r 趨於零，但當 $2\alpha > 63^\circ$ ($\nu = 0.3$) 時應力爲無界之增值，一端嵌入之拉條 $2\alpha = \pi/2$ 爲一特例，可示各異點之性質 (註1)。

楔與凹口各特種問題，含徑向荷力邊在內，各種轉換法 (註2) 可直接引至特種解之適當組合 (註3)，如 38 及 39 節各例，及本節各特徵解。

習 題

1. 導 (見第67頁) (b) 式三關係，每一次選一適當三角形單元可立即使各關係爲平衡方程式。

2. 驗正27節方程式 (d)，如

$$\phi = x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = r^4 \cos 2\theta$$

3. 考察應力函數 $C\theta$ 之特性， C 爲一常數。使用此函數於一環 $a < r < b$ 中，及其於無限平版中。

一環在 $r=a$ 處固定，受均勻分布剪力於周界 $r=b$ 上其力爲 M ，且

(註1) 同第61頁註1。

(註2) 同 Sternberg 及 Koiter 論文，第117頁註1，及 Benthem, 第61頁註1。

(註3) 其他綜合見 G. Sonntag 所著各論文。同 *Forsch. Ing. Wes.*, vol. 29, pp. 197-203, 1963. 另同 H. Neuber, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. pp. 211-228, 1963.

150 彈性力學理論 (全一冊)

(48), (49), (50) 各式, 求一在 $r=b$ 處周向位移 v 之算式。

4. 證圖45中如內半徑 a 較外半徑 b 為一小值, 內部 σ_θ 值為

$$\frac{dE}{4\pi} \left(1 - 2 \log \frac{b}{a} \right)$$

如 $b/a=0$, $E=30 \times 10^9$ 磅/平方吋, 彈性限 $=4 \times 10^4$ 磅/平方吋, 最大開口 (α 值) 閉合時不致超過彈性限為若干?

5. 用方程式 (61) 及重疊法求有孔無限平板內應力, 設受雙向均勻拉力於無限遠處, 結果應與方程式 (44) 當 $b/a \rightarrow \infty$, $p_i=0$, $p_o=-S$ 時相同, 用此以為驗正。

6. 求對應於應力 (61) 位移之算式, 並證明其為單位者。

7. 轉換第 36 節應力函數 (a) 為直角坐標並求 σ_x , σ_y , τ_{xy} 值, 此與 (65') 式應力分布相當, 證當對力之距離沿任何方向增加時, 此等值均趨於零。

8. 驗證應力函數 (f) 與 (68) 式相符, 倘 $\alpha=\pi/2$, 考察此應力分布當 α 為小值時是否與初等撓曲理論符合。

9. 證對第 116 頁應力分布 (f) 求其總和時, 所得為對應於楔形尖角上純力偶 M 。

10. 一單位厚度之 P 力施於翻90大平板凹口處, 計算應力分量, 及 AB 弧上之水平力, 對應於第38節 (a) 式之應力分布。

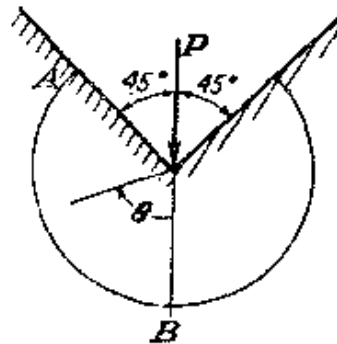


圖 90

11. 求圖91中斷面 mn 上應力分布算式, 本章中楔形理論與第三章中懸臂梁理論對接頭 rs 處將提供不同結果, 試評述之。

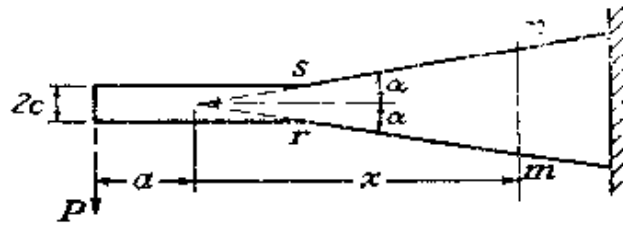


圖 91

12. 求以下應力函數常數值

$$\phi = C(r^2(\alpha - \theta) + r^2 \sin \theta \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta \tan \alpha)$$

所適應條件為圖92所示三角形平板上下兩邊之已知情況，求斷面 mn 上應力分量 σ_x, τ_{xy} ，繪應力曲線並與初等理論曲線比較，設 $\alpha = 20^\circ$ 。

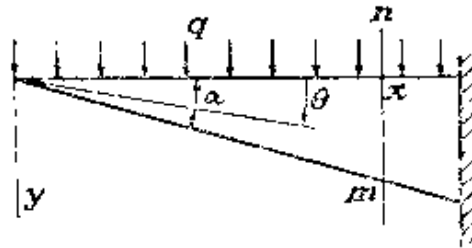


圖 92

13. 求應力函數

$$\phi = Cr^2(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)$$

常數 C 值使適應條件

$$\sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = s \quad \theta = \alpha$$

$$\sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = -s \quad \theta = -\alpha$$

相當於均勻剪荷力作用於楔形兩邊上，驗證頂點上無集中力及力偶作用。

14. 求以下形式之應力函數

$$a_3 r^3 \cos 3\theta + b_1 r^3 \cos \theta$$

適應條件

$$\sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = s r \quad \text{在 } \theta = \alpha \text{ 面上}$$

$$\sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = -s r^2 \quad \text{在 } \theta = -\alpha \text{ 面上}$$

s 為一常數，繪 s 為正值時荷力曲線。

15. 求下列應力函數

152 彈性力學理論 (全一冊)

$$a_1 r^4 \cos 4\theta + b_2 r^4 \cos 2\theta$$

適應條件

$$\sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = sr^2 \quad \text{在 } \theta = \alpha \text{ 面上}$$

$$\sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = -sr \quad \text{在 } \theta = -\alpha \text{ 面上}$$

s 爲一常數，繪荷力圖。

16. 由應力函數第(37節 (a) 式)

$$\phi = -\frac{p}{2\pi} \left((x^2 + y^2) \arctan \frac{y}{x} - xy \right)$$

導以下應力分布

$$\sigma_x = -\frac{p}{\pi} \left(\arctan \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \quad \tau_{xy} = -\frac{p}{\pi} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{\pi} \left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$$

並證示此適應圖93所示半無限平板 $y=0$ 邊上條件，荷力向左方無限延伸。

考察應力 τ_{xy} 值，(a) 延邊界 O_x 接近 O 點，(b) 延 y 軸接近 O 點 (差異係因 O 處荷力斷續關係)。

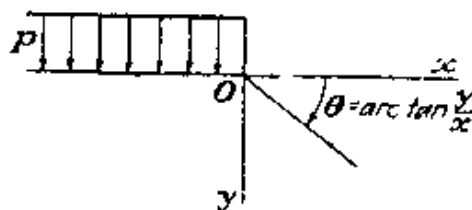


圖 93

17. 證應力函數

$$\phi = \frac{s}{\pi} \left[\frac{1}{2} y^2 \lg(x^2 + y^2) + xy \arctan \frac{y}{x} - y^2 \right]$$

適應圖94半無限平面 $y=0$ 邊上條件，均勻剪荷力由 O 點向左方作無限延伸，證自任何方向趨近 O 點時， σ_x 之增加爲無限者。

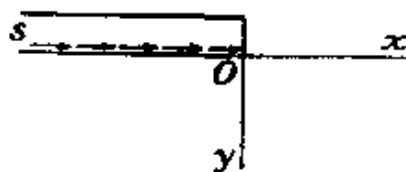


圖 94

18. 用16題結果，由重疊法求 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ，設無限平板直邊 $-a < x < a$ 段內受壓力 p ，證剪應力為

$$\tau_{xy} = -\frac{p}{\pi} \frac{4axy^2}{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]}$$

檢查 (a) 沿直邊，(b) 沿直線 $x=a$ 趨近於點 $x=a, y=0$ 時此應力之性質。

19. 用習題17結果，對邊上一段 $-a < x < a$ 內受均勻剪荷力 s 時繪 σ_x 之變化圖。

20. 證應力函數

$$\phi = \frac{p}{2\pi a} \left[\left(\frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right) \arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{3} y^3 \log(x^2 + y^2) - \frac{1}{3} x^2 y \right]$$

適應圖95半無限平板 $y=0$ 邊上條件，線性遞增壓力向左方無限延伸。

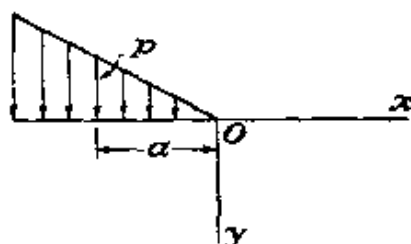


圖 95

21. 證如習題20中壓力荷換為剪力時， s 代替 p ，應力函數變為

$$\phi = \frac{s}{2\pi a} \left[xy^2 \log(x^2 + y^2) + (x^2 y - y^3) \arctan \frac{y}{x} - 3xy^2 \right]$$

22. 證圖96中所示荷力分布可由圖95所示荷力型重疊求得。

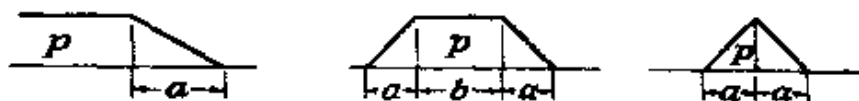


圖 96

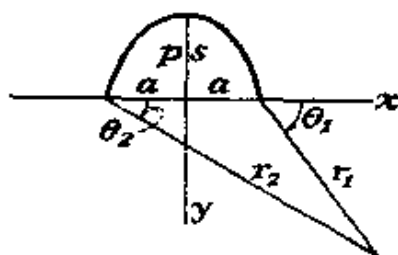


圖 97

154 彈性力學理論 (全一冊)

23. 證圖97所示拋物線型荷力圖代表壓力時應力函數為

$$-\frac{\rho}{\pi} \left\{ -\frac{xy^3}{3a^2} \log \frac{r_2^2}{r_1^2} - \left[\frac{a^2}{4} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \left(1 - \frac{x^2}{6a^2} + \frac{y^2}{2a^2} \right) \right] \alpha \right. \\ \left. + \frac{2}{3} ax\beta + \frac{1}{2} ay \left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right) \right\}$$

如為剪力，則應力函數為

$$\frac{s}{\pi} \left\{ \frac{y^2}{6a^2} (3a^2 - 3x^2 + y^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{2}{3} ay\beta + \frac{xy}{3a^2} (x^2 - 3y^2 - 3a^2) \alpha + \frac{4xy^2}{3a} \right\}$$

內

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2 \quad r_2^2 = (x+a)^2 + y^2$$

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2 = \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad \beta = \theta_1 + \theta_2 = \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$$

24. 證圖75中，除在A及B兩點外，有一拉應力 $\sigma_x = 2P/\pi d$ 作用於豎向直徑，取半圓ADB部分之平衡，用圖68c及d對A及B之小半圓。

25. 驗證應力函數

$$\phi = -\frac{P}{\pi} \left\{ \psi r \sin \theta - \frac{1}{4} (1-\nu) r \log r \cos \theta - \frac{1}{2} r \theta \sin \theta \right. \\ \left. + \frac{d}{\Delta} \log r - \frac{d^2}{32} (3-\nu) \frac{1}{r} \cos \theta \right\}$$

適應一力作用於無限平板孔中之邊界條件，應力在無限遠處為零，孔邊周向應力為

$$-\frac{P}{\pi d} (2 + (3-\nu) \cos \theta)$$

而A點除外，圖(98)。

另證此亦對應於單值位移。

26. 由題25對由作用於孔中均勻壓力所造成沿孔周向壓力積分，用(45)式驗證所得結果。

27. 由應力函數 $\phi(r)$ 求 $f(r)$ 之通式，並求應力分量 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 各算式。此一應力函數可用於閉合環否？

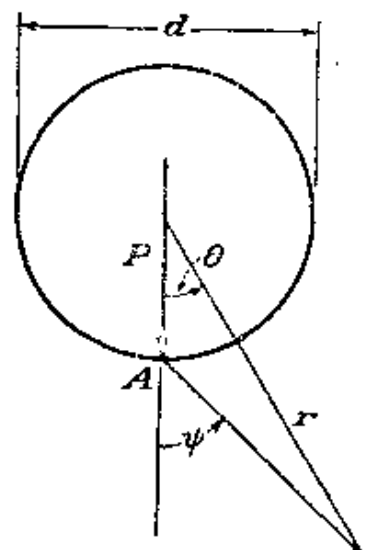


圖 98

第五章 偏光彈性及波紋實驗方法

第四十七節 實驗方法及對證

理論發展將於第六章繼續。本章中將對前此所得應力及變形各解討論兩種主要實驗對證方法。另外，前此所用平板均具簡單幾何形式之邊界，對較繁複之板形，分析解變為極度困難，在大多數情況下可由數值法（見附錄）或實驗法解決之，如應用應變儀量出表面應變（閱第12節），偏光彈性法，或波紋方法。

第四十八節 偏光彈性應力度量

此法係根據勃勒斯特之發現（註1），即偏光傳遞於受應力玻璃時，可現由應力所造成之鮮明彩色型式。彼建議此等彩色型可能應用於工程結構中之應力度量，例如在一圻工橋中，可在各式荷力下檢查玻璃模型經偏光後所產生之彩色型式，此項建議未能引起彼時工程師之注意。偏光彈性彩色圖型與分析解之比較係由物理學家馬克斯威爾（註2）（Maxwell）所完成。此建議若干年後始經威爾遜（C. Wilson）

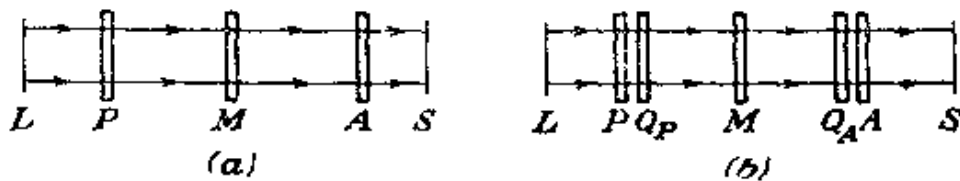


圖 99

氏採用於受集中荷力梁應力研究中（註3），麥納哥（A. Mesnager）

（註1）見 *Trans. Roy. Soc. (London)* 1816. p. 156.

（註2）見 J. Clerk Maxwell, *Sci. Papers*, vol. 1. p. 30.

（註3）見 *Phil. Mag.* vol. 32, p. 481, 1891.

氏用於拱橋研究 (註1) 中。此法經寇克 (註2) (E. G. Coker) 氏推廣並廣泛應用，彼採賽璐珞為模型材料，較後研究者曾用電木、樹脂及其透明體，為度量方便計，由單色光所得黑白紋型已代替白光之彩色紋型。

以下討論中吾人僅取最簡單之偏光彈性裝置 (註3)。普通光線為對射線之各種側向振動所組成。由一面塗黑玻璃之反射，或經一極化板傳遞，吾人得一偏光光束，其側向振動趨於一固定方向。此種光線用為應力之偏光彈性研究。吾人將僅考慮單色光線。

圖99 a 代表一平面偏光鏡。一光束由 L 出發經偏光器 P ，然後穿過透明試模 M ，其應力將光線修正，經另一分析器 A ——另一偏光器 A ——至 S 幕，干擾紋型 (圖101至105) 出現於幕上。

圖100a中， $abcd$ 代表試模左方面上一小單元，主應力 σ_x, σ_y 為

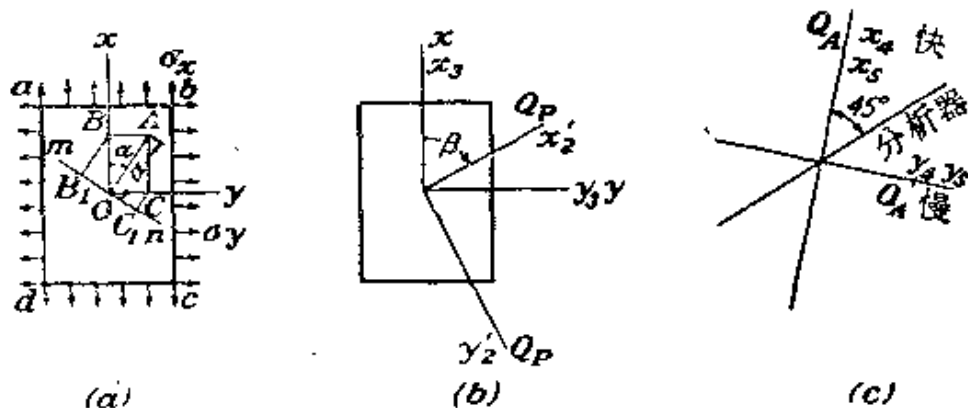


圖 100

(註1) 參閱 *Ann. Ponts Chaussées*, 4 Trimestre, p. 129, 1901, and 9 Series, vol. 16, p. 135, 1913.

(註2) 見寇克著述之 *Gen. Elec. Rev.* vol. 23, p. 870, 1920, 及 *J. Franklin Inst.* vol. 199, p. 289, 1925. 又參閱 E. G. Coker 及 L. N. G. Filon 著 "Photoelasticity," Cambridge University Press, New York, 1931.

(註3) 較完整資料見 M. Hetényi (ed.), "Handbook of Experimental Stress Analysis" John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950, M. M. Frocht, "Photoelasticity" 2 vols. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1941 及 1948.

方便計畫為豎向及水平方向。由 P 發出光線於 OA (圖 100) 平面上偏光，振動為簡諧式並可由沿 OA 側向位移

$$s = a \cos pt \quad (a)$$

代表之，內 p 為 2π 與頻率乘積，視光之色彩而定， t 為時間。

平面 OA 中位移 (a) 分解為兩個分量，幅度在 O_x 及 O_y 平面中各為 $OB = a \cos \alpha$ 及 $OD = a \sin \alpha$ 。對應之位移分量為

$$x = a \cos \alpha \cos pt \quad y = a \sin \alpha \cos pt \quad (b)$$

作用於平板 O 點上主應力 σ_x 及 σ_y 效應為變更經平板時其傳播速度，設 v_x 及 v_y 代表 O_x 及 O_y 面內速度分量，如 h 為板之厚度，兩分量經過厚度之時間為

$$t_1 = \frac{h}{v_x} \quad t_2 = \frac{h}{v_y} \quad (c)$$

因光波傳遞時不改變形狀，光在 t 時離開平板 x 位移分量 x_1 對應於光線在 t_1 時進入平板之 x 向位移

$$x_1 = a \cos \alpha \cos p(t - t_1) \quad y_1 = a \sin \alpha \cos p(t - t_2) \quad (d)$$

脫離平板時此等分量因此有一相差 $\Delta = p(t_2 - t_1)$ 。在一定溫度下，對已知光波長，對某一材料，此相角差與主應力差成正比。此點經實驗建立。通常用下式表示此關係：

$$\Delta = \frac{2\pi h}{\lambda} C(\sigma_x - \sigma_y) \quad (e)$$

內 λ 為波長(真空中)， C 為由實驗所決定之光應力係數。 C 與波長、溫度及材料有關。

分析器 A 僅傳遞在其自身極化平面內之振動或分量。如對偏光器極化平面成直角，及移去試模時，經 A 將無光線傳遞，幕 S 上黑暗。現考察試模存在時現象。到達分析器時分量 (d) 可表示如下

$$x_2 = a \cos \alpha \cos \psi \quad y_2 = a \sin \alpha \cos(\psi - \Delta) \quad (f)$$

因自 M 至 A 過程中保持相差 Δ 。式內 ψ 代表 $pt + \text{常數}$

A 之偏極平面爲圖100a中 mn 。爲便利計，使其垂直於 OA 。由 A 傳遞振動(f)之分量爲沿 O_m 之分量，由(f)式知爲

$$x_2 \sin \alpha = 1/2a \sin 2\alpha \cos \psi \quad -y_2 \cos \alpha = -1/2a \sin 2\alpha \cos(\psi - \Delta)$$

沿 mn 振動和因此爲

$$\frac{1}{2}a \sin 2\alpha [\cos \psi - \cos(\psi - \Delta)] = -a \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2} \sin\left(\psi - \frac{\Delta}{2}\right)$$

因子 $\sin[\psi - (\Delta/2)]$ 對時間之簡諧變化，振幅爲

$$a \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2} \quad (g)$$

除 $\sin 2\alpha = 0$ 或 $\sin \Delta/2 = 0$ 外若干光線將達幕上。如 $\sin 2\alpha = 0$ 各主應力方向平行(及垂直)於 P 及 A 極化方向。故經 M 中此等點之光線將消失，幕上對應點將暗黑，此等點通常在一個或多數曲線上，在 S 上示一暗帶。此曲線稱爲等傾。曲線各點上可畫短線平行於 P 及 A 之軸線以標出此等點上主應力之方向。裝置 P 及 A 於不同方位(垂直)方位時，可得不同等傾線。布滿於場上短線有如鐵屑布於磁石之型態，每點上可描繪曲線均於主應力軸。此等曲線爲主應力規線。如 $\sin \Delta/2 = 0$ ，則 $\Delta = 2n\pi$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$ 當 $\Delta = 0$ 時，各主應力相等。此等點稱爲同向點，均爲暗色。 $n = 1$ 各點成一暗帶，或條紋爲一階， $n = 2$ 各點成爲二階條紋等等。此等紋條稱爲等色。由方程式(e)知條紋 $n = 2$ 上 $\sigma_x - \sigma_y$ 值爲 $n = 1$ 條紋上 $\sigma_x - \sigma_y$ 之二倍，並類推。因此計算主應力差時，必須知各條紋之階數，及第一階條紋所代表之應力差，或條紋值(fringe value)。

紋值可由簡拉一長條決定之。因應力係均勻分布故無紋出現，幕上明暗一致。荷力爲零時將爲暗色。應力增加時開始明亮，當應力差(此處即拉應力)接近紋值時變暗。再加荷力時又變亮，當應力兩倍於紋值時再變亮，如此類推。類似之明暗循環將顯然出現於非均勻應

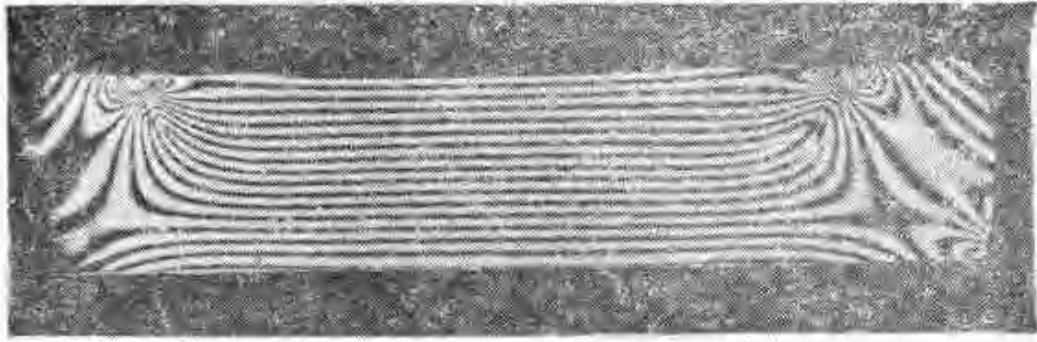


圖 101

力場內任何一點上，倘荷力增加時應力差達紋值之倍數。單獨各點上此等循環，對整個應力場言，對應於條紋之逐漸移動，包括荷力增加時新進入之條紋。因此各條紋之階次可由觀察此種移動及計算條紋數目決定之。

例如，純撓矩作用下之板條所得之紋型係如圖 101 所示。各條紋平行與距荷力遠處部分各豎斷面上應力分布均相同之事實符合。當荷力遞增時可察知板條頂底均出現新條紋並向中間移動，各條紋逐漸緊湊。中和軸上應有一條紋永保持為暗色。顯然此為零階條紋($n=0$)。

第四十九節 圓形偏光鏡

吾人自以上討論知平面分光鏡對已選定之 α 值提供對應之等傾及同色線條或條紋。因此當主應力方位與偏光鏡及分析器重合處圖 101 應示暗色。圖 101 事實上係由一圓形偏光鏡獲得，係平面偏光鏡之改良設計，用以避免同傾者(註)。此係圖 99b 所示，相當於圖 99a 另加兩四分之一波板 Q_P, Q_A 。四分之一波板為具兩偏光軸之晶體板，對光之效應有如一均勻應力下之試模，引進如(f)式內之相差 Δ 但四分之一波板厚度係選為 $\Delta = \pi/2$ ，對離 Q_P 之光線用此值之 Δ 於(f)式，選定 α 後可得一簡單之結果，此角現為 P 之極化平面及 Q_P 之一

(註) 如偏光鏡及分析器旋轉，其各軸保持垂直，則帶條靜止，等傾線移動。轉動迅速時等傾線不顯明。圓形偏光鏡與純光學方法效應相同。

軸間之角，如 45° 。如此則得

$$x_2' = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \psi \quad y_2' = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \psi \quad (\text{h})$$

此處 x_2' 對於四分之一板之“快”軸。具此等位移分量點之移動係一圓形。故此一光線稱為圓形偏光。

分量 (h) 係沿 Q_P 之偏光軸。用 β 代表 x_2' 與試模內 σ_x 方向間之角 (圖100b)， Δ 為受應力單元所造成之相差，知光離開試模時，僅由 x_2' 得

$$x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \beta \cos \psi \quad y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \beta \cos(\psi - \Delta) \quad (\text{i})$$

僅由 y_2' 之光線為

$$x_3 = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \beta \sin \psi \quad y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \beta \sin(\psi - \Delta) \quad (\text{j})$$

將 (j) 及 (i) 式各分量相加，得離試模時光線

$$x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \psi' \quad y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin(\psi' - \Delta) \quad (\text{k})$$

內 $\psi' = \psi + \beta$ 。

考察 Q_A 及 A 對光線影響前，視 (k) 為為兩圓周運動之重疊將較便利。此可證示如下。用 ψ'' 代表 $\psi' - (\Delta/2)$ ， b 代表 $a/\sqrt{2}$ ，

(k) 式可寫為

$$x_3 = b \cos\left(\psi'' + \frac{\Delta}{2}\right) = b \left(\cos \frac{\Delta}{2} \cos \psi'' - \sin \frac{\Delta}{2} \sin \psi'' \right) \quad (\text{l})$$

$$y_3 = b \sin\left(\psi'' - \frac{\Delta}{2}\right) = b \left(\cos \frac{\Delta}{2} \sin \psi'' - \sin \frac{\Delta}{2} \cos \psi'' \right) \quad (\text{m})$$

此代表半徑為 $b \cos(\Delta/2)$ 之圓周運動，在圖100b順時向 (光線經紙面向下)，與半徑為 $b \sin(\Delta/2)$ 逆時向圓周運動之重疊。

吾人現可證示如偏光軸 A 置於 Q_A 偏光軸 45° ，圓周運動之一傳遞於 S 幕上，另一圓周運動消失，預期結果無等傾之同色線即可出現。

方程式 (1) 及 (m) 內 x_3 及 y_3 各分量均係試模主應力之方向。對圓周運動更改其轉軸將僅使相角 ψ'' 更改一常數。因此順時圓周運動可由沿 Q_A 之分量

$$x_4 = c \cos \psi \quad y_4 = c \sin \psi \quad (n)$$

代表之，內 ψ 仍為 $pt + \text{常數}$ 之形式，取 x_4 為 Q_A 之快軸，則由 Q_A 之射線為

$$x_3 = c \cos \psi \quad y_3 = c \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -c \cos \psi \quad (o)$$

ψ 再次更換一常數。

如置分析器 (A) 與 Ox_4 及 Oy_4 成 45° (圖100c)，位移 (o) 沿此方向分量為

$$c \cos 45^\circ \cos \psi - c \cos 45^\circ \cos \psi$$

亦即零值，故順時圓周運動消失。

同一方式考察運動 (1) 及 (m) 式內逆時部分，即

$$x_4' = -c \sin \psi \quad y_4' = -c \cos \psi \quad (n')$$

沿分析器傳遞之位移為

$$-c \cos 45^\circ \sin \psi - c \cos 45^\circ \sin \psi$$

幅度為

$$\sqrt{2}c \text{ 或 } \sqrt{2}b \sin \frac{\Delta}{2} \text{ 或 } a \sin \frac{\Delta}{2} \quad (p)$$

因 $b = a / \sqrt{2}$ ， a 為脫離偏光器時之幅度。對在儀器內光線之損失未予計入，將此結果與平面偏光鏡之 (g) 式相比，知因數 $\sin 2\alpha$ 現不存在，故同色線出現於幕上，但無等傾線。

如 Δ 為零，幅度 (p) 亦為零。因此，如無試模，或試模無荷力

時，幕爲暗色，此時爲一暗場背景。如分析器軸對 Q_A 轉動 90° ，應得一光場而前此暗紋變爲光紋。用平面偏光鏡如偏光器及分析器各軸平行時將有相同效應。

第五十節 偏光彈性應力測定例

偏光彈性法對洞孔邊界及凹角處應力集中之研究已提供特別重要之結果。在此等例中，最大應力出現於邊界上，可直接以光學方法求得，因自由邊界上主應力之一爲零。

圖 102 示受力偶 M 撓曲曲桿之條紋型式(註)。外半徑爲內半徑三倍。右方末端條紋順序數字示頂底最大值爲9。有規則之間隔對應於直線上撓曲應力之線性分布。頂面條紋次序示曲幹部分應力分布(整個試模繼續延伸於頂面以上，此面爲對稱面)，內邊壓應力爲13.5，

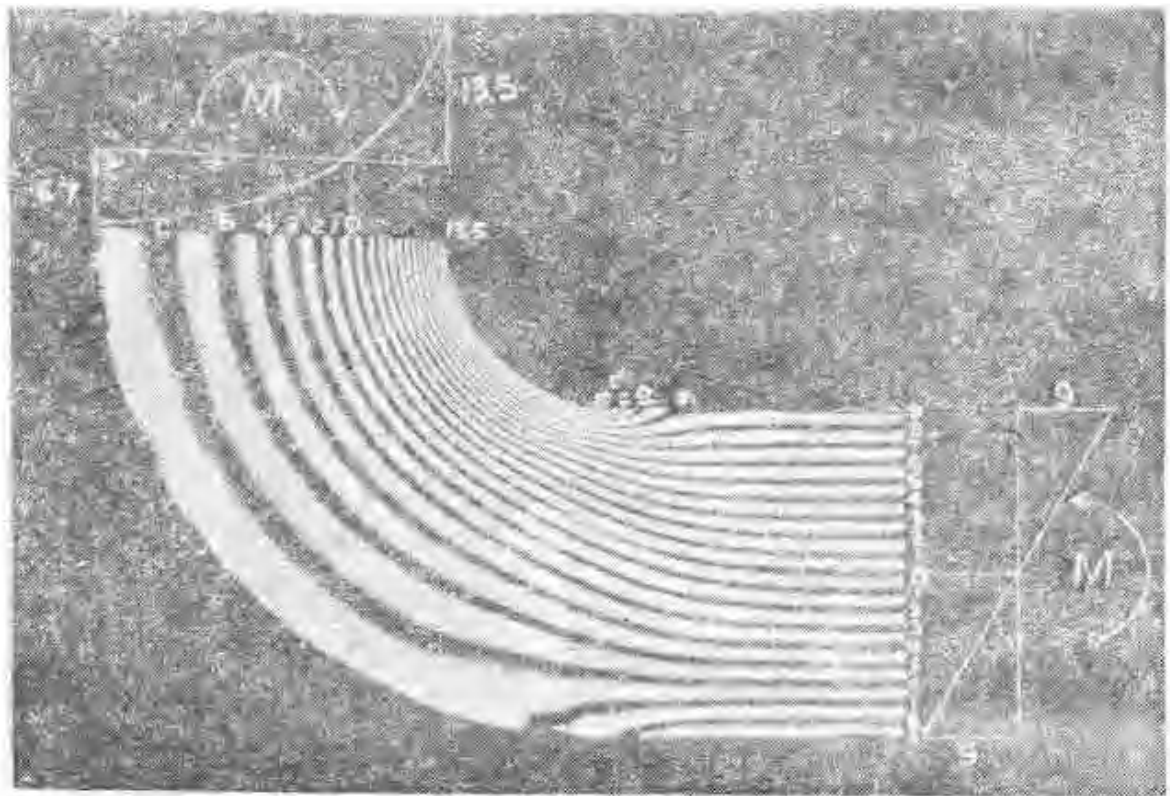


圖 102

(註) E. E. Weibel, *Trans. ASME*, vol. 56, p. 637, 1934.

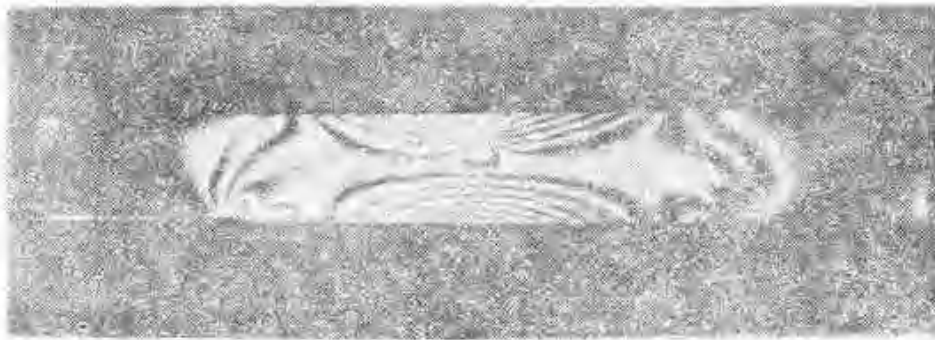


圖 103

外邊拉應力為6.7。此等值與理論上正確解極為接近。圖103及104代表（註）荷力於中點梁之撓曲。接近荷力點暗條紋之密度分布示高應力集中。經一斷面條紋數目當斷面距中點距離增加時降低。此係撓矩降低之結果。

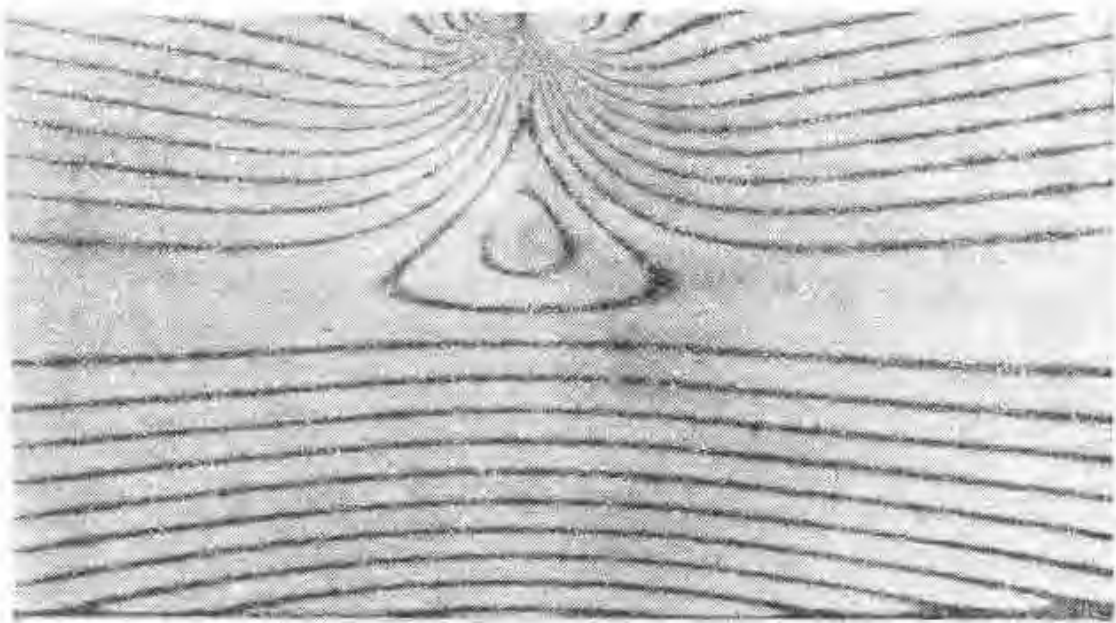


圖 104

圖 105 為板具兩不同寬度時荷中心力之應力分布，由圖可知最大力出現於填角終點處。此最大應力與板較窄部分平均應力比例稱為應

（註）M. M. Frocht, *Trans. ASME*, vol. 53, 1931.



圖 105

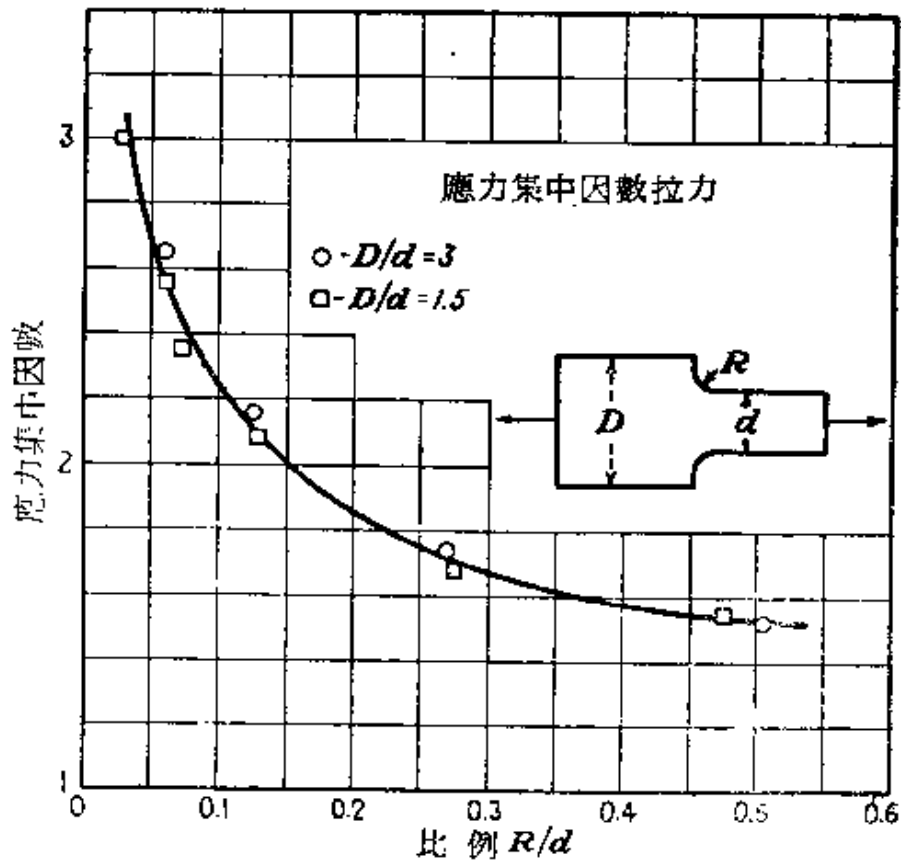


圖 106

應力集中因數。此視填角半徑 R 與板寬 d 而定。若干由實驗所得 (註) 應力集中因數見圖106。由圖知當比例 R/d 減低時最大應力增加甚速， $R/d = 0.1$ 時最大應力約為平均應力兩倍餘。圖107 示同一板末端中面

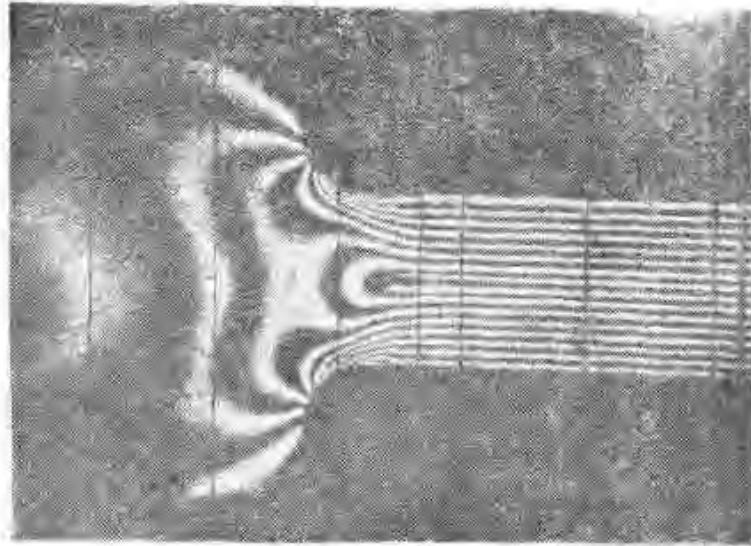


圖 107

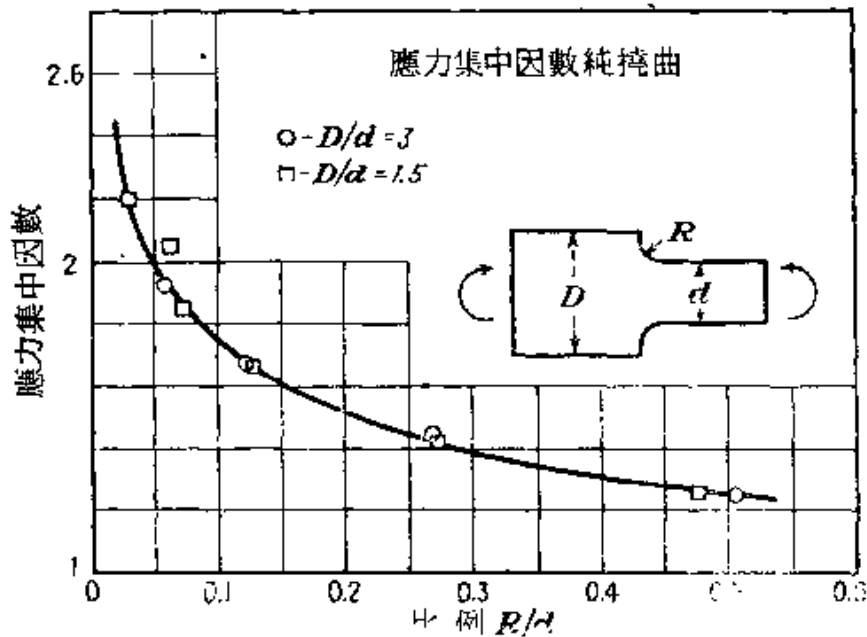


圖 108

(註) 各種例之類似曲線，由理論及實驗方法所得，見 R. E. Peterson 書，
 “Stress Concentration Design Factors”，John Wiley and
 Sons, Inc., New York, 1953, 及 R. B. Heywood, “Designing
 by Photoelasticity”, Chapman & Hall, Ltd., London, 1952.

上受力偶作用。圖 108 爲應力集中因數，其定義爲填處最大應力與窄部 (d) 通常最大纖維應力比例。如計設時填角受空間限制時，橢圓式 (註 1) 可能較圓式爲佳。

第五十一節 主應力之測定

通常之偏光鏡，如前所述，僅能測定各主應力差，及其方向，如需試模內各點上主應力值，或邊界無荷力處之主應力，則需進一步度量或計算。多種方法曾被使用，及經提議使用，現僅簡單敘述其中數種 (註 2)。

主應力和可由度量板厚度變更求得 (註 3)，由應力所造成之厚度減低爲

$$\Delta h = \frac{h\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{a})$$

故如每點上量出 Δh ， $\sigma_x + \sigma_y$ 即可算得。爲此目的曾已設計若干特殊形式之伸長儀 (註 4)。試模置於光學平板上所造成之干擾條紋型，使由板厚度變化所造成不同厚度之空氣薄膜，提供單幅照片所需知識。

主應力和所適應之微分方程式，17節 (b)，與常拉力下薄膜之位移方程式相同。如兩邊界值亦使對應時，薄膜位移將在某一比率下代表 $\sigma_x + \sigma_y$ (註 5)。多數例中邊界上 $\sigma_x + \sigma_y$ 值可由偏光彈性條紋求得。自由邊界處主應力之一，設爲 σ_y ，爲零，此時 $\sigma_x + \sigma_y$ 與 $\sigma_x - \sigma_y$ 相同。另如在一邊界點上荷力與邊界正交值爲已知時，此自成一主應力，偏

(註 1) M. M. Frocht and D. Landsberg, *J. Appl. Mech.*, vol. 26, pp 448-450, 1959.

(註 2) 其他參考資料見第 156 頁附註 3。

(註 3) 此法係 Mesnager 所建議，*loc. cit.*

(註 4) 閱 M. M. Frocht, "Photoelasticity", *op. cit.* vol. 2.

(註 5) J. P. Den Hartog, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 11, p. 156, 1931.

光彈性所量得主應力差足以決定其和。電流經一平板時電位適應同一微分方程式，此可為電比方法之根據（註1）。有效之數值亦曾發展以代替此等實驗方法。此在本書附錄中討論。主應力亦可純粹用偏光彈性決定，詳見附註1論文。

第五十二節 三維偏光彈性

通常偏光彈性試模實驗時係在室內溫度加載，卸荷後條紋型態立即消。因光線必須經過整個厚度，僅當試模為平面應力狀態時條紋型式解釋始具意義。設非如此，如三維應力分布例中，光學效應為含沿光線所有各點上應力之積分（註2）。

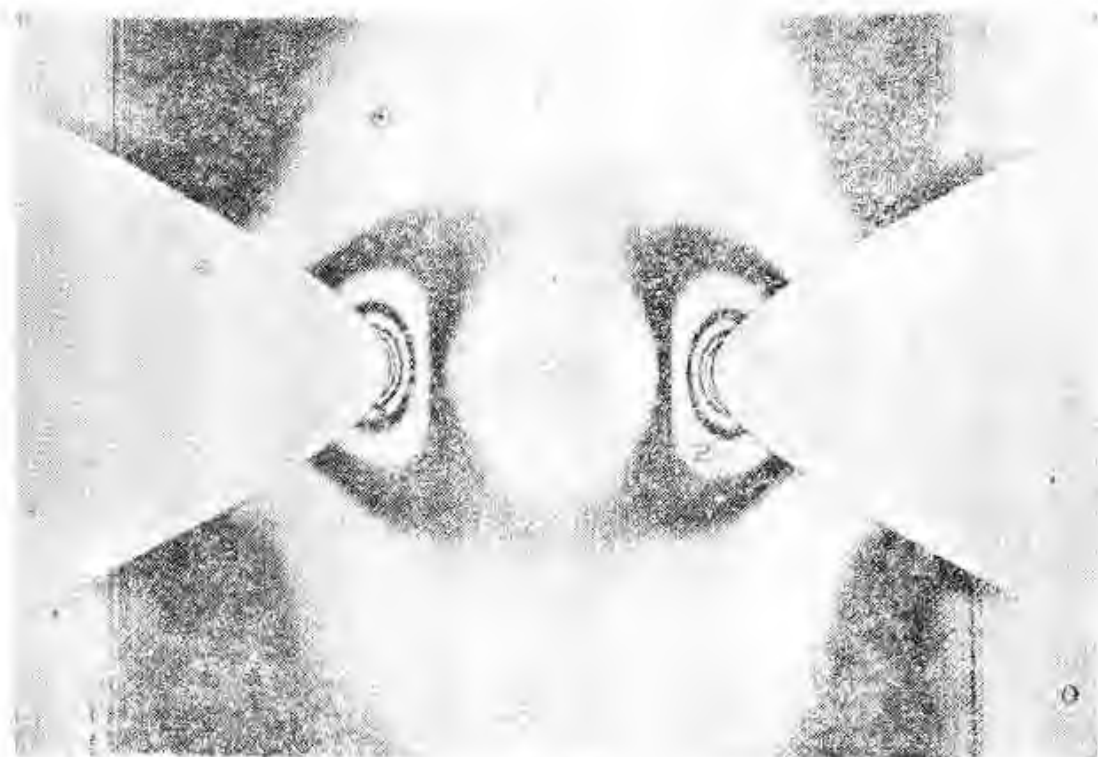


圖 109

（註1）見 R. D. Mindlin, *J. Appl. Physics.*, vol. 10, p. 282, 1939.

（註2）見 D. C. Drucker 所寫“Handbook of Experimental Stress Analysis”一節。對三維偏光彈性有詳盡討論。

此項困難可由勃魯司特 (Brewster) 及馬克司威爾(註1) (Clerk Maxwell) 之觀察為根據之方法予以克服，膠質材料，如雲母，使在荷力下乾燥，然後卸力，在偏光鏡內保持一永久條紋型式有如仍在荷力及彈性中。電木等樹脂物體高溫時加力然後冷卻具相同性質。其解釋(註2)為此種物質有強勁之彈性骨架結構，或分子網，加熱時不受影響。中空部分由鬆結分子所填充，加熱時可軟化。試模高溫加力時，彈性骨架承受荷力並在無阻礙情況下作彈性變形。冷卻時，骨架四周軟性物質變為凍結，即使移去荷力時，仍使骨架保持大體相同之變形。光學效應亦將大體保持，將試模分割時亦不受干擾。因此三維試模可切為薄片，每片均可用偏光鏡檢視。造成光學效應之應力狀態並非平面應力，但其餘分量 τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z 已知對 z 向光線

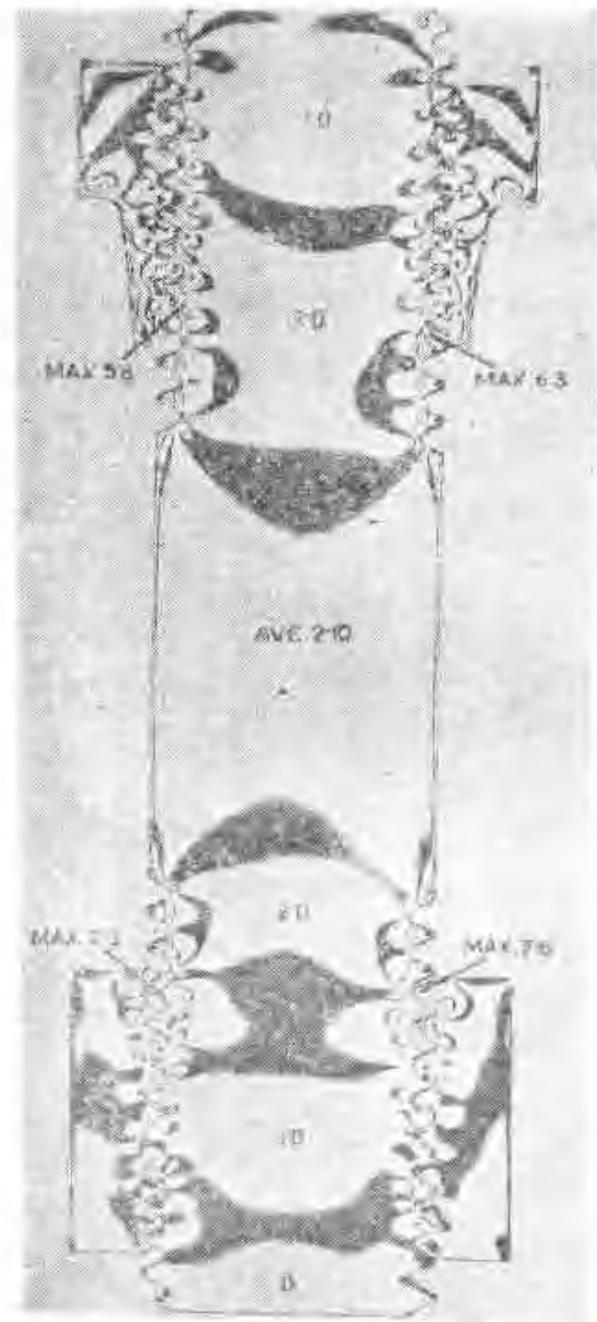


圖 110

不生影響。圖109所示之條紋型式係切自具雙曲線槽口(註3)受拉之

(註1) *Loc. cit.*

(註2) M. Hetényi, *J. Appl. Phys.*, vol. 10, p. 295, 1939.

(註3) Leven, *loc. cit.*

圓軸薄片。由此模型所得之最大應力與理論值差距在百分之二~三間(註1)。圖110示另一條模型，為電木之紋螺絲及螺帽試模(註2)。下端螺帽為通常形式，上端具錐形軸領，其應力集中較通常螺帽為小。

第五十三節 波紋 (Moré) 方法

條紋模型與位移之直接關係可以極簡便方式建立之。舉一例，設一平板在其平面內受純剪力變形。圖111a示一平板平行均勻間隔線條繪於板面，剪變形使此等線條傾斜如圖111b。每線均對中點轉動，故

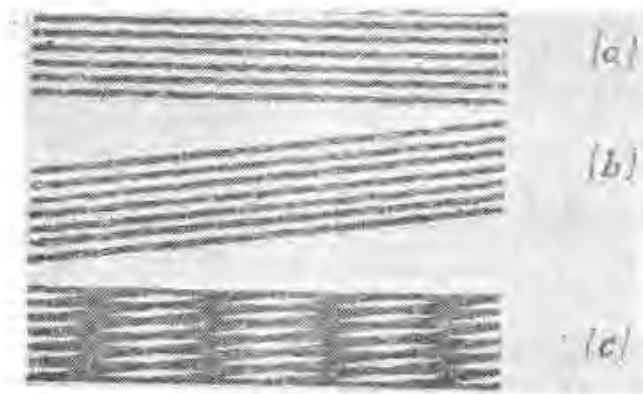


圖 111

該點無位移。豎向位移場顯然可由此等線得知。原格子(圖111a)在透明薄膜上存為副本，並重疊於圖111b之變形格子上如圖111c所示。吾人得兩格子相交各點之模式，自遠處視之，此成為頗寬廣之豎向暗帶。各暗帶中間，如圖111c之中部，成為許多白色菱形面積合為豎向光帶，經圖中點畫一豎線，吾人跨越豎向位移為零之光條紋。此經七條黑線，成一七線陰影。畫一豎線經右方(或左方)暗帶後將跨越13暗線。成一13線陰影，此暗紋之中線顯然連結具等於原格子間隔(δ)豎向位移各點，右方次一豎向光紋對應於豎向位移 2δ ，並類推，顯然各條紋為豎向位移等高線。

(註1) H. Neuber, "Kerbspannungslehre," p. 39, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1958.

(註2) M. Hetényi, *J. Appl. Mech.*, vol. 10, p. A-93, 1943.

如變形使原格不成爲曲線，則顯然暗光各帶亦變爲曲形，但仍將爲豎向位移之等高線。另如將各線拉長或縮短，帶條將爲豎向位移分量等高線。

類此，如將圖111a換爲豎格子，將得橫向位移分量之等高線。

此爲毛瑞法之一面（註1），毛瑞條紋有時稱爲機械干擾帶，關閉光線即可劃出暗帶。

圖112示此法之應用，此代表都利氏（A. J. Durelli）（註2）用毛瑞及偏光彈性法所觀察之最後結果。

圖112右上方示一受兩壓力 P 之圓盤，下方毛瑞法及偏光彈性法各曲線示主應力差 $\sigma_1 - \sigma_2$ 與 σ 平均值沿水平直徑之比例， σ 平均值爲水平直徑斷面上之平均壓應力。兩種曲線接近情況顯示毛瑞法之正確性。由位移轉換爲應力值含微分程序，圖112左上方象限示水平位移之毛瑞等高線，左下方象限爲豎向等高線。

圓盤之分析解，對集中荷力，見第41節。厚度一單位直徑 d 圓盤中心處

$$\sigma_1 = \frac{2P}{\pi d} \quad \sigma_2 = -\frac{6P}{\pi d} \quad \sigma_{\text{平均}} = \frac{P}{d}$$

理論上 $(\sigma_1 - \sigma_2)/\sigma_{\text{平均}}$ 爲 $8/\pi$ ，即2.55，比較圖112所示之實驗結果爲高，實驗值爲2.4。中心處應力可因集中力 P 在試模小面積上之實際分布狀態而受影響。

（註1）對光學方面一般討論見 M. Stecher, *Am. J. Phys.*, vol. 32, pp. 247-257, 1964. 完整參考資料見 P. S. Theocaris 所寫於 H. N. Abramson, H. Hiebowitz, J. M. Crowley, S. Juhasz (eds.) "Applied Mechanics Surveys", pp. 615-626, Spartan Books, Washington D. C., 1966.

（註2）J. N. Goodier, *Trans. ASME*, vol. 54, pp. 173-183, 1932.

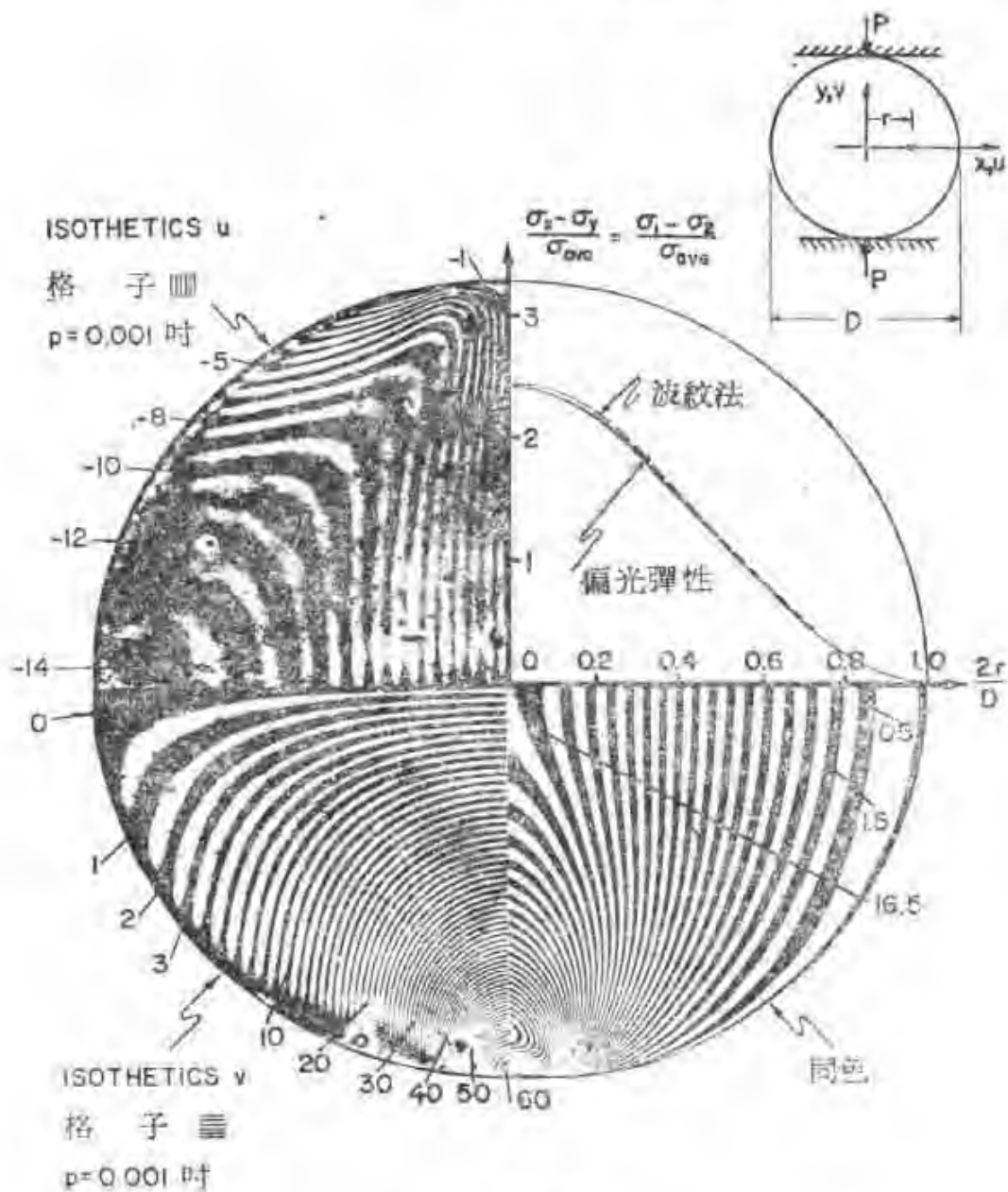


圖 112

第六章 曲線坐標之二維問題

第五十四節 複變函數

前此所解各種問題，用直線坐標或極坐標即已足夠。但對其他邊界，如橢圓、雙曲線、非同心圓、及較複雜曲線，通常用其他坐標較適宜。爲此，及建立適當應力函數，以採用複變數爲有利。

兩實數 x, y 可成一複數 $x+iy$ ， i 代表 $\sqrt{-1}$ 。因 i 不屬於實數系統，相等、相加、相減、相乘及相除之意義必須另予規定。其他運算則與實數同。例如

$$(x+iy)^2 = x^2 + 2xiy + (iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \quad \text{因 } i^2 = -1$$

轉換爲極坐標，如圖113，

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{a})$$

因

$$\cos \theta + i \sin \theta = 1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \dots + i(\theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \dots)$$

及

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

得

$$\cos \theta + i \sin \theta = 1 + i\theta + \frac{1}{2!} (i\theta)^2 + \frac{1}{3!} (i\theta)^3 + \frac{1}{4!} (i\theta)^4 + \dots = e^{i\theta}$$

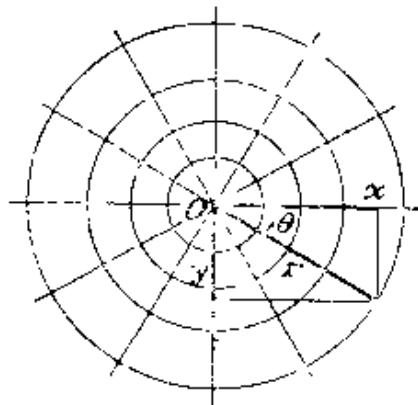


圖 113

當 θ 爲實值時，上式可視爲 $e^{i\theta}$ 之定義，由 (a) 式得

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (\text{b})$$

代數、三角、指數、對數及其他函數皆可由 z 造成與對實數相同，倘採用一分析定義而非幾何定義。因此 $\sin z$ ， $\cos z$ ，及 e^z 均可由其冪級數規定之。任何此等函數可分為實值及虛值兩部分，即寫為 $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ ，內 $\alpha(x, y)$ 為實值部分， $i\beta(x, y)$ 為虛值部分，例如，設 z 之函數為 $1/z$ ，則

$$f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{z}{x^2+y^2} + i \frac{(-y)}{x^2+y^2}$$

如可能，通常最便捷分離實值與虛值兩部方法為引用指數函數，例如

$$\begin{aligned} \sinh z &= 1/2(e^{x+iy} - e^{-(x+iy)}) \\ &= 1/2[(e^x - e^{-x})\cos y + (e^x + e^{-x})i \sin y] \\ &= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \end{aligned}$$

類此可得

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

複數函數之共軛，由定義，為以 $-i$ 代 i 所得之函數。複變函數與其共軛之乘積顯然為實值，在 (b) 式中 $x+iy$ 之共軛為 $x-iy$ ，並曾用以得實數分母。用同一法則可分離 $\coth z$ 如下

$$\begin{aligned} \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{(e^{x+iy} + e^{-x-iy})}{(e^{x+iy} - e^{-x-iy})} \cdot \frac{(e^{x-iy} - e^{-x+iy})}{(e^{x-iy} - e^{-x+iy})} \\ &= \frac{\sinh 2x - i \sin 2y}{\cosh 2x - \cos 2y} \quad (\text{c}) \end{aligned}$$

$f(z)$ 對 z 之導數由定義為

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (\text{d})$$

此處 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ， $\Delta z \rightarrow 0$ 時，須 $\Delta x \rightarrow 0$ 及 $\Delta y \rightarrow 0$ 。吾人永可視平面上一點之直角坐標。故 Δx 及 Δy 代表移轉至一臨點。吾人或將預料對不同方向移動時對 (d) 式可能有不同結果。但實際上極限 (d) 可直接由 z 及 Δz 計算，如對實數所用方式相同。例如

$$\frac{d}{dz}(z^2) = 2z \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

而此與 Δz ，即 Δx 及 Δy 之選擇無關。因此，對所有由 z 所成立之函數而與實數函

數具相同性質者，其導數將僅視 z 而定，在 z 點處對所有移動 (Δz) 方向其值均相同。此種函數稱為解析。

量 $x-iy$ 可視為 z 之函數，因 z 為已知時， x 及 y 即為已知，而 $x-iy$ 即決定。其對 z 之導數為 $(\Delta x - i\Delta y)/\Delta x + i\Delta y$ 當 $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ 時之極限。此極限對 $\Delta x, \Delta y$ 移動方向則非獨立，如取 y 向移動， $\Delta x = 0$ ，極限值為 -1 。如取 x 向移動， $\Delta y = 0$ ，極限值為 1 。故 $x-iy$ 不為 $x+iy$ 之解析函數。解析函數及 $x-iy$ 以下將共用於建立應力函數。任何函數內含 i 者將稱為複函數。

解析函數 $f(z)$ 將具有不定積分，其定義為對 z 微分導數為 $f(z)$ 之函數，並寫為 $\int f(z) dz$ 。例如，如 $f(z) = 1/z$ ，則

$$\int \frac{1}{z} dz = \log z + C$$

附加常數 C 現為一複數 $A + iB$ ，含兩任意實數 A 及 B 。

第五十五節 解析函數及拉普拉司方程式

解析函數 $f(z)$ 可視為 x 及 y 之函數，具備導數。因此

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{d}{dz} f(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \quad (a)$$

因 $\partial z / \partial x = 1$ 。類此，

$$\frac{\partial}{\partial y} f(z) = f'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = if'(z) \quad (b)$$

因 $\partial z / \partial y = i$

但如 $f(z)$ 例寫為 $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ ，或簡寫為 $\alpha + i\beta$ ，可得

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad \text{及} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad (c)$$

比較 (c) 式及 (a) 與 (b) 兩式，知

$$i \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad (d)$$

因 α, β 為實值， $i^2 = -1$ ，而上式內實虛部分分別相等，故

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (e)$$

此稱為庫希-黎曼方程式 (Cauchy-Riemann equations)。將第一式對 x 微

分，第二式對 y 微分，相加後可消去 β ，得

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0 \quad (f)$$

此型之方程式稱為拉普拉司方程式 (Laplace's equation)，其解稱為調和函數 (harmonic function)。用相同方式，對 (e) 消去 α ，得

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0 \quad (g)$$

故如兩 x 及 y 之函數 α 與 β 為解析函數 $f(z)$ 之實虛部分，每部分將為拉普拉司方程式之解，拉普拉司方程式在多數物理問題中均出現，彈性學亦在內〔例如，第 17 節 (b) 式〕。

函數 α 及 β 稱為共軛調和函數。顯然，如已調和函數 α ，由 (e) 式可決定另一函數 β 〔常數除外〕，共軛於 α 。

為例示由解析函數 z 導調和函數，取 e^{inz} ， z^n ， $\log z$ ， n 為實常數。

$$e^{inz} = e^{inx} e^{-ny} = e^{-ny} \cos nx + i e^{-ny} \sin nx$$

式中 $e^{-ny} \cos nx$ ， $e^{-ny} \sin nx$ 為調和函數。換 n 為 $-n$ 知 $e^{ny} \cos nx$ ， $e^{ny} \sin nx$ 亦為調和，並因此知

$$\sinh ny \sin nx, \quad \cosh ny \sin nx, \quad \sinh ny \cos nx, \quad \cosh ny \cos nx \quad (h)$$

為調和，因此等函數均可由上項函數加減後附因數 $1/2$ 造成。由

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n \cos n\theta + ir^n \sin n\theta$$

可得以下各調和函數

$$r^n \cos n\theta, \quad r^n \sin n\theta, \quad r^{-n} \cos n\theta, \quad r^{-n} \sin n\theta \quad (i)$$

由

$$\log z = \log re^{i\theta} = \log r + i\theta$$

得調和函數

$$\log r, \quad \theta \quad (j)$$

函數 (i) 及 (j) 可驗證適應極坐標拉普拉司方程式，即

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (k)$$

習 題

1. 求 x 及 y 之實值函數 z^2 , z^3 , $\tanh z$ 之實值及虛值部分。

$$\{x^2 - y^2, 2xy; x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3\};$$

$$\{\sinh 2x(\cosh 2x + \cos 2y)^{-1}, \sin 2y(\cosh 2x + \cos 2y)^{-1}\}$$

2. 求 r 及 θ 之實值函數為複函數 z^{-2} , $z \log z$ 之實值及虛值部分

$$\{r^{-2} \cos 2\theta - r^{-2} \sin 2\theta, r \cos \theta - r\theta \sin \theta, r \log r \sin \theta + r\theta \cos \theta\}$$

3. 如 ζ 為一複變數, $z = c \cosh \zeta$, 求

$$\frac{d}{dz} \sinh n\zeta$$

以 ζ 表示之。寫 $\zeta = +i\eta$ 求此導數之實虛兩部分。

4. 如 $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $z = ia \coth 1/2\zeta$, 證

$$x = \frac{a \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad y = \frac{a \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}$$

第五十六節 調和及複變函數之應力函數

如 ψ 為 x 及 y 之任何函數, 由微分可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x\psi) = x\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (a)$$

如 ψ 為調和, 有方括弧為零。 $\partial \psi / \partial x$ 亦為調和, 因

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = 0$$

故對 (a) 式重複拉普拉司運算得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x\psi) = 0 \quad (b)$$

另一寫法為

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)(x\psi) = 0$$

與第 32 頁 (a) 式比較, 說明 $x\psi$ 可用為應力函數, ψ 係調和者。同樣, $y\psi$ 亦為應力函數, 另 ψ 本身亦然。

由直接微分可證 $(x^2 + y^2)\psi$ ，即 $r^2\psi$ ，亦適應同一微分方程式，故可取為應力函數，如 ψ 為調和。

例如，取兩調和函數

$$\sinh ny \sin nx \quad \cosh ny \sin nx$$

此為上節 (h) 式所屬，乘以 y 後，由重疊可得應力函數 (d) 第 頁。取上節調和函數 (i) 及 (j)，乘以 x ， y ， r^2 ，可建立極坐標應力函數通式所有各項，式 (80)，第 137 頁。

現示任何應力函數可由兩任意函數以此方式構成之。

將拉普拉司運算子

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

以 ∇^2 表示之，第 32 頁 (a) 式可寫為 $\nabla^2(\nabla^2\phi) = 0$ 或 $\nabla^4\phi = 0$ 。寫 P 為 $\nabla^2\phi$ ，代表 $\sigma_x + \sigma_y$ ， P 為一調和函數，故另有一共軛調和函數 Q 。因此 $P + iQ$ 為 z 之解析函數，故可寫

$$f(z) = P + iQ \quad (c)$$

此函數對 z 之積分為另一解析函數，寫為 $4\psi(z)$ 。取 p 及 q 為 $\psi(z)$ 之實值及虛值部分，吾人得

$$\psi(z) = p + iq = 1/4 \int f(z) dz \quad (d)$$

故 $\psi'(z) = 1/4 f(z)$ 。另得

$$\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \psi(z) = \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (P + iQ)$$

使實值部分相等，得

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{4} P \quad (e)$$

因 p 及 q 為共軛函數，適應第 55 節 (e) 式，故

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4} P \quad (f)$$

因 $P = \nabla^2 \phi$ ，(e) 及 (f) 式顯示 $\phi - xp - yq$ 爲一調和函數。因

$$\nabla^2(\phi - xp - yq) = \nabla^2 \phi - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (g)$$

故對任何應力函數 ϕ 可得

$$\phi - xp - yq = p_1$$

內 p_1 爲某調和函數。因此，

$$\phi = xp + yq + p_1 \quad (83)$$

此示任何應力函數可由適當選擇之共軛調和函數 p ， q 及一調和函數 p_1 構成之。

方程式 (83) 以後將加應用，但同時取 p 及 q 並非必要，不用 (g) 式吾人可寫

$$\nabla^2(\phi - 2xp) = \nabla^2 \phi - 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

此示 $\phi - 2xp$ 調和，稱爲 p_2 ，故任何應力函數可寫爲下式

$$\phi = 2xp + p_2$$

內 p 及 p_2 爲適當選擇之調和函數。類此，取 $\phi - 2yq$ ，可證示任何應力函數亦可寫爲下式

$$\phi = 2yq + p_3$$

內 q 及 p_3 爲適當選擇之調和函數。

回視 (83) 式，設引進函數 q_1 ，爲 p_1 之共軛調和，並寫

$$\chi(z) = p_1 + iq_1$$

如此則可驗證

$$(x - iy)(p + iq) + p_1 + iq_1$$

之實值部分與 (83) 左右方完全相同，故任何應力函數可用下式表示之 (註)。

(註) 參考 E. Goursat, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 26 p. 206, 1898.
N. I. Muskhelishvili, *Math. Ann.*, vol. 107, pp. 282-312, 1932.

$$\phi = \operatorname{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)] \quad (84)$$

內 Re 意為“實值部分”， \bar{z} 指 $x-iy$ ， $\psi(z)$ 及 $\chi(z)$ 為適當選擇之解析函數。反之(84)式提供一應力函數，對任何選擇之 $\psi(z)$ 及 $\chi(z)$ 為第32頁(a)式之解。此將應用於若干具實際意義之問題。

寫(84)式括弧內之複值應力函數為

$$\bar{z}z \frac{\psi(z)}{z} + \chi(z)$$

因 $\bar{z}z = r^2$ ， $\psi(z)/z$ 仍為 z 之函數，知任何應力函數可寫為

$$r^2 p_4 + p_5$$

內 p_4 及 p_5 均調和。

第五十七節 對應於已知應力函數之位移

前於第43節中說明多重連結區域內應力之決定需計算位移以保證其為非繼續者，亦即保證應力一部並非由脫節所致。為此原因，及對位移本身值為所需要時，吾人需一方法以求位移函數 u 及 v 。

平面應力系統之應力-應變關係，方程式(22)及(23)，可寫為

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu \sigma_y \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu \sigma_x \quad (a)$$

$$G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \tau_{xy} \quad (b)$$

代應力函數於第一式，用 $P = \nabla^2 \phi$ ，得

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \left(P - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ &= -(1+\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + P \end{aligned} \quad (c)$$

同此，另得

$$E \frac{\partial v}{\partial y} = -(1+\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + P \quad (d)$$

由56節方程式 (f) 及 (g)，吾人可用 $4\partial p/\partial x$ 代替 (c) 式之 P 。如此，則除以 $(1+\nu)$ 後，得

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{4}{1+\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad 2G \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{4}{1+\nu} \frac{\partial q}{\partial y} \quad (e)$$

積分後，得

$$2Gu = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu} p + f(y) \quad 2Gv = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu} q + f_1(x) \quad (f)$$

內 $f(y)$ 及 $f_1(x)$ 爲任意函數，代入 (b) 式左方，得

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{2}{1+\nu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{df}{dy} + \frac{1}{2} \frac{df_1}{dx} = \tau_{xy} \quad (g)$$

但左方第一項爲 τ_{xy} ，而括弧內爲零，因 p 及 q 爲適應庫希-黎曼方程式 (見第56節) 之共軛調和函數。因此

$$\frac{df}{dy} + \frac{df_1}{dx} = 0$$

此指

$$\frac{df}{dy} = A \quad \frac{df_1}{dx} = -A$$

A 爲一常數。故 (f) 式內 $f(y)$ 及 $f_1(x)$ 代表剛體位移。不計此等項目，(f) 式可寫爲 (註)

$$2Gu = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu} p \quad 2Gv = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu} q \quad (h)$$

並了解剛體位移可以附加。當 ϕ 爲已知時，此等方程式可用以求 u 及 v 。吾人先須求代表 $\nabla^2 \phi$ 之 P 值，由庫希-黎曼方程式

(註) 見 A. E. Love, "Mathematical Theory of Elasticity" 4th ed., Arts. 144 及 146, Cambridge University Press, New York, 1927.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

決定其共軛函數 Q 以得函數 $f(z) = P + iQ$ ，然後積分 $f(x)$ 如第56節式 (d)。如此則 (h) 式各項即可計算。

方程式 (f) 在以後應用時將顯示其優點，即第三及第四章所用決定位移方法不適用時。

第五十八節 複位函數之應力及位移

前此應力及位移分量均由應力函數 ϕ 表示之。但因方程式 (84) 將 ϕ 以兩函數 $\psi(z)$ 及 $\chi(z)$ 代表，故可將應力及位移以兩複位函數表示之。

任一複函數可寫為 $\alpha + i\beta$ ， α 及 β 均為實值。對此，有一對應之共軛 (註1)， $\alpha - i\beta$ ，用下式表示此函數

$$\bar{f}(\bar{z}) = \alpha - i\beta \quad (\text{a})$$

故如 $f(z) = e^{inz}$ ，即得

$$\bar{f}(\bar{z}) = e^{in\bar{z}} = e^{-in(x-iy)} = e^{-inx} e^{-ny} \quad (\text{b})$$

此可與

$$f(\bar{z}) = e^{in\bar{z}}$$

對比以示 (a) 式上 f 內小橫之意義。

顯然

$$f(z) + \bar{f}(\bar{z}) = 2\alpha = 2 \operatorname{Re} f(z)$$

同樣方式，如在 (84) 式括弧內加函數之共軛，其和將為此函數值部分之兩倍，故 (84) 式可寫為

$$2\phi = z\psi(z) + \chi(z) + z\bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z}) \quad (\text{85})$$

由微分得

(註1) 此處“共軛”兩字之意義與“共軛調和函數”中兩字意義不同。

$$2\frac{\partial\phi}{\partial x} = \bar{z}\psi'(z) + \psi(z) + \chi'(z) + z'\bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z})$$

$$2\frac{\partial\phi}{\partial y} = i[\bar{z}\psi'(z) - \psi(z) + \chi'(z) - z'\bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})]$$

乘第二式以 i 與第一式相加，則得

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y} = \psi(z) + z'\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}) \quad (c)$$

以相同方式對第57節 (h) 式，得

$$2G(u+iv) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{4}{1+\nu}(p+iq)$$

另用第56節 (d) 式及以上 (c) 式，得

$$2G(u+iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu}\psi(z) - z'\bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z}) \quad (86)$$

此方程式對平面應力決定 u 及 v 當複位函數 $\psi(z)$ 及 $\chi(z)$ 爲已知時。對平面應變用 $\nu/1-\nu$ 代替 ν 於 (86) 式右方，如20節所述。

應力分量 σ_x , σ_y , τ_{xy} 可直接由 (85) 式之第二導數求出。但應用於曲線坐標時，以另行設法爲宜。將 (c) 式對 x 微分，得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \psi''(z) + z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) \quad (d)$$

對 y 微分並乘以 i ，得

$$i\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\psi''(z) + z\bar{\psi}''(\bar{z}) - \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) \quad (e)$$

簡化形式可由 (d) 及 (e) 式相加及相減求得。如此則 (註1)

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\psi'(z) + 2\bar{\psi}'(\bar{z}) = 4 \operatorname{Re} \psi'(z) \quad (87)$$

$$\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2[z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z})] \quad (88)$$

———

(註1) 此結果與 (86) 式爲 G. Kolossoff 在其博士論文中所得，Dorpat, 1909. 參考其論文，*Z. Math. Physik*, vol. 62, 1914.

換 (88) 式中 i 爲 $-i$ 得另一形式

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \quad (89)$$

將 (88) 式 (89) 式右方實值與虛值部分分離，得 $\sigma_x - \sigma_y$ 及 $2\tau_{xy}$ 。兩方程式 (87) 及 (89) 決定由複位 $\psi(z)$ 及 $\chi(z)$ 所表示之應力分量，因此選定 $\psi(z)$ 及 $\chi(z)$ 兩函數後，由 (87) 及 (88) 式得一可能之應力情況，再由 (86) 式求對應於此應力情況之位移。

對此方法舉一簡例，取第35頁所討論之多項式應力系統。如設

$$\psi(z) = (a_5 + ib_5)z^4 \quad \chi(z) = (c_5 + id_5)z^5$$

顯然可得一五次多項式之應力函數，式內 a_5, b_5, c_5, d_5 爲實值任意常數，如此則

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= 4(a_5 + ib_5)z^3 & \chi'(z) &= 5(c_5 + id_5)z^4 \\ \psi''(z) &= 12(a_5 + ib_5)z^2 & \chi''(z) &= 20(c_5 + id_5)z^3 \end{aligned}$$

方程式 (87) 及 (89) 提供

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} 4(a_5 + ib_5)z^3 \\ &= 16 \operatorname{Re}(a_5 + ib_5)(x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)) \\ &= 16a_5(x^3 - 3xy^2) - 16b_5(3x^2y - y^3) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[12(a_5 + ib_5)\bar{z}z^2 + 20(c_5 + id_5)z^3] \\ &= 24(a_5 + ib_5)(x - iy)(x + iy)^2 + 40(c_5 + id_5)(x + iy)^3 \\ &= [24a_5x(x^2 + y^2) - 24b_5y(x^2 + y^2) + 40c_5(x^3 - 3xy^2) \\ &\quad - 40d_5(3x^2y - y^3)] + i[24a_5y(x^2 + y^2) + 24b_5x(x^2 + y^2) \\ &\quad + 40c_5(3x^2y - y^3) + 40d_5(x^3 - 3xy^2)] \end{aligned}$$

括弧內算式各爲 $\sigma_y - \sigma_x$ 及 $2\tau_{xy}$ ，對應於此應力分布之位移分量可由 (86) 式算出，此爲

$$2G(u + iv) = \frac{3-y}{1+y}(a_5 + ib_5)z^4 - 4(a_5 - ib_5)z\bar{z}^3 - 5(c_5 - id_5)\bar{z}^4$$

顯然對一多項式應力函數其次數 $n > 2$ 者無論含若干項數僅能有四個獨立實值常數。

第八十九節 曲線上應力和、邊界條件

圖114為平板上一曲線之弧。作用於弧單元 ds 之力，由曲線左方材料施於右方者，可用分量 $\bar{X}ds$ 及 $\bar{Y}ds$ 代表之。由第10節(12)式知為

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \bar{Y} &= \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha\end{aligned}\quad (a)$$

α 為外向法線 N 與 x 軸間夾角。對單元 ds 對應之 dx 及 dy 為圖114b所

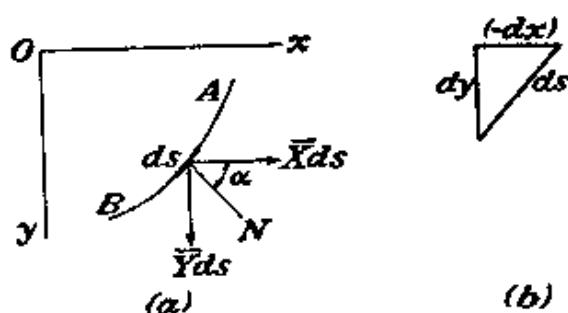


圖 114

示。沿 AB 取 ds ， x 值減小 dx 為負數，故圖114b中所示小三角形水平邊長為 $-dx$ ，因此

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}\quad (b)$$

代入此等值，另用

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

於方程式(a)，得

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$\bar{Y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

弧 AB 上合力之分量因此爲

$$F_x = \int_A^B \bar{X} ds = \int_A^B \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) ds = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_A^B$$

$$F_y = \int_A^B \bar{Y} ds = - \int_A^B \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) ds = - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_A^B$$

方括弧代表所含量在 B 及 A 處之差。

對 O 點之力矩，沿順時向，由作用於 AB 弧上之力，用方程式 (c)，爲

$$M = \int_A^B x \bar{Y} ds - \int_A^B y \bar{X} ds = - \int_A^B \left[x d \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + y d \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right]$$

部分積分後，得 (註 1)

$$M = \left[\phi \right]_A^B - \left[x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_A^B$$

由 (c) 式知如曲線 AB 代表不受外力之邊界，即 \bar{X} 及 \bar{Y} 爲零， $\partial \phi / \partial x$ 及 $\partial \phi / \partial y$ 沿 AB 須爲常數，如在 AB 上有預定之荷力，(c) 式說明其值將由 $\partial \phi / \partial x$ 及 $\partial \phi / \partial y$ 規定。此相當於已知沿 AB 之導數 $\partial \phi / \partial s$ 及正交於 AB 之導數 $\partial \phi / \partial n$ (註 2)。

現設延伸 AB 使成一閉合曲線，使 B 與 A 重合。則方程式 (d) 及 (e) 爲作用所閉合曲線內平板所受之合力及合力矩。如此等值不爲零， $\partial \phi / \partial x$ 及 $\partial \phi / \partial y$ 完成閉合路線後不回至在 A 處之起始值，故此等函數爲斷續者，如極坐標之角 θ ，僅當荷力施於閉合曲線內平板部分時 (與 F_x , F_y , M 同值反向) 方爲此種情況。

(註 1) 方程式 (d) 及 (e) 可建立平面應力與兩維黏性流體運動間之對比。參閱 J. N. Goodier, *Phil. Mag.*, Ser. 7, vol. 17, pp. 554 及 800, 1934.

(註 2) 此等邊界條件與彈性平板橫向撓度成對比。有關此對比之討論及參考資料見 R. D. Mindlin, *Quart. Appl. Math.*, vol. 4, p. 279, 1946.

用 (85) 式所示複位函數 $\psi(z)$, $\chi(z)$, (d) 兩式可寫為

$$F_x + iF_y = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_A^B = -i \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_A^B$$

或用 (58) 節 (c) 式, 得

$$F_x + iF_y = -i[\psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \chi'(z)]_A^B \quad (90)$$

方程式 (e) 變為

$$M = \text{Re}[-z\bar{z}\bar{\psi}'(\bar{z}) + \chi(z) - \bar{z}\bar{\chi}'(\bar{z})]_A^B \quad (91)$$

方程式 (90) 及 (91), 用於繞原點整個路線上, 證示如 $\psi(z)$ 及 $\chi(z)$ 係取 z^n 形式, n 為正或負整數, F_x , F_y , M 為零。此因括弧內各函數經完整閉合路線後回至其起始值。此等函數本身不能代表施於原點荷力所造成之應力。函數 $\log z = \log r + i\theta$ 對原點完成路線一周後不回至原值, 因 θ 增加 2π 。因此。如 $\psi(z) = C \log z$ 或 $\chi(z) = Dz \log z$, C 及 D 為複常數, 方程式 (90) 將取非零值之 $F_x + iF_y$ 。同理 $\chi(z) = D \log z$ 如 D 為虛值將提供一非零 M 值, 但如 D 為實值則為零。

第六十節 曲線坐標

極坐標可視為(圖113)由一圓(半徑 r)及一徑線(與起始線成 θ 角)交點所規定點之位置。由直角坐標換為極坐標可用以下兩式達成

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \quad \arctan \frac{y}{x} = \theta \quad (a)$$

予 r 各種常數值, 第一式代表圓形組, 予 θ 各種常數值, 第二式代表徑線組。

方程式 (a) 為下式

$$F_1(x, y) = \xi \quad F_2(x, y) = \eta \quad (b)$$

之特例。予 ξ 及 η 一定常數值, 此等方程式將代表兩相交曲線, 如 $F_1(x, y)$ 及 $F_2(x, y)$ 為合適之函數。不同值之 ξ 及 η 代表不同曲線及不同交點。故 xy 面上每一點相當於 ξ 及 η 之固定值, 即使 (b) 式

兩曲線須經過之值，而 ξ 及 η 可視為一點之坐標。因所定 ξ ， η 值為兩相交曲線所規定，故稱為曲線坐標（註1）。

極坐標，及其有關之應力分量，在第四章同心圓邊界問題中證明極為有用。因 r 為常數，應力位移對此種邊界言僅為 θ 之函數。如邊界含其他曲線，例如橢圓，用曲線坐標使邊界上坐標變數之一為常數自較有益。

如對 (b) 式解出 x 及 y ，吾人將得以下兩式

$$x = f_1(\xi, \eta) \quad y = f_2(\xi, \eta) \quad (c)$$

設由此等方程式開始。例如，取

$$x = c \cosh \xi \cos \eta \quad y = c \sinh \xi \sin \eta \quad (d)$$

內 c 為一常數。消去 η 得

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1$$

如 ξ 為常數，此為半軸為 $c \cosh \xi$ ， $c \sinh \xi$ ，焦點為 $x = \pm c$ 橢圓之方程式。對不同 ξ 值吾人具同焦點之不同橢圓，亦即一共焦橢圓組（圖115）。在此等橢圓上 ξ 為常數而僅 η 可變化（經一值域 2π ），

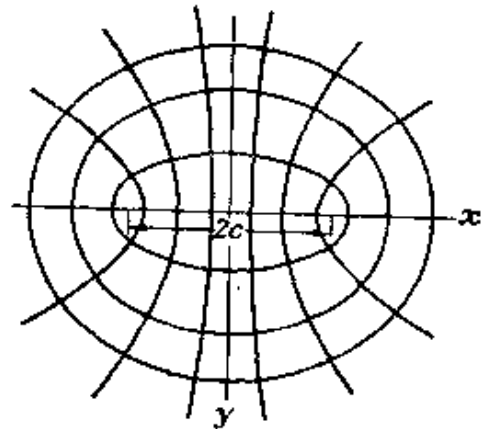


圖 115

（註1）曲線坐標之一般理論係 G. Lamé 所發展，見其所著 “Leçons sur les Coordonnées Curvilignes”, Gauthier-Villars, Paris, 1859.

如在一圓上極坐標 r 爲常數而 θ 變化爲類似情況。事實上，在此例中， η 爲橢圓上一點之偏角 (註 1)。

另一方面，如用 $\cosh \xi - \sinh \xi = 1$ 關係自 (d) 式中消去 ξ ，得

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1 \quad (e)$$

如 η 爲常數，此代表一雙曲線，具與橢圓相同之焦點，故 (e) 式爲一共焦雙曲線組，在其中任一曲線上 η 爲常數 η 變化，此種坐標稱爲橢圓坐標。

(d) 中兩方程式相當於 $x + iy = c \cosh(\xi + i\eta)$ ，或

$$z = c \cosh \zeta \quad (f)$$

內 $\zeta = \xi + i\eta$ 。顯然此爲

$$z = f(\zeta) \quad (g)$$

之一例。此式除規定 z 爲 ζ 之函數外，亦可解 ζ 爲 z 之函數，如此則 ξ 及 η 爲函數 z 之實值與虛值部分，故適應 55 節庫希-黎曼方程式 (e)，及同節拉普拉司方程式 (f) 及 (g)。

本章中所採用之曲線坐標均係導自方程式 (g)，每種均各另有其特性。如 x, y 點之曲線坐標爲 ξ, η ，鄰點 $x + dx, y + dy$ 將有曲線坐標 $\xi + d\xi, \eta + d\eta$ ，因兩 (c) 型方程式，吾人可寫

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad (h)$$

如僅 ξ 變動，對應於弧單元沿 $\eta =$ 常數之增量 dx, dy 爲

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \quad (i)$$

(註 1) 如 a, b 爲外接一橢圓圓形上一點之坐標，橢圓半軸長爲 a 及 b ，由此點至 x 軸垂直線交橢圓於 $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ ； θ 稱爲此點對橢圓之偏角。

$$(ds_{\xi})^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] (d\xi)^2 \quad (j)$$

因 $z = f(s)$ ，得

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{d}{d\xi} f(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = f'(\zeta) \quad (k)$$

內

$$f'(\zeta) = \frac{df(\zeta)}{d\zeta}$$

任何複量可寫為 $J \cos \alpha + i J \sin \alpha$ ，或 $J e^{i\alpha}$ ， J 與 α 為實值。設

$$f'(\zeta) = J e^{i\alpha} \quad (l)$$

由 (k) 式得

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = J \cos \alpha \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = J \sin \alpha \quad (m)$$

如此 (j) 式變為

$$ds_{\xi} = J d\xi$$

用 (i) 及 (m) 式， ds_{ξ} 之斜率為

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y / \partial \xi}{\partial x / \partial \xi} = \tan \alpha \quad (n)$$

因此，方程式 (1) 中之 α ，為沿 ξ 增值方向， $\eta =$ 常數曲線之切線，與 x 軸間之夾角(圖116)。同理，如僅 η 變化，對應於弧單元 ds_{η} (h) 式中 dx 及 dy 之增量，沿曲線 $\xi =$ 常數為

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

同上所述，可得

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -J \sin \alpha \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = J \cos \alpha$$

及 $ds_{\eta} = J d\eta$ ，與

$$dy/dx = -\cot \alpha$$

將此結果與 (n) 式比較，知 $\xi = \text{常數}$ 之曲線與 $\eta = \text{常數}$ 曲線相交為直角， η 增值方向與 x 軸所成之角為 $(\pi/2) + \alpha$ (圖116)。

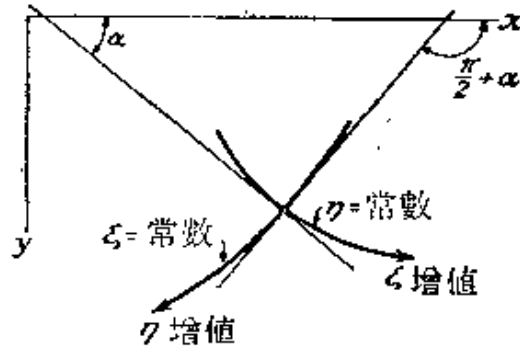


圖 116

取方程式 (f) 所規定之橢圓坐標為例。因

$$f'(\zeta) = c \sinh \zeta = c \sinh \xi \cos \eta + i c \cosh \xi \sin \eta = J e^{i\alpha}$$

比較實虛兩部分，得

$$J \cos \alpha = c \sinh \xi \cos \eta \quad J \sin \alpha = c \cosh \xi \sin \eta$$

因此

$$J^2 = c^2 (\sinh^2 \xi \cos^2 \eta + \cosh^2 \xi \sin^2 \eta) = 1/2 c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \quad (o)$$

$$\tan \alpha = \coth \xi \tan \eta \quad (p)$$

第六十一節 曲線坐標之應力分量

方程式 (86)，(87)，及 (88) 為以複位函數 $\psi(z)$ ， $\chi(z)$ 所表示之直角坐標位移及應力分量，如用曲線坐標，複位函數可取為 ζ 之函數，而 z 本身由第 60 節 (g) 式為已知規定曲線坐標之 ζ 之函數。用 ξ 及 η 表示 σ_x ， σ_y ， τ_{xy} 應無困難。但通常宜規定應力為

σ_ξ ，在 $\xi = \text{常數}$ 曲線上正交分量

σ_η ，在 $\eta = \text{常數}$ 曲線上正交分量

$\tau_{\xi\eta}$ ，在兩曲線上剪分量

此等分量均示於圖117中，將此連同圖116與圖112比較，知 σ_ξ 及 $\tau_{\xi\eta}$ 對

應於圖 112 之 σ 及 τ 。因此用 (13) 式得

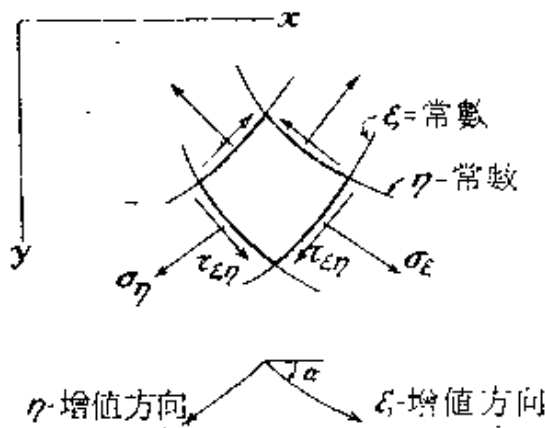


圖 117

$$\sigma_{\xi} = 1/2(\sigma_x + \sigma_y) + 1/2(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\xi\eta} = -1/2(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

換 α 爲 $\pi/2 + \alpha$ ，可得

$$\sigma_{\eta} = 1/2(\sigma_x + \sigma_y) - 1/2(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

因此可得以下各式 (註)：

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = \sigma_x + \sigma_y \tag{92}$$

$$\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} = e^{2i\alpha}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \tag{93}$$

由 $z = f(\zeta)$ 所規定曲線坐標之因子 $e^{2i\alpha}$ 可由第 (60) 節方程式 (1) 求得。此式，連同其共軛，爲

$$f'(\zeta) = J e^{i\alpha} \quad \bar{f}'(\bar{\zeta}) = J e^{-i\alpha}$$

因此

$$e^{2i\alpha} = \frac{f'(\zeta)}{f'(\bar{\zeta})} \tag{94}$$

例如，橢圓坐標中 $f'(\zeta) = c \sinh \zeta$ ，故

$$e^{2i\alpha} = \frac{\sinh \zeta}{\sinh \bar{\zeta}} \tag{95}$$

(註) 方程式 (92)，(93) 及 (95) 係 Kolosoff 所得，*loc. cit.*

用如此決定之 $e^{2i\alpha}$ 值，(92) 及 (93) 式為以 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 所表示之 $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ 之算式。

曲線坐標中位移係由沿 ξ 增值方向分量 u_ξ 及沿 η 增值方向分量 u_η 予以規定 (圖116)。如 u 及 v 為位移之直角坐標分量，則

$$u_\xi = u \cos \alpha + v \sin \alpha \quad u_\eta = v \cos \alpha - u \sin \alpha$$

因此

$$u_\xi + iu_\eta = e^{-i\alpha}(u + iv) \quad (95)$$

用 (86) 式及 $z = f(\zeta)$ ，與 (94) 式，使吾人可用 ξ 及 η 表示 u_ξ 及 u_η ，如已選定複位函數 $\psi(z)$ 與 $\chi(z)$ 。

組合 (86)，(87) 式連同 (89) 及 (92)，(93) 及 (95)，對應力及應變分量得以下各式 (最後一式中以 $-i$ 代 i)：

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] = 4 \operatorname{Re} \psi'(z) \quad (96)$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = 2e^{2i\alpha}[z\psi''(z) + \chi'(z)] \quad (97)$$

$$2G(u_\xi - iu_\eta) = e^{i\alpha} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{\psi}(z) - \bar{z}\psi'(z) - \chi'(z) \right] \quad (98)$$

吾人將應用此等方程式以解含曲線邊界之若干問題。

習 題

1. 證用極坐標時，對 $z = e^s$ ，方程式 (94) 變為 $e^{2i\alpha} = e^{2i\eta}$ 及 $\alpha = \eta = \theta$ 。
2. 用極坐標以指定複位函數求以下諸問題解，計算各應力及位移分量，各大寫字母均為常數，但不一定為實值。

(a) 一圓環 ($a < r < b$) 受內外兩邊界上剪力所造成等值反向力偶 M 作用 (圖138)。 $\psi(z) = 0$ ， $\chi(z) = A \log z$ 。

(b) 一圓環受內壓力 P_i ，外壓力 P_o 。(閱第70頁)。 $\psi(z) = Az$ ， $\chi(z) = B \log z$ 。

(c) 曲桿之純繞曲，及環之轉動脫節，如第29節及第31節。

$$\psi(z) = Az \log z + Bz, \quad \chi(z) = C \log z$$

(d) 第33節所解之問題， $\psi(z) = Az^2 + B \log z$ ， $\chi(z) = Cz \log z + D/z$ 。

(e) 有圓孔平板受拉力作用（見第35節） $\psi(z) = Az + B/z$ ， $\chi(z) = C \log z + Dz^2 + F/z^2$ 。

(f) 徑向應力分布（見第36節） $\psi(z) = A \log z$ ， $\chi(z) = Bz \log z$ 。

(g) 無限板受一集中力（見第42節） $\psi(z) = A \log z$ ， $\chi(z) = Bz \log z$ 。

第六十二節 橢圓坐標解、均勻應力板中橢圓孔

橢圓坐標 ξ ， η ，第60節中已予討論並示於圖115，其定義為

$$z = c \cosh \zeta \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (a)$$

亦即

$$x = c \cosh \xi \cos \eta \quad y = c \sinh \xi \sin \eta$$

及

$$\frac{dz}{d\zeta} = c \sinh \zeta \quad e^{2i\alpha} = \frac{\sinh \xi}{\sinh \zeta} \quad (b)$$

在一半軸為 $c \cosh \xi_0$ 及 $c \sinh \xi_0$ 之橢圓上坐標 ξ 為一常數，如半軸為 a 及 b ， c 及 ξ_0 可自下式求得

$$c \cosh \xi_0 = a \quad c \sinh \xi_0 = b \quad (c)$$

故如橢圓組中其一為已知時，全組橢圓及雙曲線組（見第187頁）即為已知。如 ξ 值甚小對應之橢圓變為細長，趨極限 $\xi = 0$ 時變為連結焦點長 $2c$ 之直線。取逐漸增大之正值 ξ 橢圓變為逐漸增大，在極限 $\xi = \infty$ 時趨於一無限圓。任一橢圓上一點當 η 自零至 2π 時（沿正 x 軸，圖115）繞橢圓一周。此處 η 類如極坐標 θ 坐標。位移及應力分量之連續性需使為對 η 為 2π 之周期性者，故當 $\eta = 2\pi$ 與 $\eta = 0$ 時將為同值。

現取一無限平板，受周圍均勻分布拉力 S 作用，內有一半軸為 a ， b 之橢圓小孔，孔邊不受任何外力（註）。此等條件可寫為

（註）平板中橢圓孔解首先由 Kolosoff 所得，*loc. cit.*，及 C. E. Inglis, *Trans. Inst. Naval Arch., London*, 1913; *Eng.*, vol. 95, p. 415, 1913. 另見 T. Pöschl, *Math. Z.*, vol. 11, p. 95, 1921. 此處所用方法係根據 Kolosoff. 同一方法曾由 A. C. Stevenson 用於若干二維彈性問題，*Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 84, pp. 129 及 218, 1945.

$$\sigma_x = \sigma_y = S \quad \text{無限遠處 } (\xi \rightarrow \infty) \quad (d)$$

$$\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0 \quad \text{孔橢圓邊界上, } \xi \text{ 值爲 } \xi_0 \quad (e)$$

由 (87) 及 (89) 式, 知 (d) 式可予適應, 如取

$$2 \operatorname{Re} \psi'(z) = S \quad \bar{z} \psi''(z) + \chi''(z) = 0 \quad \text{無限遠處} \quad (f)$$

因保持連續, 應力及位移分量須爲週期 2π , η 之週期函數。對 $\psi(z)$ 及 $\chi(z)$ 所取之形式應爲提供同週期之應力函數, 此等形式爲

$$\sinh n\zeta \quad \text{即} \quad \sinh n\xi \cos n\eta + i \cosh n\xi \sin n\eta$$

$$\cosh n\zeta \quad \text{即} \quad \cosh n\xi \cos n\eta + i \sinh n\xi \sin n\eta$$

內 n 爲一整數, 函數 $\chi(z) = Bc^2\zeta$, B 爲一常數, 亦適用於此問題。

由 (a) 式顯然當 $\xi \rightarrow \infty$, ζ 之性質與 $\log z$ 相似, 而此式之 χ 爲相關圓孔問題所需者 (26 見第 193 頁)。

取 $\psi(z) = Ac \sinh \zeta$, A 爲常數, 並對 $d\zeta/dz$ 用 (b) 之第一式, 亦即 $dz/d\zeta$ 之倒數, 得

$$\psi'(z) = Ac \cosh \zeta \frac{d\zeta}{dz} = A \frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} = A \coth \zeta \quad (g)$$

對原點無限距離處 ξ 爲無限, $\coth \zeta$ 值爲一, 如 $2A = S$ 即可適應條件 (f) 之第一項。由 (g) 式另得

$$\psi''(z) = -\frac{A}{c} \frac{1}{\sinh^2 \zeta} \quad (h)$$

及
$$\bar{z} \psi''(z) = -A \frac{\cosh \zeta}{\sinh^3 \zeta} \quad (i)$$

取 $\chi(z) = Bc^2\zeta$, B 爲一常數, 得

$$\chi'(z) = \frac{Bc}{\sinh \zeta} \quad \chi''(z) = -B \frac{\cosh \zeta}{\sinh^3 \zeta} \quad (j)$$

方程式 (i) 及 (j) 證示 $\bar{z} \psi''(z)$ 及 $\chi''(z)$ 在無限遠處爲零。因此 (f) 式內第二條件亦適應。

條件 (e) 可由適當選擇之常數 B 值予以適應。自 (96) 式中減

去 (97) 式得

$$\sigma_{\xi} - i\tau_{\xi\eta} = \bar{\psi}'(z) + \psi'(z) - e^{2i\alpha} [z\psi''(z) + \chi''(z)] \quad (k)$$

由 (b) 第二式可得 $e^{2i\alpha}$ 。因此

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} - i\tau_{\xi\eta} &= A \left(\frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} + \frac{\cosh \bar{\zeta}}{\sinh \bar{\zeta}} \right) + \frac{\sinh \zeta}{\sinh \zeta} \left(A \frac{\cosh \bar{\zeta}}{\sinh^3 \zeta} + B \frac{\cosh \zeta}{\sinh^3 \bar{\zeta}} \right) \\ &= \frac{1}{\sinh^2 \zeta \sinh \bar{\zeta}} \{ A [\sinh \zeta \sinh(\zeta + \bar{\zeta}) + \cosh \bar{\zeta}] \\ &\quad + B \cosh \zeta \} \end{aligned} \quad (l)$$

在橢圓孔邊界上 $\xi = \xi_0$ 及 $\zeta + \bar{\zeta} = 2\xi_0$, $\bar{\zeta} = 2\xi_0 - \zeta$ 。如此, 則 (l) 簡化為

$$\frac{1}{\sinh^2 \zeta \sinh \bar{\zeta}} (A \cosh 2\xi_0 + B) \cosh \zeta$$

因此, 如取

$$B = -A \cosh 2\xi_0 = -1/2S \cosh 2\xi_0 \quad (m)$$

條件 (e) 即可適應, 故

$$\psi(z) = 1/2Sc \sinh \zeta \quad z(z) = -1/2Sc^2 \cosh 2\xi_0 \cdot \zeta \quad (n)$$

所有各邊界條件現均已適應, 但吾人不能擔保複位函數 (n) 確實為問題之解, 除非其所構成之位移不含斷續。位移之直角分量為

$$2G(u + iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu} Ac \sinh \zeta - Ac \cosh \zeta \coth \bar{\zeta} - \frac{Bc}{\sinh \bar{\zeta}} \quad (o)$$

內 $A = S/2$, B 見 (m) 式, 雙曲線函數中實值與虛值部分對 η 均為週期者。因此, 在板內沿任一橢圓 $\xi = \text{常數}$, 路線經一周後 u 及 v 將回至其起始值。複位函數 (n) 如此提供此問題之解。

孔口處應力分量 σ_{η} 可由 (96) 式求出, 因此處 σ_{ξ} 為零。由 (g) 式插入 $\psi'(z)$ 值, 用 $A = S/2$, 得

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = 4 \operatorname{Re} \psi'(z) = 2S \operatorname{Re} \coth \zeta$$

但由第173頁, (c) 式

$$\coth \zeta = \frac{\sinh 2\xi - i \sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$$

因此

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \frac{2S \sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$$

而在孔口邊界上

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = \frac{2S \sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta}$$

最大值，出現於長半軸兩端處， $\eta=0$ 及 π ， $\cos 2\eta=1$ ，為

$$(\sigma_\eta)_{\max} = \frac{2S \sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 - 1}$$

由 (c) 式可知

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \sinh 2\xi_0 = \frac{2ab}{c^2} \quad \cosh 2\xi_0 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

由此等結果得

$$(\sigma_\eta)_{\max} = 2S \frac{a}{b}$$

當橢圓逐漸變為細長時此值逐漸增大。

最小值之 $(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0}$ 出現於短半軸之末端上，該處 $\cos 2\eta = -1$ 。因此

$$(\sigma_\eta)_{\min} = \frac{2S \sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 + 1} = 2S \frac{b}{a}$$

當 $a=b$ 時，橢圓變為一圓， $(\sigma_\eta)_{\max}$ 及 $(\sigma_\eta)_{\min}$ 均為 $2S$ ，此與第 95 頁所述四周勻拉力下對圓孔所得之值相符。

橢圓孔口內均勻壓力 S ，及無限遠處零應力問題，可由上解及一均勻應力情況 $\sigma_\xi = \sigma_\eta = -S$ 重疊求得，後者之複位函數為 $\psi(z) = -Sz/2$ 。

第六十三節 簡拉平板內橢圓孔

第二問題，取一無限平板受與正 x 軸成 β 角之簡拉 S (圖118)，板內受橢圓孔干擾，其長半軸沿 x 軸向。如前題。橢圓孔長軸垂直或平行於拉力 (註1) 時為問題之特例。較普遍問題，用此方法時，並不較困難。由此解吾人可求得橢圓孔對任何形態均勻平面應力之效應，此應力為無限遠處對孔口成任何角度之主應力所規定。

設 Ox' 及 Oy' 為直角坐標軸，係經轉動 Ox 一 β 角使平行於 S 所得者。如此則由方程式 (92) 及 (93)，

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \quad \sigma_{y'} - \sigma_{x'} + 2i\tau_{x'y'} = e^{2i\beta}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})$$

因在無限遠處 $\sigma_{x'} = S, \sigma_{y'} = \tau_{x'y'} = 0$ ，得

$$\sigma_x + \sigma_y = S \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -Se^{-2i\beta} \quad \text{無限遠處}$$

因此，由 (87) 式及 (89) 式

$$4 \operatorname{Re} \psi'(z) = S \quad 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] = -Se^{-2i\beta} \quad \text{無限遠處}$$

在孔邊界上 $\xi = \xi_0$ ，必須得 $\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0$

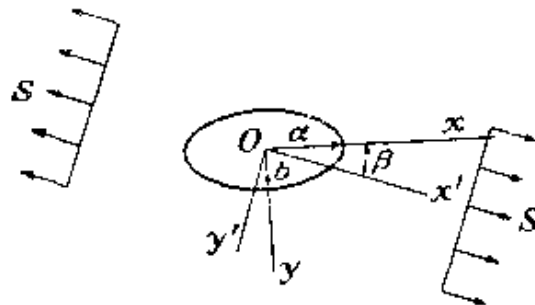


圖 118

所有此等邊界條件均可採 $\psi(z), \chi(z)$ 以下形式予以適應 (註2)

$$4\psi(z) = Ac \cosh \zeta + Bc \sinh \zeta$$

$$4\chi(z) = Cc^2\zeta + Dc^2 \cosh 2\zeta + Ec^2 \sinh 2\zeta$$

內 A, B, C, D, E 為待定常數。

(註1) 見第62節所引各文。

(註2) 見 Stevenson, *loc. cit.*

因 $z = c \cosh \zeta$ ， $4\psi(z)$ 中 $Ac \cosh \zeta$ 項即 Az 。此將對應力函數 (84 式) 提供 $\operatorname{Re} A\bar{z}z$ 或 $\operatorname{Re} Ar^2$ 一項。如 A 為虛數此為零，故 A 可立即取為實數，常數 C 亦須取實數，因吾人將上式之 $\psi(z)$ ， $\chi(z)$ 代入 (91) 式中，取曲線 AB 為橢圓孔一整週之路線，則除含 C 項外均為零，因雙曲線函數為對 ζ 週期為 2π 之週期函數。含 C 項為 $\operatorname{Re}[Cc^2(\xi + i\eta)]_A^B$ 。僅當 C 為實數時對一整週始為零。

常數 B ， D ， E 為複數，可寫為

$$B = B_1 + iB_2 \quad D = D_1 + iD_2 \quad E = E_1 + iE_2 \quad (\text{b})$$

代以上形式之 $\psi(z)$ ， $\chi(z)$ 於條件 (a) 中得

$$A + B_1 = S \quad 2(D + E) = -Se^{-2i\beta} \quad (\text{c})$$

自 (96) 式中減去 (97) 得 $\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta}$ ，其式為

$$4(\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta}) = \operatorname{cosech} \bar{\zeta} [(2A + B \coth \zeta) \sinh \bar{\zeta} \\ + (\bar{B} + B \operatorname{cosech}^2 \zeta) \cosh \bar{\zeta} + (C + 2E) \operatorname{cosech} \zeta \coth \zeta \\ - 4D \sinh \zeta - 4E \cosh \zeta]$$

在孔邊界處 $\xi = \xi_0$ 及 $\zeta = 2\xi_0 - \zeta$ 。如此 ζ 值插入上式內 $\sinh \bar{\zeta}$ 及 $\cosh \bar{\zeta}$ 中，並展開函數 $\sinh(2\xi_0 - \zeta)$ ， $\cosh(2\xi_0 - \zeta)$ ，方括弧內算式化為

$$(2A \sinh 2\alpha - 2iB_2 \cosh 2\alpha - 4E) \cosh \zeta \\ - (2A \cosh 2\alpha - 2iB_2 \sinh 2\alpha + 4D) \sinh \zeta \\ + (C + 2E + B \cosh 2\alpha) \coth \zeta \operatorname{cosech} \zeta$$

如 $\cosh \zeta$ ， $\sinh \zeta$ ， $\coth \zeta$ ， $\operatorname{cosech} \zeta$ ，之係數為零時，上式亦即孔口處 $\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta}$ 均為零。故吾人得三個方程式，連同兩個 (e) 式，須為常數 A ， B ， C ， D ， E 所適應。因 A 及 C 為實數，實際上為九個方程式由八個常數適應，即 A ， C ，及 B_1 ， B_2 ， D_1 ， D_2 ， E_1 ， E_2 。後六者為 B ， D ， E 之實值與虛值部分。各常數均為可理者，解為

$$A = Se^{2\xi_0} \cos 2\beta \quad D = -1/2Se^{2\xi_0} \cosh 2(\xi_0 + i\beta) \\ B = S(1 - e^{2\xi_0 + 2i\beta}) \quad E = 1/2Se^{2\xi_0} \sinh 2(\xi_0 + i\beta)$$

$$C = -S(\cosh 2\xi_0 - \cos 2\beta)$$

此問題之複位函數故為

$$4\psi(z) = Sc \left[e^{2\xi_0} \cos 2\beta \cosh \zeta + (1 - e^{2\xi_0 + 2i\beta}) \sinh \zeta \right]$$

$$4\chi(z) = -Sc^2 \left[(\cosh 2\xi_0 - \cos 2\beta) \zeta + 1/2 e^{2\xi_0} \cosh 2(\zeta - \xi_0 - i\beta) \right]$$

位移現可由 (98) 式決定，並可立知均為單值者。

孔口處 σ_η 可由 (96) 式求出，因該處 σ_ξ 為零。因此

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = S \frac{\sinh 2\xi_0 + \cos 2\beta - e^{2\xi_0} \cos 2(\beta - \eta)}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta}$$

當拉力 S 與長軸成直角時 ($\beta = \pi/2$)，

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = -2S \frac{e^{2\xi_0} \sin 2\eta}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta}$$

最大值，出現於長軸兩端處 ($\cos 2\eta = 1$)，化為

$$S \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right)$$

當孔逐漸變為細長時，此值作無界限之增加，當 $a = b$ 時符合前對圓孔所得之 $3S$ 。沿橢圓口最小應力值為 $-S$ ，在短半徑兩端處，此與圓孔解一致。

當拉力 S 與長軸平行時 ($\beta = 0$)，沿孔邊最大應力出現於短軸兩端，其值為 $S \left(2 + \frac{2b}{a} \right)$ 。如橢圓極為細長，此值趨於 S ，對任何 a/b 值，長軸兩端應力為 $-S$ 。

對平行於 x 及 y 軸純剪應力情況，橢圓孔之效應可由兩種拉應力系統重疊求得，一為 $\beta = \pi/4$ 之 S ，另一為 $\beta = 3\pi/4$ 之 $-S$ 。如此則

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = S e^{2\xi_0} \left[\frac{\sinh 2\xi_0 (1 + e^{-2\xi_0})}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta} - 1 \right]$$

在長短兩軸末端處此均為零，最大值為

$$\pm S \frac{(a+b)^2}{ab}$$

出現於 $\tan \eta = \tanh \xi_0 = b/a$ 處，當橢圓極爲細長時，此值變爲極大，所在處接近長軸兩端。

其他對橢圓孔之已知解爲同平面內之純撓曲(註1, 2)，拋物線式之剪力分布(註2)，等值反向集中力施於短軸兩端(註3)，孔中含剛體或彈性體填塞物受簡拉之平板(註4)，較普遍級數形式橢圓坐標之實應力函數曾被使用(註5)，其相當之複位函數可由已引用之函數構成，當問題含脫節及集中力及力偶時，連同第193頁類比之簡單函數。第62節至72節中將述及橢圓孔一般荷力情況下解法。

對橢圓孔及其他非圓孔，或填塞，在不同荷力狀態下若干其他解均已詳盡作出(註6)。

(註1) K. Wolf, *Z. Tech. Physik*, 1922, p. 160.

(註2) H. Neuber, *Ingenieur-Arch.*, vol. 5, p. 242, 1934. 此解及其他有關橢圓及雙曲線解見 Neuber 所著 "Kerbspannungslehre," 2d ed., Springer-Verlag OHG, Berlin, 1958.

(註3) P. S. Symonds, *J. Appl. Mech.*, vol. 13, p. A-183, 1946. 有限式解爲 A. E. Green 所得，見 *J. Appl. Mech.* vol. 14, p. A-246, 1947

(註4) N. I. Muskhelishvili, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 13, p. 264, 1933; L. H. Donnell "Theodore von Kármán Anniversary Volume" p. 293, Pasadena, 1941.

(註5) E. G. Coker and L. N. G. Filon, "Photo-elasticity," pp. 123, 535, Cambridge University Press, New York, 1931; A. Timpe, *Math. Z.*, vol. 17, p. 189, 1923.

(註6) N. I. Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Theory of Elasticity," 增訂修正四版，J. R. M. Radok 譯，Erven P. Noordhoff, NV, Groningen, Netherlands, 1963; G. N. Savin, "Stress Concentration around Holes," 1st ed., 1951, W. Johnson, Pergamon Press, New York, 1961; P. P. Teodorescu, One Hundred Years of Investigation in the Plane Problem of the Theory of Elasticity, in H. N. Abramson, H. Liebowitz, J. M. Crowley, and S. Juhasz (eds.), "Applied Mechanics Surveys," pp. 245-262, Spartan Books, Washington, D. C., 1966.

第六十四節 雙曲線邊界、凹口

前於第60節中說明橢圓坐標中 $\eta = \text{常數}$ 之曲線為雙曲線，第62節中說明 η 之值域可取為 0 至 2π ， ξ 為 0 至 ∞ 。

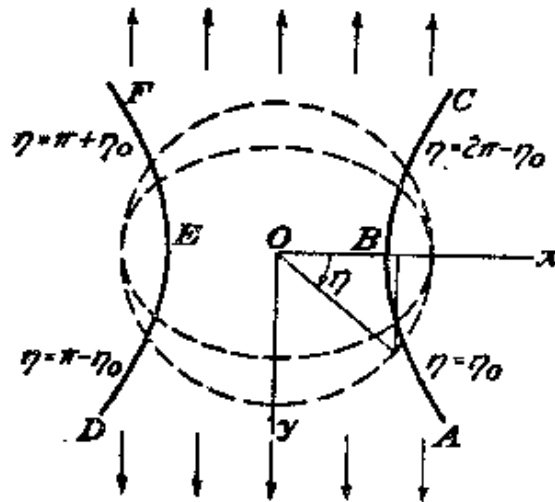


圖 119

設 η_0 為沿雙曲線弧 BA 為常數值之 η ，圖 119。因 x 及 y 沿 BA 為正值，此值將在 0 及 $\pi/2$ 間。沿此枝雙曲線另一半 BC ， η 值為 $2\pi - \eta_0$ 。沿另一枝之半 ED ， η 為 $\pi - \eta_0$ ，沿 EF 為 $\pi + \eta_0$ 。

取雙曲線邊界內平板 $ABCFDE$ 部分，沿 Oy (註 1) 方向在拉力情況中。無限遠處拉應力必降為零值以維持腰部 EOB 之有限拉力。適應此條件之複位函數，及適應其他必要條件，即對 Ox 及 Oy 軸之對稱及雙曲線邊界上不受力，應為

$$\psi(z) = -\frac{1}{2} Ai\zeta, \quad \chi(z) = -\frac{1}{2} Ai\zeta - Bci \sinh \zeta \quad (a)$$

內 A 及 B 為實常數， $z = c \cosh \zeta$ 。因此

(註 1) 此問題 (另剪荷力例) 係 A. A. Griffith 所解，見 *Tech. Rept. Aeron. Res. Comm.*, 1927-1928, vol. 2, p. 688; 另 H. Neuber, *Z. Angew. Math.*, vol. 13, p. 439, 1933; 或 “Kerbspannungsllehre”, *op. cit.*, p. 35.

$$\psi'(z) = -\frac{iA}{2c \sinh \zeta}, \quad \chi'(z) = -\frac{1}{2}Ai\zeta - \left(\frac{1}{2}A+B\right)i \coth \zeta \quad (\text{b})$$

第59節中方程式(90)說明雙曲線邊界上 $\eta = \eta_0$ 將無外力作用倘函數

$$\psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \chi'(\bar{z}) \quad (\text{c})$$

沿此邊界為常數，或此函數之共軛為常數。由(a)及(b)式，此共軛為

$$A\eta - \frac{1}{2}Ai \frac{\cosh \bar{\zeta}}{\sinh \bar{\zeta}} - \left(\frac{1}{2}A+B\right)i \coth \zeta \quad (\text{d})$$

在雙曲線 $\eta = \eta_0$ 上， $\bar{\zeta} = \zeta - 2i\eta_0$ ，上式變為

$$A\eta_0 - 1/2A \sin 2\eta_0 - (1/2A \cos 2\eta_0 + 1/2A+B)i \coth \zeta$$

如括弧內所含量為零，此為一常數。因此

$$B = -A \cos^2 \eta_0 \quad (\text{e})$$

為求所傳遞力之總和，吾人可用第59節(90)式於圖119窄斷面 EOB 上，或雙曲線 $\eta = \eta_0$ 及 $\eta = \pi - \eta_0$ 間極限橢圓 $\xi = 0$ 下半部上。在此橢圓上 ζ 變為 $i\eta$ ， $\bar{\zeta}$ 變為 $-i\eta$ ，由方程式(90)，(c)及(d)，得

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= i[A\eta - (A+B)\cot \eta]_{\eta=\eta_0}^{\eta=\pi-\eta_0} \\ &= i[A(\pi - 2\eta_0 + 2\cot \eta_0) + 2B \cot \eta_0] \end{aligned}$$

因 A 及 B 係取為實值， F_x 為零，用(e)式得

$$F_y = -A(\pi - 2\eta_0 + \sin 2\eta_0)$$

當總拉力 F_y 為已知時可決定 A 值。應力及位移各分量可由(96)，(97)，及(98)式求出，第一式為

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = -\frac{4A}{c} \frac{\cosh \xi \sin \eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$$

在此式中使 $\eta = \eta_0$ 可求沿雙曲線邊界上 σ_ξ 值，其最大值為 $-2A/c \sin \eta_0$ ，

係在 $\xi=0$ 腰部處。牛佰氏(Neuber) (註1) 曾以雙曲線腰部曲率半徑表示此函數。彼曾用另一方法，解出天板撓曲及剪力與拉力問題。

第六十五節 雙極坐標

涉及兩個非同心圓邊界問題中，連同半無限平板內一個圓孔之特例，通常須用雙極坐標 ξ, η ，其定義為

$$z = ia \coth 1/2\zeta \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (a)$$

內 a 為一實常數。

以 $(e^{1/2\zeta} + e^{-1/2\zeta}) / (e^{1/2\zeta} - e^{-1/2\zeta})$ 替代 $\coth 1/2\zeta$ 並對第一式解 e^ζ ，可得下式

$$\zeta = \log \frac{z + ia}{z - ia} \quad (b)$$

式中 $z + ia$ 可由連結 $-ia$ 點與 xy 平面內 z 點代表之，因其對各坐標軸上之投影各為實值及虛值部分，同量亦可由 $r_1 e^{i\theta_1}$ 代表之， r_1 為線之長度， θ_1 為與 x 軸所成之角 (圖120)。同理 $z - ia$ 為連結 ia 與 z 之線，並可由 $r_2 e^{i\theta_2}$ 代表之 (圖120)。如此則 (b) 式化為

$$\xi + i\eta = \log \left(\frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} \right) = \log \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$$

因此

$$\xi = \log \frac{r_1}{r_2} \quad \eta = \theta_1 - \theta_2 \quad (c)$$

由圖120知 $\theta_1 - \theta_2$ 為連結兩極點 $-ia, ia$ 與 z 點間兩線之夾角。如 z 點在 y 軸左方時用此角之負值。曲線 $\eta = \text{常數}$ 為經兩極點之圓弧。若

(註1) *Loc. cit.* 對凹口板及槽溝靴牛佰所得結果與偏光與疲勞試驗結果比較閱 R. E. Peterson 及 A. M. Whal, *J. Appl. Mech.*, vol. 3, p. 15, 1936, 或 S. Timoshenko, "Strength of Materials", 3d. ed. vol. 2, p. 328. 另閱 M. M. Frocht, "Photoelasticity", vol. 2,, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948.

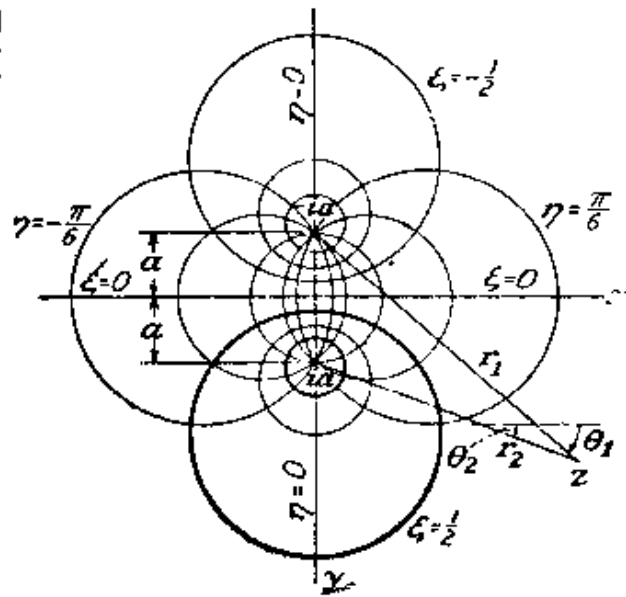


圖 120

于此等圓形繪於圖120中。由方程式 (c) 知曲線 $\xi = \text{常數}$ 為 $r_1/r_2 = \text{常數}$ 之曲線，此種曲線亦為圓。如 r_1/r_2 大於一，即如 ξ 為正時，此將圍繞一極點。如 ξ 為負時將圍繞另一極點 $-ia$ 。圖 120 中繪若干此種圓形。此為一共軸圓族，兩極點為極限點。

坐標 η 交兩極點間 y 軸線段時其值由 π 變至 $-\pi$ ，應力與位移經此線段將繼續，如係由 2π 週期 η 之期週函數所代表。

對 (a) 式分離實值與虛值，得 (註)

$$x = \frac{a \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad y = \frac{a \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (d)$$

對 (a) 式微分得

$$J e^{i\alpha} = \frac{dz}{d\zeta} = -\frac{1}{2} ia \operatorname{cosech}^2 \frac{1}{2} \zeta \quad (e)$$

及

$$e^{2i\alpha} = \frac{dz/d\zeta}{dz/d\bar{\zeta}} = -\sinh^2 \frac{1}{2} \bar{\zeta} \operatorname{cosech}^2 \frac{1}{2} \zeta \quad (f)$$

(註) 參考第54節對 (c) 式之引導。

第六十六節 雙極坐標解

吾人現考慮具偏心孔之圓盤問題，設外壓力為 p_0 ，沿孔邊壓力為 p_i (註1)。所解之應力分量亦可應用於偏心孔之厚圓管問題。

設外邊界為曲線族， $\xi = \text{常數}$ 中 $\xi = \xi_0$ 之圓，孔為 $\xi = \xi_1$ 之圓。圖 120 中兩粗線示此兩圓。由第 65 節 (e) 式之 y 值知此等圓半徑為 $a \operatorname{cosech} \xi_0$ 及 $a \operatorname{cosech} \xi_1$ ，其圓心對原點距離為 $a \coth \xi_0$ 及 $a \coth \xi_1$ ，因此如半徑及中心距為已知時， a ， ξ_0 ， ξ_1 即可決定。

沿任一圓 $\xi = \text{常數}$ 反時向運行一週，由圖 120 y 軸開始，坐標 η 由 π 變至 $-\pi$ 。故提供應力及位移分量之函數在 $\eta = \pi$ 及 $\eta = -\pi$ 處應為同值。此可由 2π 期 η 之週期函數予以保證。因此適當之複位函數 $\psi(z)$ 及 $\chi(x)$ 為

$$\cosh n\zeta \quad \sinh n\zeta$$

n 為整數，因此等函數事實上為 η 之 2π 週期函數，對 z 之導數亦如此，因 $d\zeta/dz$ 具相同性質〔見第 65 節 (e) 式〕。

如此等函數引用於 (90) 及 (91) 式中，對區域中任一圓形 $\xi = \text{常數}$ ，由週期性關係，對應之力及力偶將為零。對整個解均可用，對圓內平板之平衡亦如是。

吾人亦需用函數 $\lambda(z) = aDS$ ， D 為一常數。對 (90) 及 (91) 式考慮此點，知僅當 D 為實值時 (91) 式中力矩始為零，故吾人則此值，對 (86) 式之位移，知此函數與函數 (a) 用為 $\psi(z)$ 或 $\chi(z)$ ，所得之位移無斷續。

全部均勻分布之拉力或壓力狀態，為解之一部分，可由複位函數 $\psi(z)Az$ 求得， A 為實數。對應之實應力函數，由 (84) 式，為

(註 1) 原解用實應力函數，係 G. B. Jeffery 所得，見 *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 221, p. 265, 1921.

$$\phi = \operatorname{Re}(\bar{z}Az) = A\bar{z}z = A(x^2 + y^2)$$

此可由第65節雙極坐標表示之，結果為

$$Aa^2 \frac{\cosh \xi + \cos \eta}{\cosh^2 \xi - \cos \eta} \quad (\text{b})$$

取 (a) 式之函數， $n=1$ ，因知此問題中應力分布與 y 軸對稱，吾人必須選取對應之應力函數具相同對稱性，因此可取

$$\psi(z) = iB \cosh \zeta \quad \chi(z) = B' \sinh \zeta \quad (\text{c})$$

內 B, B' 為實值，而

$$\psi(z) = iC \sinh \zeta \quad \chi(z) = C' \cosh \zeta \quad (\text{d})$$

內 C 及 C' 為實數。

對應於 (c) 式之實應力函數，由 (84) 式，為

$$aB \frac{\sinh \xi \cosh \xi \cos \eta - \sinh \xi \sin^2 \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \\ + B' \frac{\sinh \xi \cosh \xi \cos \eta - \sinh \xi \cos^2 \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}$$

如選擇 $B' = aB$ ，分子中含 $\sin^2 \eta, \cos^2 \eta$ 各項變為與 η 無關，整個分子中僅 $\cos \eta$ 項與 η 有關，與函數 (b) 同。複位函數 (d) 亦為同一情況，如取 $C' = aC$ 。因此得一較簡化之函數形式而對現問題已足夠。

因此取

$$\psi(z) = iB \cosh \zeta \quad \chi(z) = aB \sinh \zeta \quad (\text{e})$$

由 (96) 及 (97)，及第65節中 (a) 及 (f) 兩式，對應之應力分量為

$$a(\sigma_\xi + \sigma_\eta) = 2B(2 \sinh \xi \cos \eta - \sinh 2\xi \cos 2\eta) \\ a(\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta}) = -2B[\sinh 2\xi - 2 \sinh 2\xi \cosh \xi \cos \eta \\ + \sinh 2\xi \cos 2\eta - i(2 \cosh 2\xi \cosh \xi \sin \eta - \cosh 2\xi \sin 2\eta)] \quad (\text{f})$$

同樣函數

$$\psi(z) = iC \sinh \zeta \quad \chi(z) = aC \cosh \zeta \quad (\text{h})$$

提供

$$a(\sigma_\xi + \sigma_\eta) = -2C(1 - 2 \cosh \xi \cos \eta + \cosh 2\xi \cos 2\eta) \quad (\text{i})$$

$$a(\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta}) = 2C[-\cosh 2\xi + 2 \cosh 2\xi \cosh \xi \cos \eta \\ - \cosh 2\xi \cos 2\eta + i(2 \sinh 2\xi \cosh \xi \sin \eta - \sinh 2\xi \sin 2\eta)] \quad (\text{j})$$

由函數

$$\chi(z) = aD\zeta \quad (\text{k})$$

所得之應力分量爲

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 0 \\ a(\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta}) = D[\sinh 2\xi - 2 \sinh \xi \cos \eta \\ - i(2 \cosh \xi \sin \eta - \sin 2\eta)] \quad (\text{l})$$

整體均勻拉應力函數爲

$$\psi(z) = Az$$

得

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 4A \quad \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = 0 \quad (\text{m})$$

或

$$\sigma_\xi = \sigma_\eta = 2A \quad \tau_{\xi\eta} = 0 \quad (\text{n})$$

此問題解可由重疊複位函數 (e), (h), (k) 及 (m) 所代表之應力情況求出, 集合方程式 (g), (j), 及 (l) 中代表 $\tau_{\xi\eta}$ 各項, 知在邊界 $\xi = \xi_0$, $\xi = \xi_1$ 上使 $\tau_{\xi\eta}$ 消失之條件爲

$$D - 2B \cosh 2\xi_0 - 2C \sinh 2\xi_0 = 0 \\ D - 2B \cosh 2\xi_1 - 2C \sinh 2\xi_1 = 0 \quad (\text{o})$$

解 B 及 C , 得

$$2B = D \frac{\cosh(\xi_1 + \xi_0)}{\cosh(\xi_1 - \xi_0)}, \quad 2C = -D \frac{\sinh(\xi_1 + \xi_0)}{\cosh(\xi_1 - \xi_0)} \quad (\text{p})$$

正交應力 σ_{ξ} 可由 (f) 式減 (g) 式實值部分及對其他對方程式以相同方法處理求得，在邊界 $\xi = \xi_0$ 上須取 $-p_0$ ， $\xi = \xi_1$ 上取 $-p_1$ 。用 (p) 式之 B 及 C 值，得下列兩方程式

$$2A + \frac{D}{a} \sinh^2 \xi_0 \tanh(\xi_1 - \xi_0) = -p_0$$

$$2A - \frac{D}{a} \sinh^2 \xi_1 \tanh(\xi_1 - \xi_0) = -p_1$$

因此

$$A = -\frac{1}{2} \frac{p_0 \sinh^2 \xi_1 + p_1 \sinh^2 \xi_0}{\sinh^2 \xi_1 + \sinh^2 \xi_0}$$

$$D = -a \frac{(p_0 - p_1) \coth(\xi_1 - \xi_0)}{\sinh^2 \xi_1 + \sinh^2 \xi_0}$$

連同 (p) 式此對各複位函數可完全決定，如僅有內壓力 p_1 ($p_0 = 0$) 時，孔上周上應力為

$$(\sigma_{\eta})_{\xi=\xi_1} = -p_1 + 2p_1 (\sinh^2 \xi_1 + \sinh^2 \xi_0)^{-1} (\cosh \xi_1 - \cos \eta) [\sinh \xi_1 \coth(\xi_1 - \xi_0) + \cos \eta]$$

其最大值 (註 1) 之算式已見第 71 頁。

雙極坐標應力函數之普遍級數式曾由傑弗雷 (G. B. Jeffery) (註 2) 氏求出。其相當之複位函數可易於求得，內含此處引用函數及第 192 頁各習題所用各簡單函數之雙極類比式，當脫節及集中力均納入時，此會用於半無限區域任一點上集中力問題 (註 3)，半無限區域及一圓孔，受平行於直邊拉力作用 (註 4)，及受自身重量 (註 5)，及有兩孔

(註 1) 最大值詳盡討論見 Coker & Filon, *loc. cit.*

(註 2) *loc. cit.*

(註 3) E. Melan, 見第 136 頁註 2。

(註 4) 閱第 136 頁註 2，另 W. T. Koiter, *Quart. Appl. Mech.* vol. 15, p. 303, 1957.

(註 5) R. D. Mindlin, *Proc. ASCE*, p. 619, 1939.

之無限板 (註1)，及兩相交圓所成之孔各問題 (註2)。

圓盤任一點受集中力 (註3)，懸於一點受自身重力 (註4)，或對偏心軸旋轉 (註5)，用或不用雙極坐標 (註6)，及半無限平板直邊上受集中力圓孔效應 (註7)，各解均已求得。

其他曲線坐標 方程式

$$z = e^{\xi} + abe^{-\xi} + ac^3 e^{-3\xi}$$

提供

$$x = (e^{\xi} + abe^{-\xi}) \cos \eta + ac^3 e^{-3\xi} \cos 3\eta$$

$$y = (e^{\xi} - abe^{-\xi}) \sin \eta - ac^3 e^{-3\xi} \sin 3\eta$$

內 a ， b ， c 爲常數，係一曲線 $\xi = \text{常數}$ ，可成各式卵狀，含圓角正方形在內。此一形式之板受拉應力圓孔效應曾由格林可班 (註8) (Greenspan) 予以計算 (用實應力函數，推廣此等坐標，格林 (註9) (A. E. Green) 氏獲三角形圓角後孔口之解，由另一坐標轉換，得矩形孔解，後一情況中，轉角尖端處引進無限應力集中。

(註1) T. Pöschl, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 1, p. 174, vol. 2, p. 187, 1922. 另閱 C. Weber, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 2, p. 267, 1922; E. Weinel, *ibid.*, vol. 17, p. 274, 林致平, *J. Appl. Physics.*, vol. 19, p. 77, 1948.

(註2) 林致平, *ibid.*, p. 405, 1948.

(註3) R. D. Mindlin, *J. Appl. Mech.*, vol. 4, p. A-115, 1937.

(註4) R. D. Mindlin, *J. Appl. Physics.*, vol. 9, p. 714, 1938.

(註5) R. D. Mindlin, *Phil. Mag.*, ser. 7, vol. 26, p. 713, 1944.

(註6) B. Sen, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, vol. 36, pp. 58, 83, 1944.

(註7) A. Barjansky, *Quart. Appl. Math.*, vol. 2, p. 16, 1944. 另 R. M. Evans Iwanowski, *ibid.*, vol. 19, p. 359, 1962.

(註8) 見 *Quart. Appl. Math.*, vol. 2, p. 60, 1944, 及 V. Morkovin, *ibid.*, p. 350, 1945.

(註9) 見 *Proc. Roy. Soc (London)*, Ser. A, vol. 184, p. 231, 1945.

下式之曲線坐標

$$z = \zeta + ia_1 e^{i\zeta} + ia_2 e^{i2\zeta} + \dots + ia_n e^{in\zeta}$$

a_1, a_2, \dots, a_n 爲實常數，曾由韋佰 (C. Weber) 氏應用於半無平板齒形邊界 (註1)，並求出等距半圓凹口解，當凹口中心距兩倍於凹口直徑時，應力集中因數，對拉力言，爲 2.13 單--凹口時此值爲 3.07。

指定形式 對各種指定形式，菊川氏 (Kikukawa) 曾設計並應用若干方法於指定形式之洞孔及填角 (註2)，初步保角映像經逐漸調整直至足夠接近於指定形式。詳細結果含受拉平板應力集中之計算內

(1) 菱形洞孔各角上爲圓弧填角，(2) 一條上有兩凹口，每凹口平形直邊由半圓弧連結成一U形，及(3) 有限寬與無限寬連結處一象限圓填角。例(2)與牛佰 (Neuber) 兩雙曲線結果極接近 (註3)。

第六十七節 由已知邊界條件決定複位數函數

莫司希里維里 (Muskhelishvili) 法

以上各節中，具適當性質形式簡單之複位函數經慎重選擇以解若干特殊問題。但較有力及更普遍方法亦經發展，直接由已知邊界條件 (註4) 求出複位函數，此爲複變函數理論進一步之應用。

第59節內知經弧 AB 所傳遞之力分量 F_x, F_y 爲[(90)式]

$$F_x + iF_y = -i[\psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{z}'(\bar{z})]_A^B \quad (90)$$

弧 AB 可能爲閉合邊界之一部，如圖121所示孔口 L ，由 A 向 B 進行，材料係位於左方，受力將爲 $-F_x, -F_y$ 。取 A 爲孔口上固定點， B

(註1) 見 *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 22, p. 29, 1942.

(註2) 此方法之綱要，連同參考資料，見 J. N. Goodier 及 P. G. Hodge, "Theory of Plasticity," pp. 8-10, John Wiley & Son, Inc., New York, 1958.

(註3) 參閱第64節。

(註4) N. I. Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Theory of Elasticity". 閱第200頁註4。

為 L 上任一點代表。設孔口上荷力為已知， F_x, F_y 為 s 之函數（圖 121），吾人可寫

$$i(F_x + iF_y) = f_1(s) + if_2(s)$$

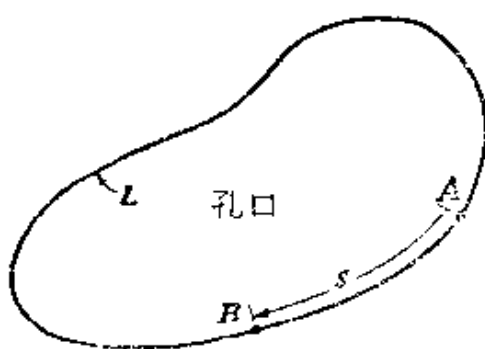


圖 121

內 $f_1(s)$ 及 $f_2(s)$ 均為實函數。方程式 (90') 中，固定點 A 處括弧內值為某一常數 C 。對可變動點 B 用 z ，孔口上邊界條件可寫為

$$\psi(z) + z\psi'(z) + \bar{z}'(\bar{z}) = f_1(s) + if_2(s) + C \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (99)$$

對此方程式解兩個複位函數時，用一新複變數 ζ 替代通用複變數 z 將較有益，其關係為

$$z = \omega(\zeta) \quad (100)$$

$\omega(\zeta)$ 為 ζ 經適當選擇之函數，此一關係前已應用〔第188頁式 (g)〕

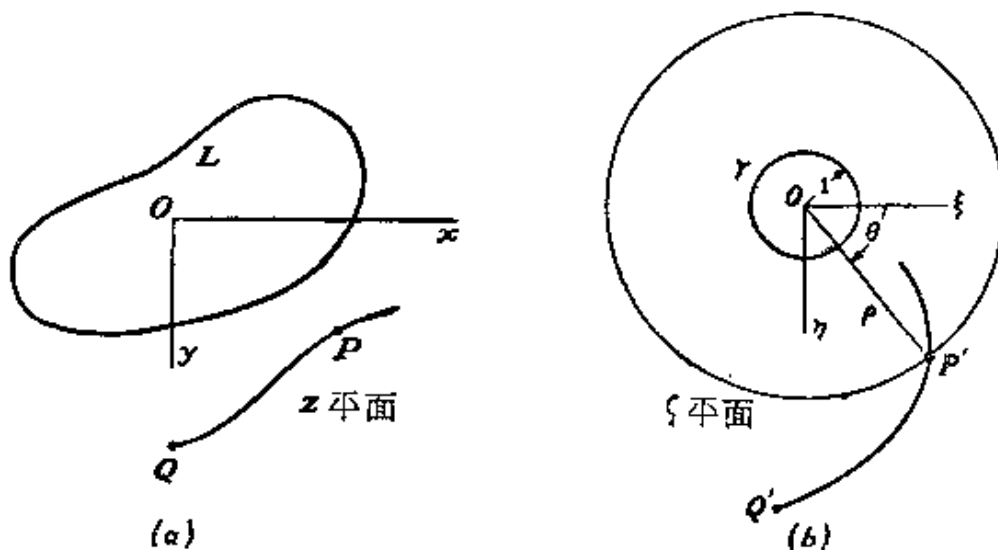


圖 122

以規定曲線坐標形式。此處應採有關但不同之觀念，即保映像之幾何解釋。

在 ζ 平面內 (圖122b) 複坐標 $\zeta = \xi + i\eta$ 所代表之點 P' ，在 z 平面內 (圖122a) 有一對應或“經映像”之點 P ，關係為 $z = \omega(\zeta)$ 。一般情況下，平滑曲線 $P'Q'$ 映像於另一平滑曲線 PQ ，對無限區域內含一個非圓孔 L 彈性問題中，保角映像函數 $\omega(\zeta)$ 將如此選擇使 ζ 平面中單位圓 $\rho = 1$ 映像為曲線 L ，如此則用極坐標 ρ, ϑ 較直角坐標 ξ, η 為宜。函數 $\omega(\xi)$ 之選擇應使一點 P' 僅映像於一點 P 。在每一 P' 點上函數須為解析者，此函數可以勞倫特 (Laurent) 式展開

$$\omega(\zeta) = R\zeta + \frac{e_1}{\zeta} + \frac{e_2}{\zeta^2} + \dots \quad (b)$$

內 R, e_1, e_2 等為常數。

z 之函數，如 $\psi(z)$ 或 $\chi'(z)$ ，亦為 ζ 之函數，由 $\omega(\zeta)$ 替代 z 求得。

故

$$\psi(z) = \psi[\omega(\zeta)] \quad \chi'(z) = \chi'[\omega(\zeta)] \quad (c)$$

換為 ζ 函數時，吾人將更改符號，用 ϕ 及 ψ 代表以上兩式，因此：

(c) 式中函數 $\psi[\omega(\zeta)]$ 寫為

$$\phi(\zeta) \quad (d)$$

(c) 式中函數 $\chi'[\omega(\zeta)]$ 寫為

$$\psi(\zeta) \quad (e)$$

更換邊界條件(99)時，左方第一項即為 $\phi(\zeta)$ 。第三項變為 $\bar{\psi}(\bar{\zeta})$ ，由 $\psi(\zeta)$ 內換每一 i 為 $-i$ 求得。對左方第二項，以 $\omega(\zeta)$ 代 z ，對 $\bar{\psi}'(z)$ ，因

$$\bar{\psi}'(z) = \frac{d}{dz} \bar{\psi}(z) = \frac{d}{d\bar{\zeta}} \bar{\psi}[\omega(\zeta)] \frac{d\bar{\zeta}}{dz} = \frac{d}{d\bar{\zeta}} \bar{\psi}(\bar{\zeta}) \frac{d\bar{\zeta}}{dz} = \bar{\psi}'(\bar{\zeta}) \frac{d\bar{\zeta}}{dz} \quad (f)$$

$$\text{及} \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{dz/d\zeta} = \frac{1}{\omega'(\zeta)} \quad (\text{g})$$

因此第二項換為

$$\omega(\zeta) [\bar{\phi}'(\bar{\zeta})] \frac{1}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \quad (\text{h})$$

(99) 式右方為在 L 上位置之複位函數。在單位圓 $\rho=1$ 上，對應位置可由坐標 θ ，或 $e^{i\theta}$ 指示之，寫

$$\sigma = e^{i\theta} \quad \bar{\sigma} = e^{-i\theta} \quad (\text{i})$$

知 σ 事實上為單位圓上一點。故 (99) 式右方為 σ 之函數，吾人將寫

$$f_1(\sigma) + if_2(\sigma) = f(\sigma) \quad (\text{j})$$

(99) 式內常數 C 可於 ψ [或 $\chi'(z)$] 內加一適當常數予以消除，此將對應力無影響。函數 $f(\sigma)$ 為施於 A 及 B 點間荷力之算式，依方程式 (a)，為 $-F_y + iF_x$ 之形式。

因此邊界條件 (99) 變為

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})} + \bar{\psi}(\bar{\sigma}) = \bar{f}(\sigma) \quad (101)$$

此條件為莫司希里維里方法之基礎，變更後符號為第 193 頁註中參考書所採用者。

第六十八節 複位函數公式 (註 1)

現課題為決定複位函數 $\phi(\zeta)$ ， $\psi(\zeta)$ ，對單位圓外任一點 ζ 使適應邊界條件 (101)。

一經選擇後，對現時之討論 ζ 即已固定，對 (101) 式乘以 $1/(\sigma - \zeta)$ ，每一項仍為 σ 之函數，並可繞單位圓一週積分之，此後用表 γ 示之。如此則

(註 1) 68 及 69 需用複積分理論有所了解，為第 54 及第 55 節所未討論者。應參閱第 214 頁註 1。

$$\int_{\gamma} \frac{\phi(\sigma) d\sigma}{\sigma-\zeta} + \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \bar{\phi}'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \int_{\gamma} \frac{\psi(\sigma) d\sigma}{\sigma-\zeta} = \int_{\gamma} \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma-\zeta} \quad (102)$$

此步驟之意義為使各積分與著名之庫希-高薩 (Cauchy-Goursat) 積分定理及庫希積分公式發生連繫 (註1)。由以後所示定理 (見第 70 節)，(102) 中第一積分為

$$\int_{\gamma} \frac{\phi(\sigma) d\sigma}{\sigma-\zeta} = -2\pi i \phi(\zeta) \quad (a)$$

如在 γ 外每一 ζ 點上 $\phi(\zeta)$ 為解析者，含無限處在內。在 γ 上 $\phi(\sigma)$ 值須與外部 $\phi(\zeta)$ 連續。(102) 第三個積分為零，如 $\psi(\zeta)$ 在 γ 外每一 ζ 點上解析，含無限處在內，另 $\psi(\sigma)$ 須與 $\sigma(\zeta)$ 連續，當 $\omega(\zeta)$ 為一有理函數時 (兩多項式之比例)，(102) 之第二個積分可以算出。在第 (71) 節所舉之特例中，其值為零，(102) 式中 $\phi(\zeta)$ 變為

$$\phi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma-\zeta} \quad (b)$$

由 (102) 式另可得 $\psi(\zeta)$ 一類似公式。此將於第 72 節證示。

在 γ 外部 $\phi(\zeta)$ 及 $\psi(\zeta)$ 所需解析性條件針對以此法所可解問題種類含若干限制。現對此等限制予以考察。

第六十九節 對應於孔口外圍區域內解析複位函數應力與變形之性質

前此所用映像函數 $\omega(\zeta)$ 在材料區域內均默認係解析者。因此，對材料區域任何一點，當位函數對 ζ 解析時，如視為 z 之函數亦可解析，所有導數亦同樣解析，“解析”即必連續。另外，完成任何包圍孔口任何路線一圈後，各回復其原值，各函數之共軛，及分別之實虛部分，亦均連續 (註2)。

(註1) 參考, R. V. Churchill, "Complex Variables and Application", 2d. chap 5, McGraw. Hill Book Company, New York, 1960.

(註2) 此項性質之解釋, 參考 Churchill, *op. cit.*, Chp. 2.

由上所述，吾人可用方程式 (86) 至 (91) 建立下列可由解析位函數代表情況之特性：

1. 由 (87) 及 (88) 式，應力分量連續 (註1)。
2. 由 (86) 式，位移分量連續 (故此種不能代表脫節)。
3. 由 (90) 式，作用於任何閉合路線總力為零；因此，施於孔口之總力為零。
4. 由 (91) 式，施於孔口荷力之總力偶為零。

另外，函數 $F(z)$ 在材料區域內 (包含無限遠) ——原點在分口中——勞倫特展開式

$$F(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

c_0, c_1 等為常數，吾人所用之位函數 $\psi(z), \chi(z)$ 均具此展開式。

5. 應力分量在無限遠處為零。故在無限遠處無任何荷力，因由 (3) 及 (4) 總力及力偶對無限路線為零 (註2)。

由此等性質，顯然由解析位函數所代表之應力及變形應歸於孔口邊界上自成平衡之荷力系統。

此並非一嚴格之限制。無限區域內無荷力孔口效應，當荷力施於無限遠邊界上時 (例如，圖118所示問題)，可先求無孔口時之應力。此指定量之荷力經過對應於孔口之曲線，但由孔口內填充材料之平衡，為一自身平衡荷力。如此則吾人所需決定者為由同值反向荷力系統所造成孔外應力，其值在無限遠處為零，此問題合於上述解析函數 1 至 5 條之需要。

如需要使孔口上荷力具非零總和力及力矩，吾人可自第 193 頁習

(註1) 代表斷續應力之位函數類形及其應用見 J. N. Goodier 及 J. C. Wilhoit, *Proc. 4th Ann. Midwest Conf. Solid Mech. Univ. Texas*, pp. 152-170, 1959.

(註2) 對無限邊界曲線應力分量消失不一定為零總和。

題 2g 部集中力解開始，提供所需之合力值。另加同習題 a 部所示力矩解，取 b 無限 a 為極小。如此則經對應於孔口曲線之荷力具預定合力及力矩值，但為錯誤之分布。預定之分布可由在孔口上引進已知荷力達成，此問題即合於解析位函數所需條件。

如需一脫節解，吾人可自同一習題 (e) 及 (d) 部分開始，給予預定量之脫節平移或轉動，而化問題為解析位函數問題。

問題 2 (見第 192 頁) 中位函數兩部分當然在材料區域中非皆各處解析，因 $\log z$ 對繞原點完整路線非連續，另因 z, z^2 亦非含無限遠無論何處皆解析。

第七十節 邊界積分定理

建立第 68 節所用定理時，吾人由 (a) 式 (見第 214 頁) 開始。在 r 區域外， $\phi(\zeta)$ 包括無限遠任何處均解析，具有勞倫特展開式

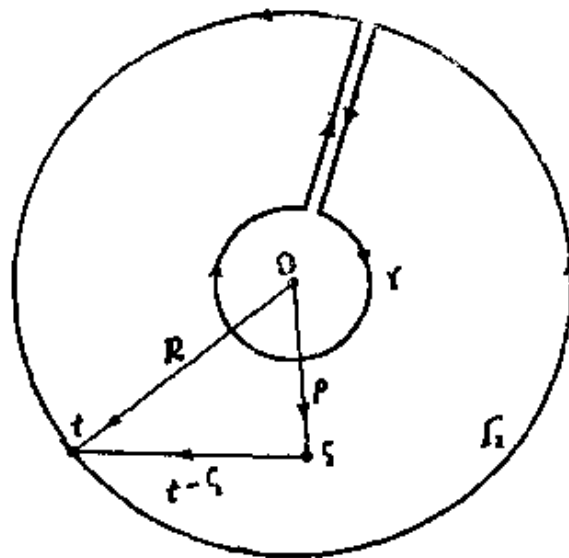


圖 123

$$\phi(\zeta) = \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \quad (a)$$

未將 a_0 項列入因其對應力無影響 (註 1)。

(註 1) 當此一位函數用於計算位移時，吾人可自由附加剛體運動項。

圖 123 中示一大圓 Γ 與 γ 同心。因 $\phi(\zeta)$ 在箭頭所示之界線內解析，庫希積分定理可以引用，得

$$2\pi i\phi(\zeta) = \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)dt}{t-\zeta} - \int_{\gamma} \frac{\phi(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} \quad (\text{b})$$

ζ 為區域內之一點， t 用為 Γ 上之點， σ 如前係 γ 上之點。但第一個積分，繞 Γ 一週，為零值。為證此，首先注意 (a) 展開式可用於 Γ ，由 t 代 ζ 。因此

$$t\phi(t) = a_1 + \frac{a_2}{t} + \dots \quad (\text{c})$$

此級數係收斂者， $t\phi(t)$ 為有界。吾人可引用一正常數使

$$|t|\phi(t) < C \quad (\text{d})$$

內 $|t|$ 為 t 之模數（絕對值），即圖 123 之半徑 R 。 C 之選擇可使 (d) 式對大於某 R_0 所有 R 值均適用。例如， R_0 可對應於 $|t|\phi(t)$ 之最大值。

設

$$I_1 = \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)dt}{t-\zeta} \quad |I_1| \leq \int_{\Gamma} \frac{|\phi(t)||dt|}{|t-\zeta|} \quad (\text{e})$$

吾人將在 (e) 式積分號下更換各量使積分值增加。首先以 $C/|t|$ 代 $|\phi(t)|$ ，由 (d) 式知此係增值，更換 $|dt|$ 時，寫

$$t = Re^{i\theta} \quad dt = iRc^{i\theta}d\theta \quad |dt| = Rd\theta \quad (\text{f})$$

此未變值，更換分母 $|t-\zeta|$ 時，取 $R-\rho$ 未使積分值降低，由圖 123 所示之三角形，顯然知

$$\rho + |t-\zeta| \geq R \quad R-\rho \leq |t-\zeta| \quad (\text{g})$$

因此，回至 (e) 式得

$$|I_1| < \int_0^{2\pi} \frac{C}{R} \frac{1}{R-\rho} Rd\theta = \frac{2\pi C}{R-\rho} \quad (\text{h})$$

吾人可使 R 增大，不予限制，而不改變 C ，當 ζ 一經選定後 ρ 即固

定。 $|I_1|$ 之極限值顯然為零。但放大 R 時使 Γ 變形因不能變更積分(e)值，因此當 R 為有限時 $|I_1|$ 必消失。故以上(b)式內，第一個積分可予忽略，所餘者為

$$-2\pi i\phi(\zeta) = \int_{\gamma} \frac{\phi(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} \quad (103)$$

此與第62節(a)式相同(註1)，為所需之結果。

其次證(102)式中第三個積分為零，即

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{\psi}(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0 \quad (104)$$

因在 γ 區域外任何處 $\psi(\zeta)$ 須解析，含無限遠在內，此將具一勞倫特展開式

$$\psi(\zeta) = \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \dots \quad (i)$$

此處仍不計常數項，因對應力無影響，對現時論點，吾人不僅須考慮 γ 外各點亦須考慮 γ 內之點，為清晰計，寫

ζ_0 為 γ 外各點

ζ_1 為 γ 內各點

因此於(104)及(i)式中換 ζ 為 ζ_0 。在(i)式中，對左右兩方取其共軛。因此

$$\bar{\psi}(\bar{\zeta}_0) = \frac{\bar{b}_1}{\bar{\zeta}_0} + \frac{\bar{b}_2}{\bar{\zeta}_0^2} + \dots \quad (j)$$

對任何 ζ_0 ，此為一收斂級數。但

$$\zeta_0 = \rho_0 e^{i\theta} \quad \bar{\zeta}_0 = \rho_0 e^{-i\theta} \quad \frac{1}{\bar{\zeta}_0} = \frac{1}{\rho_0} e^{i\theta} \quad (k)$$

顯然 $\rho_0 > 1$ 。因此 $1/\bar{\zeta}_0$ 在 ζ 平面中為 γ 內一點。如此吾人可得任何內

(註1) Muskhelishvili 所用術語為 "Cauchy's integral formula for the exterior region"

點 ζ_1 。因此，由 (j) 式，得一與 $\bar{v}(\zeta_0)$ 相等之函數 $F(\zeta_1)$ 並可用以下收斂冪級數代表之

$$F(\zeta_1) = \bar{b}_1 \zeta_1 + \bar{b}_2 \zeta_1^2 + \dots \quad (1)$$

顯然在 γ 內 $F(\zeta_1)$ 解析。現用任何 γ 外選取之點 ζ ，與 ζ_1 無關，函數

$$\frac{F(\zeta_1)}{(\zeta_1 - \zeta)}$$

在 γ 內亦解析；因此，由庫希積分定理，其積分沿 γ 內任何界線為零。吾人可將界線置於 γ 上。如此則

$$\int_{\gamma} \frac{F(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \quad (m)$$

但因 $\sigma = e^{i\theta}$ ，故 $\sigma = 1/\bar{\sigma}$ ，由 (1) 式，得

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \bar{b}_1 \sigma + \bar{b}_2 \sigma^2 + \dots \\ &= \frac{\bar{b}_1}{\bar{\sigma}} + \frac{\bar{b}_2}{\bar{\sigma}^2} + \dots \end{aligned} \quad (n)$$

當 $\zeta_1 \rightarrow \sigma$ ，將得 $\zeta_0 \rightarrow \sigma$ ，如此則 (j) 式級數變為與 (n) 式級數相同。因此

$$F(\sigma) = \bar{v}(\sigma)$$

故 (m) 式導至 (104) 式，為所需之結果。

現已澄清第 68 節 (102) 式中第一及第三個積分項。第二個積分將於 71 節內對一映像函數 $\omega(\zeta)$ 予以考慮。

第七十一節 橢圓孔映像函數 $\omega(\zeta)$ 、第二邊界積分

如吾人取

$$z = \omega(\zeta) \quad \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) \quad (105)$$

R 為一正常數， m 為小於一之正常數，可得

$$x = R \left(\rho + \frac{m}{\rho} \right) \cos \theta \quad y = R \left(\rho - \frac{m}{\rho} \right) \sin \theta \quad (a)$$

ζ 平面內單位圓映像為 z 平面內一橢圓，半軸為

$$a = R(1+m) \quad b = R(1-m) \quad (\text{b})$$

及一外同心圓映像為一外共焦橢圓。

對 (102) 式第二個積分，知

$$\omega'(\zeta) = R\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) \quad \omega'(\sigma) = R\left(1 - \frac{m}{\sigma^2}\right) \quad (\text{c})$$

因 $\sigma = 1/\bar{\sigma}$ ，故

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2} \quad (\text{d})$$

所需第二個積分為

$$I_2 = \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2} \bar{\phi}'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_0} \quad (\text{e})$$

此處對 ζ 仍寫為 ζ_0 以示 ζ 在此代表 γ 外經選定之任一點。此積分現由庫希積分定理證為零。考察整個被積分函數為解析函數 $f(\xi_1)$ 在 γ 上 $f(\sigma)$ 值之可能性， ζ_1 為 γ 內任一點。由

$$f(\sigma) = \lim_{\zeta_1 \rightarrow \sigma} f(\zeta_1)$$

所代表之連續條件即包含在內。

如此則由 (e) 式，可得

$$f(\zeta_1) = \frac{1}{\zeta_1} \frac{\zeta_1^2 + m}{1 - m\zeta_1^2} \bar{\phi}'\left(\frac{1}{\zeta_1}\right) \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_0} \quad (\text{f})$$

式中分母各項無問題，因 $m < 1$ 及 ζ_0 在 γ 外， $1 - m\zeta_1^2$ ， $\zeta_1 - \zeta_0$ 均非零。由第70節展開式 (a)，知

$$\frac{1}{\zeta_1} \bar{\phi}'\left(\frac{1}{\zeta_1}\right) = -\bar{a}_1 \zeta_1 - 2\bar{a}_2 \zeta_1^2 - \dots$$

此為解析者，因由第70節 (a) 式對 $\phi'(\zeta)$ 微分所得級數對 γ 外之 ζ 解析，亦即在 γ 內之 $1/\zeta$ 。顯然 $f(\zeta_1)$ 在 γ 內解析。因此，由庫希定理，其積分繞 γ ，即 (e) 式 I_2 為零。

此結果，連同第 70 節各結論，建立第 68 節對橢圓孔問題所用公式。

第七十二節 橢圓孔、 $\psi(\zeta)$ 公式

原邊界條件，(101) 式，可換為共軛式

$$\bar{\phi}(\bar{\sigma}) + \frac{\bar{\omega}(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)} \phi'(\sigma) + \psi(\sigma) = \bar{f}(\bar{\sigma}) \quad (\text{a})$$

因此可寫為

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{\phi}(\bar{\sigma}) d\sigma}{\sigma - \zeta} + \int_{\gamma} \sigma \frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 - m} \phi'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \int_{\gamma} \frac{\psi(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} = \int_{\gamma} \frac{\bar{f}(\bar{\sigma}) d\sigma}{\sigma - \zeta} \quad (106)$$

ζ 為一外點。

不僅限於橢圓孔，由第 (70) 節 (j) 式，用 ϕ 代 ψ ， ϕ 具第 70 節 ψ 所需各種性質，第一個積分為零。對第二個積分得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\sigma \frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 - m} \phi'(\sigma) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\zeta \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \phi'(\zeta) \quad (\text{b})$$

為定理 (103) 之應用，即對外區域之庫希積分公式。在該公式中，由 (b) 式右方函數代 $-\phi(\zeta)$ ，此函數在 γ 外，連同無限遠處，均解析。由同一定理，(106) 式內第三個積分為

$$\int_{\gamma} \frac{\psi(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} = -2\pi\psi(\zeta) \quad (\text{c})$$

因此 (106) 式化為

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}(\bar{\sigma}) d\sigma}{\sigma - \zeta} - \zeta \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \phi'(\zeta) \quad (\text{d})$$

重寫第 (68) 節 (b) 式為

$$\phi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} \quad (\text{e})$$

吾人得以孔口上已知荷力（自成平衡）表示之公式 $\phi(\zeta)$ 及 $\psi(\zeta)$ 。雖

(d) 係限用於橢圓孔 (註)，但 (e) 不受限制。

第七十三節 橢圓孔、特殊問題

圖 124 所示之橢圓孔，孔口不受荷力，應力係由無限遠處均勻分布核應力 S ，與 x 軸成 β 角所造成，此問題曾於第 63 節解出，用直接選取具合適性質之簡單複位函數。吾人現根據莫司克希里維里氏方法求此位函數。

根據第 69 節，實際上為對無孔區域內簡拉場 S 求一重疊之複位函

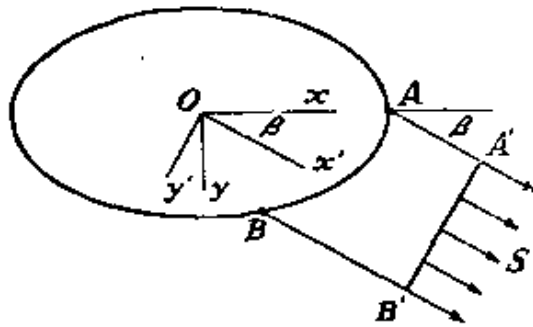


圖 124

數。經過圖 124 中 AB 弧所傳遞之力，用第 59 節符號，為

$$F_x^0 + iF_y^0 = S(y_{B'} - y_{A'})e^{i\beta} \quad (a)$$

用 $z' = x' + iy'$ ，一般情況下得

$$z' = e^{-i\beta} z \quad (b)$$

在橢圓上

$$z' = e^{-i\beta} R \left(\sigma + \frac{m}{\sigma} \right) \quad (c)$$

(a) 式可寫為

$$F_x^0 + iF_y^0 = SR \frac{1}{2i} \left[\sigma + \frac{m}{\sigma} - 1 - m - e^{2i\beta} \left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma - 1 - m \right) \right] \quad (d)$$

各解析位函數必須對橢圓提供與此對消之力。因此對應於

(註) 對推廣於任何有理映像函數，參考 Muskhelishvili 書第 358 頁。

$$\begin{aligned}
 f(\sigma) &= i(F_x + iF_y) = -i(F_x^0 + iF_y^0) \\
 &= -\frac{1}{2}SR\left[(1 - me^{2i\beta})\sigma + (m - e^{2i\beta})\frac{1}{\sigma} - (1+m)(1 - e^{2i\beta})\right]
 \end{aligned} \tag{e}$$

現用此於第72節 (e) 式以求 $\phi(\zeta)$ ，得以下三個積分：

$$\int_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \quad \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \quad \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -2\pi i \frac{1}{\zeta} \tag{107}$$

前兩個為直接引用庫希積分定理於單位圓及其內部之結果， ζ 為圓外之點。第三個得自對外部區域之庫希定理，或對內那區域之餘值定理。因此，

$$\phi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{1}{2}SR(m - e^{2i\beta})\frac{1}{\zeta} \tag{f}$$

為求 $\psi(\zeta)$ ，用第72節 (d) 式，由 (c) 式寫，

$$\bar{f}(\bar{\sigma}) = -1/2SR\left[(1 - me^{-2i\beta})\frac{1}{\sigma} + (m - e^{-2i\beta})\sigma - (1+m)(1 - e^{-2i\beta})\right] \tag{g}$$

故可再用 (107) 式求此積分。如此則

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2}SR\left[(m - e^{2i\beta})\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta(\zeta^2 - m)} + (1 - me^{-2i\beta})\frac{1}{\zeta}\right] \tag{h}$$

在 xy 系統內應力分量現可由 $\phi(\zeta)$ 及 $\psi(\zeta)$ 對 z 之微分求得。在 z 平面內由圓 $\rho > 1$ 所映像橢圓上對應之曲線坐標分量，及由射線 $\theta = \text{常數}$ 所映像之正交雙曲線，可由 (92) 及 (93) 或 (96) 及 (97) 各公式求出。位移可得自 (86) 或 (98) 式。

第二例題為圖 125 所示橢圓孔， GAC 及 DEF 各段上受均勻壓力 p ， CD 及 FG 再段無荷力。各點 C ， G ， D ， F 為 z_1 ， \bar{z}_1 ， $-\bar{z}_1$ ，及

$-z_1$, ζ 平面內對應於 γ 上各點爲 σ_1 , $\bar{\sigma}_1$, $-\bar{\sigma}_1$, 及 $-\sigma_1$ 。

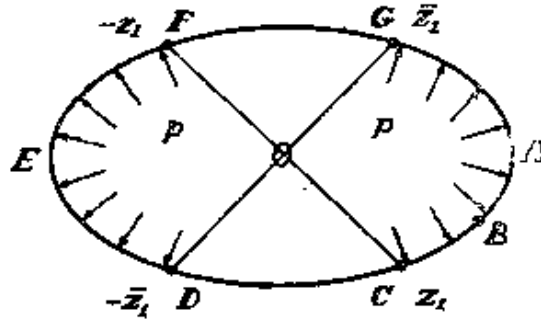


圖 125

橢圓上 B 點寫爲 z , 得

$$F_x + iF_y = pi(z-a) \quad \text{對 } GAC$$

由 C 至 D 此力爲常數。因此

$$F_x + iF_y = pi(z_1-a) \quad \text{對 } CD$$

故得

$$F_x + iF_y = pi(z_1-a+z+z_1) \quad \text{對 } DEF$$

及

$$F_x + iF_y = pi(\bar{z}_1-a) \quad \text{對 } FG$$

因此, 函數 $f(\sigma) = i(F_x + iF_y)$ 爲

$$f(\sigma) = \begin{cases} -p \left[R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right) - a \right] & \text{對 } GAC \\ -p \left[R\left(\sigma_1 + \frac{m}{\sigma_1}\right) - a \right] & \text{對 } CD \\ -p \left[R\left(\sigma_1 + \frac{m}{\sigma_1}\right) - a + R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right) + R\left(\frac{1}{\sigma_1} + m\sigma_1\right) \right] & \text{對 } DEF \\ -p \left[R\left(\frac{1}{\sigma_1} + m\sigma_1\right) - a \right] & \text{對 } FG \end{cases} \quad (i)$$

每一括弧中之一 a 項均可省略, 荷力可由 $f(\sigma)$ 之變化代表。由第72節

(e) 式得

$$\begin{aligned}
2\pi i\phi(\zeta) = pR \left\{ \int_{\bar{\sigma}_1}^{\sigma_1} \left(\sigma + \frac{m}{\sigma} \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \left(\sigma_1 + \frac{m}{\sigma_1} \right) \int_{\sigma_1}^{-\bar{\sigma}_1} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \right. \\
+ \int_{-\bar{\sigma}_1}^{-\sigma_1} \left[\sigma + \frac{m}{\sigma} + (1+m) \left(\sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \\
\left. + \left(\frac{1}{\sigma_1} + m\sigma_1 \right) \int_{-\sigma_1}^{\bar{\sigma}_1} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \right\} \quad (j)
\end{aligned}$$

各積分值可先寫出不定積分代入限值求出。如此則

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi i}{pR} \phi(\zeta) = \zeta \log \frac{\zeta^2 - \sigma_1^2}{\zeta^2 - \bar{\sigma}_1^2} - \frac{m}{\zeta} \left(4 \log \sigma_1 - \log \frac{\zeta^2 - \sigma_1^2}{\zeta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right) \\
+ \left(\sigma_1 + \frac{m}{\sigma_1} \right) \log \frac{\zeta + \bar{\sigma}_1}{\zeta - \sigma_1} + (1+m) \left(\sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} \right) \log \frac{\zeta + \sigma_1}{\zeta + \bar{\sigma}_1} \\
+ \left(\frac{1}{\sigma_1} + m\sigma_1 \right) \log \frac{\zeta - \bar{\sigma}_1}{\zeta + \sigma_1} \quad (k)
\end{aligned}$$

此可簡化為

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi i}{pR} \phi(\zeta) = -\frac{4m}{\zeta} \log \sigma_1 + \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) \log \frac{\zeta^2 - \sigma_1^2}{\zeta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \\
+ \left(\sigma_1 + \frac{m}{\sigma_1} \right) \log \frac{\zeta + \sigma_1}{\zeta - \sigma_1} + \left(\frac{1}{\sigma_1} + m\sigma_1 \right) \log \frac{\zeta - \bar{\sigma}_1}{\zeta + \bar{\sigma}_1} \quad (l)
\end{aligned}$$

函數 $\psi(\zeta)$ 現可由第72節 (e) 式求出，由 (i) 式得 $\tilde{f}(\bar{\sigma})$ 。

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{\tilde{f}(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}}{\sigma - \zeta} = -pR \left[m\zeta \log \frac{\zeta^2 - \sigma_1^2}{\zeta^2 - \bar{\sigma}_1^2} - \frac{1}{\zeta} \left(4 \log \sigma_1 - \log \frac{\zeta^2 - \sigma_1^2}{\zeta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right) \right. \\
+ \left(\frac{1}{\sigma_1} + m\sigma_1 \right) \log \frac{\zeta + \bar{\sigma}_1}{\zeta - \sigma_1} + (1+m) \left(\frac{1}{\sigma_1} + \sigma_1 \right) \log \frac{\zeta + \sigma_1}{\zeta + \bar{\sigma}_1} \\
\left. + \left(\sigma_1 + \frac{m}{\sigma_1} \right) \log \frac{\zeta - \bar{\sigma}_1}{\zeta + \sigma_1} \right] \quad (m)
\end{aligned}$$

經簡化後得

$$\frac{2\pi i}{pR} \psi(\zeta) = -4 \log \sigma_1 (1+m^2) \frac{\zeta}{\zeta^2 - m} + \left(\sigma_1 + \frac{m}{\sigma_1} \right) \log \frac{\zeta - \bar{\sigma}_1}{\zeta + \bar{\sigma}_1}$$

$$+\left(\frac{1}{\sigma_1} + m\sigma_1\right)\log \frac{\zeta + \sigma_1}{\zeta - \sigma_1} \quad (n)$$

用 (1) 及 (n) 兩最後形式之複位函數，位移及應力算式可自 (96)，(97)，及 (98) 一般公式求得。

習 題

1. 驗證第73節 (g) 及 (i) 式所代表之解與第63節之解對橢圓孔長短軸各端上應力得相同結果。
2. 求圖125問題，由第73節所示之解，對橢圓孔受壓力 p 作用時之位函數 $\phi(\zeta)$ 及 $\psi(\zeta)$ 。驗證長短軸兩端上應力與第62節所得者相符。
3. 具橢圓孔之無限平板 (圖124) 在無限遠處受均勻應力

$$\sigma_x = S_1 \quad \sigma_y = S_2 \quad \tau_{xy} = 0$$

- (a) 求孔上應力算式。
- (b) 求及實施此結果之若干驗證方法，用橢圓及圓孔之已知結果。
- (c) 證如 $S_2/S_1 = b/a$ ，沿孔口各處應力均相同 (註)。
- (d) 證當無限遠處為純剪對橢圓軸成 45° 角時，孔上最大應力出現於長軸兩端，並相當於一應力集中因數 $2(1 + (a/b))$ 。

(註) A. J. Durelli, W. M. Murray, *Proc. Exptl. Stress Anal.*, vol. 1, No. 1, 1943.

第七章 三維應力與應變分析

第七十四節 緒論

除第一章中初步基本討論外，以上各章均係針對二維問題。本章與下章中對較廣泛問題解之基本觀念予以探討。在本章中，應力與應變分析完全分開。無應力-應變關係引用。結果可施於任何連續介體——例如，黏性流體，或塑性固體，對應變亦然。

現考察三維空間中一般應力分布，前在第四節中曾示作用於立方單元六邊面上之應力可由六個應力分量，即三個正交應力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 及三個剪應力 $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ 代表之。如任意一點上此等分量為已知時，經此點任何斜面上之應力可由靜力學方程式算出。設 O 為受力體之一點，並設坐標面 xy, xz, yz (圖126) 上各應力為已知，欲求經 O 點任何斜面之應力，吾人取一平面 BCD 與其平行且對 O 點距離極短，使此面及各坐標面自物體割出一極小之四面體 $BCDO$ 。因應力在體內為連續變化者，作用於 BCD 面上之應力當單元體趨於無限時將趨於經 O 點平行面上之應力。

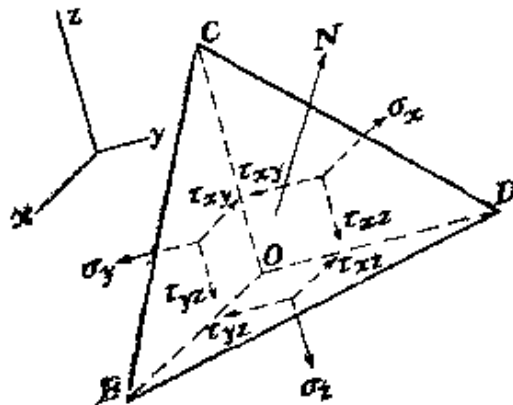


圖 126

考慮單元四面體平衡時，各體力均可忽計（閱第5頁）。再者，

因單元為極小，吾人可忽計各面上應力變化，並設其為均勻分布者。四面體上各力因此可將各應力乘以各面積求得之，如 A 代表四面體 BCD 面之面積，則其他各三面面積為 A 在三坐標面上之投影。如 N 為平面 BCD 之法線，並以

$$\cos(Nx) = l \quad \cos(Ny) = m \quad \cos(Nz) = n \quad (a)$$

則四面體其他三面面積為

$$Al \quad Am \quad An$$

如以 X, Y, Z 代表平行於坐標軸之應力分量，作用於斜面 BCD 上，如此則作用於 BCD 面上 x 軸向分力為 AX 。另在其他三面上 x 軸向力為 $-Al\sigma_x, -Am\tau_{xy}, -An\tau_{xz}$ 。故四面體 x 向平衡方程式為

$$AX - Al\sigma_x - Am\tau_{xy} - An\tau_{xz} = 0$$

以相同方式由投影各力於 y 及 z 軸其他兩平衡方程式亦可求得。將因數 A 消去後，四面體各平衡方程式可寫為

$$\begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (108)$$

因此任何平面上應力之分量，如平面法線之方向餘弦為 l, m, n ，可由 (108) 式算出，倘在 O 點處六個應力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ 為已知時。

第七十五節 主應力

現試求作用於 BCD 面上 (圖126) 之垂直應力分量，用 (a) 式所表示之法線餘弦，吾人得

$$\sigma_n = Xl + Ym + Zn$$

將 (108) 式中 X, Y, Z 各值代入後，得

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{xy} lm \quad (109)$$

隨法線 N 方向 σ_n 之變化可以幾何方式代表之如下。設一向量長度為 r 並與應力 σ_n 之絕對值平方根成反比，即

$$r = \frac{k}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad (b)$$

內 k 為一常數。設 r 係置於法線 N 上，此向量末端之坐標將為

$$x = lr \quad y = mr \quad z = nr \quad (c)$$

由 (b) 式知

$$\sigma_n = \pm \frac{k^2}{r^2} \quad (d)$$

代此值及 (c) 式之 l, m, n 於 (109) 式中，得 (註)

$$\pm k^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx + 2\tau_{xy} xy \quad (110)$$

當平面 BCD 對 O 點轉動時，向量 r 末端永落於 (110) 式之二次曲面上。

一二次曲面如方程式 (110) 所示者常可選擇 x, y, z 之軸向使此方程式中非正方之坐標乘積各項消失，以應力觀點言意為吾人常可得三個垂直平面，其上 $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 為零，亦即應力和係垂直於所作用之平面上。吾人稱此等應力為主應力 (principal stresses)，其所作用之平面為主面 (principal planes)，其方向為主軸 (principal axes)。一點上之應力情況如主軸方向及主應力為已知時即完全決定，方程式 (110) 所代表之曲面不論如何選擇， x, y, z 各軸必為相同曲面。

(註) 方程式 (d) 中之正負符號視 σ_n 為拉應力或壓應力而定，(110) 式亦如此，當三個主應力同一符號時，僅須正負號之一，曲面為一橢圓體。當各主應力不全為相同符號時，二符號均須應用於 (110) 中，為一雙葉雙曲線體及一單葉雙曲線體，具同一漸近錐體。

第七十六節 應力橢圓體及應力指向面

如坐標軸 x, y, z 依主應力方向安置，任何斜面上應力之計算變為極簡單。因剪應力 $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 在主面上為零，(108) 式變為

$$X = \sigma_x l \quad Y = \sigma_y m \quad Z = \sigma_z n \quad (111)$$

用方向餘弦間熟知關係 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ，得

$$\frac{X^2}{\sigma_x^2} + \frac{Y^2}{\sigma_y^2} + \frac{Z^2}{\sigma_z^2} = 1 \quad (112)$$

因此知，如對經 O 點任意斜面上之應力以由 O 點起分量為 XYZ 之向量為代表，所有此等向量末端在方程式 (112) 之橢圓體上。此橢圓體稱為應力橢圓體 (stress ellipsoid)。其各半軸長為此點上之各主應力。由此知任一點上最大應力即為此點上三主應力之最大者。

如三主應力中有兩個數值相同，應力橢圓體變為橢圓旋轉體。如此等數值相等之主應力符號相同，經橢圓體對稱軸各平面上應力和將等值並垂直於其所作用之面上，此時經此軸任何兩正交面之應力可視為主應力，如所有三主應力均相等且同符號，應力橢圓體變為球體，而任何三互相垂直方向可視為主軸。當主應力之一為零時，應力橢圓體化為橢圓面積，經此點所有代表應力之向量落於同一面中。此情況之應力稱為平面應力並在以前章節中經已討論。如兩主應力同時為零，即為簡拉或簡壓。

應力橢圓體之每一半徑向量，在某一比率下，代表經橢圓體中心一平面上之應力，欲求此平面，吾人用 (112) 式之應力橢圓體與由下式

$$\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z} = 1 \quad (113)$$

所規定之應力指向面 (stress director surface)。由應力橢圓體向量半徑所代表之應力作用於平行於一切面之平面上，切面經半徑向量與應力指向面之交點。此可證示如下，應力指向面 (113) 任一點 x_0, y_0, z_0 上切面方程式為

$$\frac{xx_0}{\sigma_x} + \frac{yy_0}{\sigma_y} + \frac{zz_0}{\sigma_z} = 1 \quad (\text{a})$$

用 h 代表自坐標原點至上述切面之垂直距離，並用 l, m, n 代表此垂直線之方向餘弦，此切面之方程式可寫為

$$lx + my + nz = h \quad (\text{b})$$

比較 (a) 及 (b) 兩式得

$$\sigma_x = \frac{x_0 h}{l}, \quad \sigma_y = \frac{y_0 h}{m}, \quad \sigma_z = \frac{z_0 h}{n} \quad (\text{c})$$

將此等值代於方程式 (111) 中，知

$$X = x_0 h \quad Y = y_0 h \quad Z = z_0 h$$

亦即在方向餘弦為 l, m, n 平面上之應力分量與坐標點 x_0, y_0, z_0 成正比。因此，代表應力之向量經此 x_0, y_0, z_0 點如上所述 (註)。

第七十七節 主應力之決定

如在三坐標平面上應力分量為已知時，吾人可用主應力垂直於其所作用平面上之性質決定其方向與值。設 l, m, n 為主面之方向餘弦， S 為作用於此面上之主應力。此應力之分量為

$$X = Sl \quad Y = Sm \quad Z = Sn$$

代於 (108) 式，得

$$\begin{aligned} (S - \sigma_x)l - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n &= 0 \\ -\tau_{xy}l + (S - \sigma_y)m - \tau_{yz}n &= 0 \\ -\tau_{xz}l - \tau_{yz}m + (S - \sigma_z)n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{a})$$

此為 l, m, n 之線性齊次方程式。僅當此等方程式係數之行列表為零時始有非零解，展開此行列表使等於零得以下 S 之三次方程：

(註) 一點上應力另一代表方法，用圓圖，為 O. Mohr 所創立，見“*Technische Mechanik*,” 2d ed., p. 192, 1914. 另參閱 A. Föppl and L. Föppl, “*Drang und Zwang*,” vol. 1, p. 9, 及 H. M. Westergaard, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 4, p. 520, 1924. 馬氏圓圖之應用見第 10 節。

$$S^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)S^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2)S - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \quad (114)$$

此方程式之三根爲三主應力 S_1, S_2, S_3 之值，將每一此等應力代於 (a) 式中並用 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 之關係，吾人可得三主面之三集方向餘弦。

第七十八節 應力不變量

對一點上之應力情況，如主應力及主軸爲已知，吾人當然可在任何坐標系 x, y, z 內用分量代表之。不論如何選擇此等軸之方位，方程式 (114) 須有相同之三個根。因此，係數必須永遠相同，吾人亦可選主軸本身爲 x, y, z 軸。如此則 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 將爲 S_1, S_2, S_3 (以此或另一順序) 而 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ 將爲零。方程式 (114) 係數不變量爲下列各式

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = S_1 + S_2 + S_3 \quad (a)$$

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 = S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1 \quad (b)$$

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = S_1S_2S_3 \quad (c)$$

左方各式稱爲應力不變量，顯然由此等不變量可另成其他不變量。稱 I_1, I_2, I_3 爲 (a), (b), (c) 右方各值，可驗證

$$\begin{aligned} & (\tau_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \\ & = 2I_1^2 - 6I_2 \end{aligned} \quad (d)$$

故此式左方亦爲一不變量。此式在討論應變能時出現。

第七十九節 最大剪應力之決定

設 x, y, z 爲主軸使 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 爲主應力，並設 l, m, n 爲已知平面之方向餘弦，由 (111) 式，此平面上總應力之正方爲

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2$$

同一平面上應力正交分量之正方爲，由 (109) 式，

$$\sigma_n^2 = (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2 \quad (a)$$

故同一面上剪應力之平方必爲

$$\tau^2 = S^2 - \sigma_n^2 = \sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2 - (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2$$

現消去各方向餘弦之...，由此式中選 n 並用以下關係

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

然後求 l 及 m 使 τ 爲一最大值。代 $n^2 = 1 - m^2 - l^2$ 於 (b) 後，計算對 l 及 m 之導數，置此等導數爲零，得下列各式以求 τ 爲最大或最小值平面之方向餘弦：

$$\begin{aligned} l[(\sigma_x - \sigma_z)l^2 + (\sigma_y - \sigma_z)m^2 - 1/2(\sigma_x - \sigma_z)] &= 0 \\ m[(\sigma_x - \sigma_z)l^2 + (\sigma_y - \sigma_z)m^2 - 1/2(\sigma_y - \sigma_z)] &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

以上聯立方程式之一解爲 $l = m = 0$ 。吾人亦可得非零解。例如，取 $l = 0$ ，則在 (c) 第二式知 $m = \pm \sqrt{1/2}$ ；如取 $m = 0$ ，則在 (c) 第一式得 $l = \pm \sqrt{1/2}$ ，如 l 及 m 同爲非零時，一般情況下 (c) 式無解，因此時括弧內各算式不能同時爲零。

由 (b) 式輪流消去 m 及 l 並重複上述計算，吾人可列下表之方向餘弦使 τ 爲最大或最小值：

τ_{\max} 及 τ_{\min} 面之方向餘弦

$l =$	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$
$m =$	0	± 1	0	$\pm \sqrt{1/2}$	0	$\pm \sqrt{1/2}$
$n =$	± 1	0	0	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$	0

前三行爲主面與坐標重合之方向，在此等面上剪應力爲零，亦即 (b) 式爲一最小值，另三行爲經各主軸平分另兩主軸夾角之面。代此三面之方面餘弦於 (b) 式，得此三面上下列剪應力值：

$$\tau = \pm 1/2(\sigma_y - \sigma_z) \quad \tau = \pm 1/2(\sigma_x - \sigma_z) \quad \tau = \pm 1/2(\sigma_x - \sigma_y) \quad (115)$$

此示最大剪應力作用於平分最大及最小主應力夾角面上，其值為此主應力差之一半。

如圖126中 x, y, z 軸為主應力之方向，且 $OB=OC=OD$ ，使斜面上法線 N 之方向餘弦為 $l=m=n=1/\sqrt{3}$ ，此面上正交應力，由方程式 (109)，為

$$\sigma_n = 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (d)$$

此稱為平均應力。面上剪應力，由 (b) 式，為

$$\tau^2 = 1/3(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 1/9(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

此亦可寫為

$$\tau^2 = 1/9[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]$$

另用 (d) 式，可寫為

$$\tau^2 = 1/3[(\sigma_x - \sigma_n)^2 + (\sigma_y - \sigma_n)^2 + (\sigma_z - \sigma_n)^2]$$

此剪應力稱為八面體剪應力，因其所作用之面為頂點在坐標軸上正八面體之一面。此應力常見於塑性理論中。

第八十節 均勻變形

吾人僅考慮微小變形，如在工程結構中所出現者。變形物體質點之位移通常分解為三個分量 u, v, w 平行於坐標軸 x, y, z ，此等分量將設為極小在物體之容積內連續變化。

舉一例，設一稜體桿上端固定如圖 (127) 所示，設 ϵ 為沿 x 向之單位拉長及 $\nu\epsilon$ 單位側向縮短，則坐標為 x, y, z 點之位移分量為

$$u = \epsilon x \quad v = -\nu\epsilon y \quad w = -\nu\epsilon z$$

用 x', y', z' 代表變形後點之坐標，則

$$x' = x + u = x(1 + \epsilon) \quad y' = y + v = y(1 - \nu\epsilon)$$

$$z' = z + w = z(1 - \nu\epsilon)$$

(a)



圖 127

如吾人取桿內一平面在變形前之方程式爲

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (b)$$

面內各點在變形後仍在一平面中。此新平面之方程式爲將 (a) 式內之 x, y, z 代於 (b) 式中，顯然變形前之平行面及平行線變形後仍保持平行。

如取桿內下式變形前之球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (c)$$

變形後變爲一橢圓體面，其方程式可由得自 (a) 式內之 x, y, z 代於 (c) 式中求得，此爲

$$\frac{x'^2}{r^2(1+\epsilon)^2} + \frac{y'^2}{r^2(1-\nu\epsilon)^2} + \frac{z'^2}{r^2(1-\nu\epsilon)^2} = 1 \quad (d)$$

因此半徑爲 r 之球體變形爲半軸 $r(1+\epsilon), r(1-\nu\epsilon), r(1-\nu\epsilon)$ 之橢圓體。

以上所取之簡拉長及側向縮短僅爲較普遍型變形之一特例，此種較普遍之變形爲位移分量 u, v, w 各爲坐標 x, y, z 之線性函數，照以上程序，可證此型變形在簡拉時具上所述之性質，平行面與平行線變形後保持平行。球體變形後爲一橢圓體，此種變形稱爲均勻變形

(homogenous deformation)。以後將證此情況中體內所有各點對任何已知方向變形均屬一致，故一物體中兩幾何相似方位相同之單元變形後保持幾何相似。

較廣泛情形下變形體各部分變形均不一致。例如，一梁撓曲時縱向纖維之拉長或縮短視其對中和面之距離而定；一扭轉圓軸單圓之剪應變與其對軸線之距離成正比。在此種非均勻變形例中對一點鄰近處應變分析變爲必需者。

第八十一節 一點上之應變

討論變形物體內一點 O 鄰區之應變時 (圖128)，設取一長 r 之微

線單元 OO' ，其方向餘弦為 l, m, n 。在各坐標軸上此單元之投影為

$$\delta x = rl \quad \delta y = rm \quad \delta z = rn \quad (a)$$

此代表以 O 為原點 O' 對坐標軸 x, y, z 之坐標。如 u, v, w 為物體變形時 O 點之位移分量，鄰點 O' 之對應位移可由以下各式代表之：

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ v_1 &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ w_1 &= w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad (b)$$

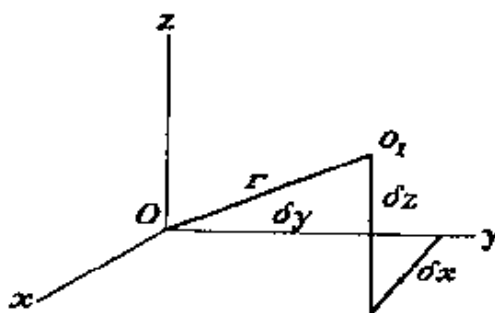


圖 128

此處各量 $\delta x, \delta y, \delta z$ 均經設為小值，故其高次項及乘積項在 (b) 式中均可視為高階微項而予以忽計。變形後 O_1 之坐標變為

$$\begin{aligned} \delta x + u_1 - u &= \delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ \delta y + v_1 - v &= \delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ \delta z + w_1 - w &= \delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad (c)$$

此等坐標為原始坐標 $\delta x, \delta y, \delta z$ 之線性函數；因此在 O 處一極小單元之變形可視為均勻者（見第80節）。

現考慮單元 r 因此種變形所生之拉長。變形後此單元長之正方等於坐標 c 正方之和。因此，如 ϵ 為單元之單位拉長，吾人得

$$\begin{aligned} (r + \epsilon r)^2 &= \left(\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \right)^2 \\ &\quad + \left(\delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \right)^2 \\ &\quad + \left(\delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \right)^2 \end{aligned}$$

除以 r^2 並用方程式 (a)，

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon)^2 &= \left[l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \\ &\quad + \left[l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 \\ &\quad + \left[l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (d)$$

因 ϵ 及 $\partial u/\partial x, \dots, \partial w/\partial z$ 均為微量其平方及乘積可被忽計，並用 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ，方程式 (d) 可寫為

$$\begin{aligned} \epsilon &= l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + ln \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &\quad + mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (116)$$

因此倘各算式 $(\partial u/\partial x), \dots, (\partial u/\partial y + \partial v/\partial x), \dots$ 均為已知時，單元 r 之拉長即可算出。用以下符號

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \epsilon_x & \frac{\partial v}{\partial y} &= \epsilon_y & \frac{\partial w}{\partial z} &= \epsilon_z \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma_{xy} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \gamma_{xz} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (e)$$

方程式 (116) 可寫為 (註)

$$\epsilon = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{xz} ln + \gamma_{yz} mn \quad (117)$$

各量 $\epsilon_x \dots, \gamma_{yz} \dots$ 之物理意義前已討論 (閱第 5 節), 並經證示 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 各為沿 x, y, z 各向之單位拉長及 $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ 為與同向有關之剪應變, 現知經 O 點任一線單元之拉長可以算出, 倘吾人知六個應變分量時。

如特別情況下變形為均勻時, 位移分量 u, v, w 為坐標之線性函數, 由 (e) 式知在物體體積內應變分量均為常數, 此時物體內每一單元均受相同之應變。

檢討 O 點附近應變時, 有時需知經此點兩線單元間夾角之變更。用 (c) 及 (a) 式並視 ϵ 為一微量, 單元 r 之方向餘弦 (圖 128), 經變形後為

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{\delta x + u_1 - u}{r(1+\epsilon)} = l \left(1 - \epsilon + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \\ m_1 &= \frac{\delta y + v_1 - v}{r(1+\epsilon)} = l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 - \epsilon + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \\ n_1 &= \frac{\delta z + w_1 - w}{r(1+\epsilon)} = l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 - \epsilon + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (f)$$

取經同一點另一線單元 r' 其方向餘弦為 l', m', n' , 變形後此等餘弦之值類如 (f) 式所示。變形後兩單元間夾角之餘弦為

$$\cos(rr') = l_1 l'_1 + m_1 m'_1 + n_1 n'_1$$

視此兩方面之拉長 ϵ 及 ϵ' 為微量並用方程式 (f), 得

$$\begin{aligned} \cos(rr') &= (ll' + mm' + nn')(1 - \epsilon - \epsilon') + 2(\epsilon_x ll' + \epsilon_y mm' + \epsilon_z nn') \\ &\quad + \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \gamma_{xz}(nl' + n'l) + \gamma_{xy}(lm' + l'm) \end{aligned} \quad (118)$$

如 r 及 r' 為互相垂直, 則

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

而 (118) 式為此兩方向間之剪應變。

(註) 此可與方程式 (109) 對 σ_n 之算式相較, 注意該處末三項之因數 2。如用指標符號, 如第 7 節中 (f) 式, 方程式 (117) 右方以 ϵ_{ij} 表示時有一對稱因數 2, 當考慮更換坐標時此為一有利之形式, 應力與應變兩者均由二級張量表示之。

第八十二節 主應變軸

由方程式 (117) 對一點上應變之變化可得一幾何性解釋。為此設在每一線單元 r (圖128) 方向上一半徑向量長

$$R = \frac{k}{\sqrt{\epsilon}} \quad (a)$$

然後，以第75節所示之進行方法，可證明所有此等半徑末端均落於下式之曲面上

$$\pm k^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 + \gamma_{yz} yz + \gamma_{xz} xz + \gamma_{xy} xy \quad (119)$$

此面之形式與方位可由一點上應變情況所完全決定而與坐標軸方向無關。永遠可取如此方向之正交坐標系使含坐標乘積各項消失於(119)中，亦即，對此等方向剪應變為零。此等方向稱為應變主軸，對應之平面稱為應變主面，及對應之應變為主應變。由以上討論，變形後各主軸明顯仍保持互相垂直，一各邊平行於主面之矩形六面體變形後仍保持為矩形六面體。一般情況下，此將受一小轉動。

設 x ， y ，及 z 為應變主軸，則方程式 (119) 變為

$$\pm k^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2$$

此時任一線單元方向餘弦為 l ， m ， n 者，其伸長由 (117) 為

$$\epsilon = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 \quad (120)$$

而對應於兩垂直方向 r 及 r' 之剪應變為，由 (118) 式

$$\gamma_{rr'} = 2(\epsilon_x ll' + \epsilon_y mm' + \epsilon_z nn') \quad (121)$$

由此可知如吾人對應變主軸之方向及主應變各值求得後一點上應變即完全決定。求應變主軸及主應變值可依第77節以相同方式進行。將亦證明 $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ 當坐標系轉動時保持為常數，此項和，如吾人所知，具一簡明物理意義；代表因點上應變所致之單位體積膨脹。

第八十三節 轉動

物體在變形過程中，一般情況為任何單元改變形狀，平移及轉

動。因剪應變關係單元各邊轉動量並不一致，故需考慮如何規定整個單元之轉動，任何矩形六面體單元達其最後形狀、位置、及方位時可視為經過以下三個步驟，由未變形開始：

1. 各應變分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ 施於單元上，安置其方位使其主應變方向未經轉動。
2. 平移此單元直至中心佔其最後位置。
3. 轉動單元至其最後方位。

第三步之轉動明顯為轉動主應變之方向，故與選用之 x, y, z 軸無關。當位移分量 u, v, w 為已知時必可予以計算。另一方面，此明顯與應變分量無關。

因單元之平移與現所討論問題無涉，吾人可考察 O_1 點之位移，如第81節及圖128，相對於單元之中心點 O 。此相對位移為第81節方程式 (b) 所示者，為

$$\begin{aligned} u_1 - u &= \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ v_1 - v &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ w_1 - w &= \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad (a)$$

引用 (81) 之應變符號，另用以列符號 (註)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \omega_x \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \omega_y \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_z \quad (122)$$

吾人可將方程式 (a) 寫為以下形式

(註) 由圖6可知 $\partial v / \partial x$ 及 $-\partial u / \partial y$ ，在 ω_z 出現者，為線單元 $O'A'$ ， $O'B'$ 自原位置之順時轉動，故 ω_z 為此等轉動之平均值， ω_x 及 ω_z 在 yz 與 xz 平面內具相同之意義。

$$\begin{aligned}
 u_1 - u &= \epsilon_x \delta x + 1/2 \gamma_{xy} \delta y + 1/2 \gamma_{xz} \delta z - \omega_z \delta y + \omega_y \delta z \\
 v_1 - v &= 1/2 \gamma_{xy} \delta x + \epsilon_y \delta y + 1/2 \gamma_{yz} \delta z - \omega_x \delta z + \omega_z \delta x \\
 w_1 - w &= 1/2 \gamma_{xz} \delta x + 1/2 \gamma_{yz} \delta y + \epsilon_z \delta z - \omega_y \delta x + \omega_x \delta y
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

此將相對位移分為兩部，一部僅與應變分量有關，另一部則僅與各量 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 有關。

吾人現可證明 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 即第 3 步驟所云之轉動。取 (119) 所示之面。任何方向半徑之平方與該方向線單元之單位拉長成反比。方程式 (119) 為

$$F(x, y, z) = \text{常數} \tag{c}$$

如吾人取面上一鄰點 $x+dx, y+dy, z+dz$ ，可得以下關係

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \tag{d}$$

位移 dx, dy, dz 之方向其餘弦與 dx, dy, dz 成正比。三量 $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z$ 亦規定一方向，因吾人可取與其成比例之方向餘弦。方程式 (d) 之左方因此與兩方向間角之餘弦為正比。因此值為零，兩方向為直角，並因 dx, dy, dz 代表切面至四面上點 x, y, z 之方向， $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z$ 所代表之方向垂直於方程式 (c) 所代表之面。

現 $F(x, y, z)$ 為 (119) 式右方之函數，因此

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x} &= 2\epsilon_x x + \gamma_{xy} y + \gamma_{xz} z \\
 \frac{\partial F}{\partial y} &= \gamma_{xy} x + 2\epsilon_y y + \gamma_{yz} z \\
 \frac{\partial F}{\partial z} &= \gamma_{xz} x + \gamma_{yz} y + 2\epsilon_z z
 \end{aligned}
 \tag{e}$$

方程式 (119) 所代表之曲面係以 (128) 圖之 O 點為中心所繪，吾人可自 (e) 式中之 x, y, z 辨認 (b) 式中之 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 。

現取 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 爲零時之特別例。此時方程式 (e) 右方各項與 (b) 式右方除因數 2 外完全相同，因此，方程式 (b) 之位移正交於 (109) 式之曲面，取 O_1 (圖 128) 爲曲面上一點， O_1 之位移即在 O_1 處正交於曲面。故如 OO_1 ，爲應變主軸之一，亦即曲面主軸之一， O_1 位移方向係沿 OO_1 ，因此 OO_1 不轉動。此項位移爲對應第一步驟者。

爲完成此位移，必須在 (b) 式中恢復 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 各項，但此等項目對應於微剛體轉動，對 x, y, z 各軸分量爲 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 。因此，各量如 (122) 所示，爲第三步驟之轉動——亦即，在 O 點處應變主軸之轉動，此簡稱爲轉動分量。

習 題

1. 求一物體表面之方程式 $F(x, y, z) = 0$ ，此曲面中心在 O 點均勻變形後成爲一球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ 。
2. 證如物體各部分轉動均爲零時 (無轉動變形)，位移向量爲一數量位函數之梯度。例舉此種無轉動變形。

第八章 一般定理

第八十四節 平衡微分方程式

前在第74節中吾人曾對彈性體內一點上之應力予以討論。現考慮點變更位置時應力之變化，為此必須檢討各邊長為 δx , δy , δz (圖 129) 微矩形六面體之平衡。作用於此微單元各正向之應力分量均示於圖上。此時將坐標增值 δx , δy , δz 所致之各應力分量之微變均計入。單元各邊中點用 1, 2, 3, 4, 5, 6 標註如圖 129, 在 1, 2 兩點上 σ_x 值分別寫為 $(\sigma_x)_1$ 及 $(\sigma_x)_2$ 。符號 σ_x 本身指此分量在 x, y, z 處之值。計算作用於此單元上各力時吾人視各邊為極小，力係由一邊形心上之應力與此邊面積相乘而得。

必須注意前在圖 126 中討論四面體平衡時所忽計之高階微量——體力——此時必須計入，因其值與現所考慮之應力分量變動同階。如用 X, Y, Z 代表單元單位體積體力分量，則平衡方程式可由所有作用此單元沿 x 向之總和求得

$$\begin{aligned} & [(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_2] y \delta z + [(\tau_{xy})_3 - (\tau_{xy})_4] \delta x \delta z \\ & + [(\tau_{xz})_5 - (\tau_{xz})_6] \delta x \delta y + X \delta x \delta y \delta z = 0 \end{aligned}$$

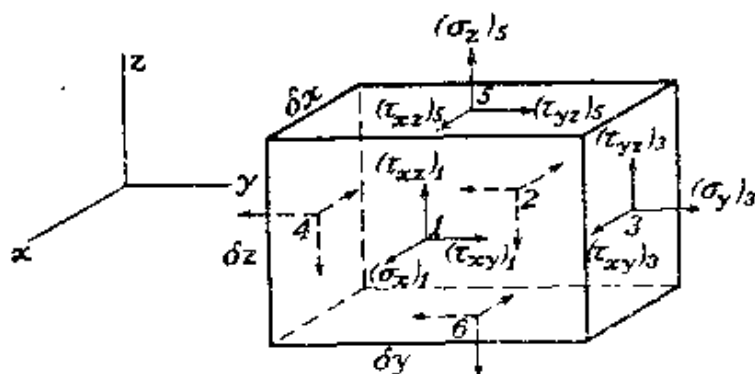


圖 129

另兩平衡方程式亦類此求得。經除以 $\delta x \delta y \delta z$ 並縮小單元於 x, y, z

點上極限時，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0\end{aligned}\quad (123)$$

在物體容積內所有各點上應力均須適應方程式 (123)。應力在容積內變化，在表面上則須與作用於表面上之外力平衡。此等表面上平衡條件可得自方程式 (108)。取一四面體 $OBCD$ (圖126) 使 BCD 與物體表面重合，用 \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} 代表此點上單位面積表面力分量，方程式 (108) 變為

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ \bar{Y} &= \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l \\ \bar{Z} &= \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m\end{aligned}\quad (124)$$

內 l , m , n 為物體此體上外法線各方向餘弦。

如問題為求已知外力作用下物體應力情況，需解方程式 (123)，而此解須使適應邊界條件 (124)。此等方程式，內含六個應力分量， $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}$ ，不足以決定此等分量。問題為一靜不定者，欲求解必須如前對二維問題所採步驟，即另須考慮彈性變形。

第八十五節 配合條件

每一點上六個應變分量可由三個位移分量函數， u , v , w ，完全代表。因此，應變分量不能為 x , y , z 之任意函數，而須受如方程式 (2) 之條件。

由方程式 (2)，

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

得知

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (a)$$

由循環交換 x, y, z 三字母可得另兩個同種關係

由下列各導數

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} & \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

得知

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (b)$$

互換字母 x, y, z 可得 (b) 式另兩個關係。因此吾人得下列應變分量間六個微分關係，而為方程式 (2) 所必須適應者

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (125)$$

此等微分關係稱為配合條件 (註) (conditions of compatibility)。

(註) 證明此六方程式足夠保證對應於已知函數集 $\epsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$ ，位移之存在可參考 A. E. H. Love, "Mathematical Theory of Elasticity," 4th ed., p. 49, Cambridge University Press, New York, 1927, 及 I. S. Sokolnikoff, "Mathematical Theory of Elasticity," p. 25, 1956. 此等方程式為 B. de Saint-Venant 所得，見其所刊行之 C. L. M. H. Navier, "Résumé des Leçons sur l' Application de la Mécanique," app. 3, Carilian-Goeury, Paris, 1864.

用虎克定律〔方程式 (3)〕, (125) 各條件可轉換爲應力分量間之條件。例如, 取條件

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

由方程式 (3) 及 (4), 用 (7) 所採符號, 得

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_y - \nu\theta]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_z - \nu\theta]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)\tau_{yz}}{E}$$

代此等算式以 (c), 得

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2}\right) - \nu\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (d)$$

此式之右方可用平衡方程式 (123) 再予轉換。由此等方程式知

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - Z$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - Y$$

將第一個對 z 微分第二個對 y 微分, 相加後得

$$2\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) - \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial y}$$

再由方程式 (123) 中之第一個, 得

$$2\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}$$

代此於方程式 (d), 並用簡化符號

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

得

$$\begin{aligned} (1+\nu)\left(\nabla^2\theta - \nabla^2\sigma_x - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) - \nu\left(\nabla^2\theta - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) \\ = (1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \end{aligned} \quad (e)$$

由另兩與 (c) 類比條件可得另兩類比方程式。

將三個 (e) 型方程式相加，得

$$(1-\nu)\nabla^2\theta = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \quad (f)$$

將此式之 $\nabla^2\theta$ 代入方程式 (e)，

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x} \quad (g)$$

吾人可得三個此種方程式，對應於方程式(125)中前三個。類此(125)中其餘三條件可轉換為以下形式之方程式：

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \quad (h)$$

如無體力存在或體力為常數時，方程式 (g) 與 (h) 變為

$$\begin{aligned} (1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= 0 & (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} &= 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} &= 0 & (1+\nu)\nabla^2\tau_{xz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} &= 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} &= 0 & (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (126)$$

吾人現知除平衡方程式 (123) 及邊界條件 (124) 外，同向性物體內應力分量須適當六個配合條件 (g) 及 (h) 或六個條件 (126)。此方程式系統一般足夠決定應力分量而不含困惑 (閱第96節)。

配合條件僅含應力分量二次導數。因此，如外力為如此而使平衡方程式 (123) 及邊界條件 (124) 均可由取應力分量為常數或坐標之

線形函數而適應時，配合條件則恆被適應而此應力系統為問題之正確解。第九章中將例舉此種問題。

第八十六節 位移之決定

用以上方程式求得應力分量後，應變分量可由虎克定律〔方程式(3)〕及(6)計算之。然後用方程式決定位移 u, v, w 。對 x, y, z 微分(2)吾人得18個方程式含18個 u, v, w 之次階導數，並可由此算出各導數。例如，對 u 言，吾人得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (a)$$

對另兩位移分量 v 及 w 之二次導數可循環更換 (a) 式內之 x, y, z 求得。

現 u, v, w 可對此等二次導數兩次積分求出。積分時任意常數將以 x, y, z 線性函數形式附加於 u, v, w 值中，而顯然此等附加函數並不影響各 (a) 式，欲使應變分量 (2) 對此附加不變更，附加之線性函數應具下式

$$\begin{aligned} u' &= a + by - cz \\ v' &= d - bx + ez \\ w' &= f + cx - ey \end{aligned} \quad (b)$$

此指位移不能全由應力及應變決定。由微分方程式 (123), (124), 及 (126) 所得之位移可重疊一剛體之位移。方程式 (b) 內常數 a, d, f 代表物體之平移運動，常數 b, c, e 為剛體對坐標軸之轉動。當有足夠之拘束阻礙剛體運動時，(b) 式中之六常數可由拘束條件算出。以後將舉數例以解釋此種計算。

第八十七節 用位移表示平衡方程式

解彈性問題方法之一為自方程式 (123) 及 (124) 中用虎克定律消去應力分量並以位移表達應變分量。如此吾人得含三個未知函數 u, v, w 之三個平衡方程式。將 (11) 代入 (123) 之第一個方程式，得

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a)$$

再由 (6) ，

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (b)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

吾人得

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + X = 0$$

另兩方程式可以相同方式轉換。然則採用符號 ∇^2 (見第246頁) ，平衡方程式 (123) 變為

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z &= 0 \end{aligned} \quad (127)$$

當無體力作用時

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v &= 0 \end{aligned}$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w = 0 \quad (128)$$

將此等方程式微分，第一個對 x ，其次對 y ，最後一個對 z ，相加後得

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 e = 0$$

亦即容積膨脹 e 適應微分方程式

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 \quad (129)$$

當體力在容積內為常數時亦得同一結論。

將方程式 (a) 及 (b) 等代入邊界條件 (124) 中，得

$$\bar{X} = \lambda e_l + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) \quad (130)$$

.....

方程式 (127) 連同邊界條件 (130) 完全規定三個函數 u ， v ， w 。用此結果應變分量可自式 (2) 求得，應力分量即可由式 (9) 及 (6) 算出。第14章中將應用此種方程式。

第八十八節 位移之一般解

用直接代入可以驗證微分方程式 (128)，以位移函數表達平衡條件者，可由以下諸式適應之 (註1)。

$$u = \phi_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial x} (\phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3)$$

(註1) 此解分別為 P. F. Papkovitch, *Compt. Rend.*, vol. 195, pp. 513 and 754, 1932, 及 H. Neuber, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 14, p. 203, 1934, 所求得。其他解為 B. Galerkin, *Compt. Rend.*, vol. 190 p. 1047, 1930, 及 Boussinesq and Kelvin, 閱 Todhunter and Pearson, "History of Elasticity," vol. 2, pt. 2, p. 268.

$$v = \phi_2 - \alpha \frac{\partial}{\partial y} (\phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3)$$

$$w = \phi_3 - \alpha \frac{\partial}{\partial z} (\phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3)$$

內 $4\alpha = 1/(1-\nu)$ ，4 函數 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ 均調和，亦即

$$\nabla^2 \phi_0 = 0 \quad \nabla^2 \phi_1 = 0 \quad \nabla^2 \phi_2 = 0 \quad \nabla^2 \phi_3 = 0$$

此解可證明為普遍者，即無 ϕ_0 時亦如此（註1）。

此解曾被 Neuber 用於曲線坐標系中，並用以解雙曲線旋轉體問題（註2）（柱體帶雙曲線槽溝）及橢圓旋轉體（橢圓旋轉體空洞）受張力、撓曲、扭轉、及對軸線橫向剪力與撓曲同時作用諸問題。

第八十九節 重疊原理

對已知表面力及體力彈性體問題解所需者為決定應力分量，或位移，而能適應各微分方程式及邊界條件者。如吾人選擇應力為工作對象，則須適應：（1）平衡方程式（123）；配合條件（125）；（3）邊界條件（124）。設 $\sigma_x \dots, \tau_{xy} \dots$ ，為求得之應力分量，此等應力為表面力 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 及體力 X, Y, Z 所產生者。

設 $\sigma_x', \dots, \tau_{xy}' \dots$ 為在同一彈性體中由表面力 $\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}'$ 及體力 X', Y', Z' 所產生之應力分量。如此則 $\sigma_x + \sigma_x', \dots, \tau_{xy} + \tau_{xy}'$ ， \dots 將代表由表面力 $\bar{X} + \bar{X}'$ ， \dots 及體力， $X + X'$ 同時作用之結果。此係因所有微分方程式及邊界條件均係線性者。因此，在（123）中第一式內加以

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial z} + X' = 0$$

（註1）對完整性所需函數數目，閱 P. M. Naghdi 及徐皆蘇，*J. Math. Mech.*, vol. 10, pp. 233-246, 1961, 及所附參考文獻。另參考 R. D. Mindlin, *Bull. Am. Math. Soc.*, 1936, p. 373.

（註2）H. Neuber, "Kerbspannungselhre," [2d ed., Springer-Verlag OHG, Berlin, 1598. 此書亦討論兩維問題。閱前第六章。

可得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x + \sigma_x') + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} + \tau_{xy}') + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{xz} + \tau_{xz}') + X + X' = 0$$

同樣對 (124) 中第一式及其相對部分相加得

$$\bar{X} + \bar{X}' = (\sigma_x + \sigma_x')l + (\tau_{xy} + \tau_{xy}')m + (\tau_{xz} + \tau_{xz}')n$$

條件亦可如此聯合。整個方程式集合顯示 $\sigma_x + \sigma_x', \dots, \tau_{xy} + \tau_{xy}', \dots$ 適應由 $\bar{X} + \bar{X}', \dots, X + X', \dots$ 所生應力之所有方程式及條件。此為重疊原理之一例。此可推論於其他型之邊界條件如位移為已知等。

引導平衡方程式 (123) 及邊界條件 (124) 時，吾人未曾分別單元在加力前與加力後之位置與形狀。因此，所有方程式及結論僅當變形之小位移不至對外力作發生重大影響時方為正確。另有必須計入變形之題例。此時上述之重疊原理不能成立。梁受同時作用之軸向壓力及橫向荷重即屬此種問題之一例，討論薄壁結構之彈性穩定問題時，亦遇多數此類情況。

第九十節 應變能

當一均勻斷面桿受簡拉時，兩端外力隨桿之拉長作某量之功。因此，如圖 130 所示單元僅受應力 σ_x ，有一力 $\sigma_x dydz$ 對拉長 $\epsilon_x dx$ 作

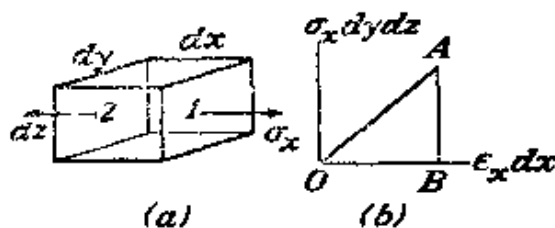


圖 130

功，加力時此兩種量可由一直線代表如圖 130 中 OA 所示，變形時所作之功為三角形 OAB 面積 $\frac{1}{2}(\sigma_x dydz)(\epsilon_x dx)$ 。用 dV 代表此功，得

$$dV = 1/2 \sigma_x \epsilon_x dx dy dz$$

對其他同體積之單元顯然將有同量之作功，現吾人欲問此功之出路為何即變為何種能量？

如為氣體，絕對壓縮使溫度提高。普通鋼料絕熱壓縮時，有一類似，但極小量之溫度上昇，消去熱量後可使溫度復原。此種溫度變更改換應變，但僅為絕熱應變之極小部分，設並非如此，則絕熱與同溫彈性模數將有甚大之分別，對普通金屬實際差異極小（註1）。例如，對鐵言，絕熱楊氏模數僅超過同溫模數百分之0.25。本書將不計此種差異（註2）。對一單元所作之功，蓄於其內，將稱為應變能。吾人設單元保持彈性且不發生動能。

當所有六個應力分量， $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ 均作用於單元時（圖3），可作相同之推論。能量不滅原理需功與施力次序無關而僅視其最後值，否則吾人可用某一順序施力而用相當較大功量之另一順序卸力。如此則在一循環中可自單元內獲淨量之功。

如外力，或應力，均同時以等比率遞增時作功之計算最為簡易。每一力與其對應之位移關係仍為線性者，如圖130b，所有各力所作之功為

$$dV = V_0 dx dy dz \quad (b)$$

內

$$V_0 = 1/2 (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad (c)$$

故 V_0 為單位體積之功，或單位體積之應變能。

（註1）克爾文曾計算之，見 *Quart. J. Math.*, 1855, 重刊於 *Phil. Mag.*, ser. 5, no. 5, pp. 4-27, 1878. 對較早文獻閱 Love, *op cit.*, p. 99.

（註2）進一步研究閱 C. E. Pearson, "Theoretical Elasticity," p. 164, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1959.

以上討論中單元兩對面上應力視為相同且無體力存在。現考慮應力在物體內變化並計入體力時對單元所作之功。先取 130a 圖面 1 上作用力 $\sigma_x dy dz$ ，對此面之位移 u 所作之功量為 $1/2(\sigma_x)_1 dy dz$ ，底標 1 指函數 σ_x ， u 須在 1 處估計。面 2 上力 $\sigma_x dy dz$ 所作之功為 $-1/2(\sigma_x)_2 dy dz$ ；兩力作功之和為

$$1/2[(\sigma_x u)_1 - (\sigma_x u)_2] dy dz$$

在取極限後為

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u) dx dy dz \quad (d)$$

計算在 1, 2 兩面上剪應力 τ_{xy} , τ_{xz} 所作之功，加於 (d) 後，得作用於兩面所有三應力分量所作之功為

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) dx dy dz$$

內 v 及 w 為沿 y 及 z 向之位移。另兩對面上所作之功亦可類似表示之。吾人得，各面上應力之總功，為

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y v + \tau_{yz} w + \tau_{xy} u) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z w + \tau_{xz} u + \tau_{yz} v) \right] dx dy dz \quad (e)$$

物體受體力 $X dx dy dz$ 等作用所作之功為

$$1/2 (Xu + Yv + Zw) dx dy dz \quad (f)$$

對單元上之總功為 (e) 與 (f) 和。對 (e) 式微分展開後，總功為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad + u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) + v \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right) \\ & \quad \left. + w \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z \right) \right] dx dy dz \end{aligned}$$

但由第84節所導得之平衡方程式 (123)，上式內 u , v , w 所乘各括弧均為零。與應力分量相乘各量為，由方程式 (2), $e_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$ 。故對單元所作之功簡化為 (b) 及 (c) 所示之值。故當應力有變化並計入體力時，此等公式仍為對單元所作之功。

用虎克定律，方程式 (3) 及 (6)，可將 V_0 換為只含應力分量之函數。如此則

$$V_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \quad (131)$$

下式可直接驗證

$$V_0 = \frac{1}{2E} [I_1^2 - 2(1+\nu)I_2]$$

內 I_1 及 I_2 為 79 節所述之應力不變量。

吾人亦可用方程式 (11) 將 V_0 以應變分量之函數表示之，如此則

$$V_0 = 1/2\lambda e^2 + G(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + 1/2G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \quad (132)$$

內

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

此式立示 V_0 永為正值。

極易證示 (132) 所表達之 V_0 之導數，對任一應變分量，為對應之應力分量。取對 ϵ_x 之導數並用方程式 (11)，得

$$\frac{\partial V_0}{\partial \epsilon_x} = \lambda e + 2G\epsilon_x = \sigma_x$$

對平面應力系統， $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ，由 (131)，知

$$V_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E}\sigma_x\sigma_y + \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2 \quad (133)$$

或用應變表示，為

$$V_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)}(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y) + \frac{G}{2}\gamma_{xy}^2 \quad (134)$$

受變形彈性體內總應變能可對單位體積應變能 V_0 積分求得。用

$d\tau$ 代表體積單元，得

$$V = \int V_0 d\tau \quad (135)$$

此代表加載時對抗內力所作之總功，如吾人想像物體為含極大數目質點由彈簧相互連結，此將代表拉長或壓縮彈簧所作之功。對內力作用於質點上所作之功，吾人須用相反符號。

材料中單位體積之蓄能有時用為決定損壞時應力限度之根據（註1）。為使此項理論與同向性材料可承受極大靜水壓力而不屈服之事實符合，故經這議分應變能為兩部分，一部為體積變更所致，另一部為形狀改變，而決定強度時僅取第二項（註2）。

吾人知體積變更與三正交應力和成正比（方程式（8）），故如此稱爲零時，物體變化僅含形狀更改。吾人可分每一正交應力為兩部分，

$$\sigma_x = \sigma_x' + p \quad \sigma_y = \sigma_y' + p \quad \sigma_z = \sigma_z' + p$$

$$\text{內} \quad p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (h)$$

因此

$$\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$$

應力 σ_x' , σ_y' , σ_z' 僅產生形狀改變，體積之變更完全（註3）視均勻張力 p 而定，總能量內與體積變更有關部分為，由方程式（8）

$$\frac{ep}{2} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} p^2 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad (i)$$

於 (131) 式中減去此量，並用以下恆等式

（註1）各種強度理論見 S. Timoshenko "Strength of Materials," vol. 2, New York, 1956.

（註2）閱 M. T. Huber, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1904. 另參考 R. von Mises, *Göttin-gen Nachrichten, Math.-Phys. Klasse*, 1913, p. 582, 及 F. Schleicher, *Z. Angew. Math.*, vol. 5, p. 199, 1925. 對實驗比較閱 R. Hill, "Plasticity," Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1950.

（註3）剪應力分量 τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} 所生剪應變對體積變更是一階微量言無影響。

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x = & -1/2[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \\ & + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) \end{aligned}$$

吾人可寫總能量內屬形狀改變部分為

$$\begin{aligned} V_0 - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = & \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \\ & + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \end{aligned} \quad (136)$$

在沿 x 向簡拉例中，僅 σ_x 不為零，改變形狀之應變能(136)為 $(1+\nu)\sigma_x^2/3E$ 。在純剪例中，設為 xz 及 yz 平面間，僅 τ_{xy} 不為零，形狀改換應變能為 $(1/2G)\tau_{xy}^2$ ，如不論應力系統為如何，損壞在變形應變能達一定限度時之理論為正確時，拉應力臨界值與剪應力臨界值之比率可山下式求出

$$\frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_x^2$$

或
$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_x = 0.557 \sigma_x \quad (j)$$

對鋼料之試驗顯示(註1)拉應力屈服點與剪應力屈服點之比率對(j)式極為接近，聖維南原理(見第36頁)，用應變能觀念，可與能量不減定律連結(註2)。此原理相當於說明一自成平衡力系分布於彈性體一小部分僅生局部應力。

此一分布力在其放置時作功僅因在荷力區內有變形發生，設此區內有一表面單元位置與方向固定，設 p 代表為單位面積上受力， a 為受力區代表性之線尺度(例如，直徑)，應變分量值階為 p/E ，在受力區內相對位移值為 pa/E 階。所作功之階為 $pa^2(pa/E)$ 或 p^2a^3/E 。

另一方面，應力分量為 p 階指應變能之階為每單位體積 p^2/E 。因此，由所述原理作功僅對 a^3 階之體積為足夠。

此處吾人假設物體適應虎克定律並為固體形式。前一限制可以免除，以上論據中 E 僅指材料應力應變曲線斜率之值階，如物體非固體形式，例如極薄腹板之

(註1) 參考文獻 W. Lode, *Z. Physik*, vol. 36, p. 913, 1926, and *Forschung-sarbeiten*, no. 303, Berlin, 1928.

(註2) J. N. Goodier, *Phil. Mag.*, ser. 7, vol. 24, p. 325, 1937; *J. Appl. Phys.*, vol. 13, p. 167, 1942.

梁，或柱體薄壳，自成平衡之力分布施於一端時在距離數倍於其深度或直徑處仍具影響（註1）。

在荷力區內或近荷力區如有一固定表面單元對非零總和之荷力上述論據仍可應用。因此，如一可變形材料與一剛體結合，在結合處對前者一小部施壓力時將僅產生局部應力（註2）。

第九十一節 邊緣脫節應變能

前於第34節中曾證示圖 48b 所示位移為 δ 之邊緣脫節將需一對力 P 。 P 及 δ 間關係，由第36節 (b) 及35節 (g)，為

$$P = -\frac{N}{a^2 + b^2} \frac{E}{4\pi} \delta \quad (a)$$

式中
$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a} \quad (b)$$

環中總應變能等於助力過程中一對力 P 所作之功。此即，應用 (a) 式

$$V = \frac{1}{2} P \delta = \frac{E}{8\pi} \frac{N}{a^2 + b^2} \delta^2 \quad (c)$$

每單位板厚。

此係對平面應力言。當平面應變時，對相同之應力函數 ϕ ，各應變 ϵ_x ， ϵ_y ， γ_{xy} ，及因此位移 u ， v ，由第20節所述彈性常數變更關係，與平面應力所有者有別，因此，欲換為平面應變（內 $\epsilon_z = 0$ ），吾人須以 $E/(1-\nu^2)$ 代替 E 。故由 (c) 及 (b)，

$$V = \frac{\delta^2}{8\pi} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\log \frac{b}{a} - \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \quad (d)$$

（註1）V. Z. Vlatsov, "Thin Walled Elastic Bars," Moscow, 1940;
J. N. Goodier and M. V. Barton, *J. Appl. Mech.*, vol. 11, p. A-35, 1944; N. J. Hoff, *J. Aeron. Sci.*, vol. 12, p. 455, 1945. L. H. Donnell, *J. Appl. Mech.*, vol. 29, pp. 792-793, 1962.

（註2）J. N. Goodier, *J. Appl. Physics*, *loc. cit.*

爲單位軸向長之應變能（沿 Oz ）。此公式在材料科學中常用於晶體之脫節能（註1）。半徑 a 及 b 均須予以有限值；否則能量變爲無限者。外半徑與晶體總尺度有關，內半徑與晶體結構格子原子間隔有關。

在彈性邊界值問題中，邊界通常爲一定者。但在晶體內脫節中心可在晶體內移動——有如內邊界面 $r=a$ 可以平移而外邊界面 $r=b$ 不動。如有兩脫節同時存在，一爲正（即 δ 爲正）一爲負（即 δ 爲負），只須其中心分開即有淨應變能。如兩者重合，兩脫節即互相對消。顯然兩者趨近時必降低無應變能。因在此情況下此能代表此系統之總位能，兩中心將係互相吸引（註2），當合一時此能已換爲另一形式——例如，晶體內部之波動。

第九十二節 虛功原理

彈性問題求解時應用虛功原理有時頗爲方便。對一質點，此原理說明如質點係平衡時，對質點所發生任何虛位移所有作用於質點各力總功爲零。

如 δu , δv , δw 爲虛位移沿 x , y , 及 z 向之分量， ΣX , ΣY , ΣZ 爲沿各向力分量總和，作用於此質點上，虛功原理所示爲

$$\delta u \Sigma X = 0 \quad \delta v \Sigma Y = 0 \quad \delta w \Sigma Z = 0 \quad (a)$$

對任何虛位移如

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma Z = 0 \quad (b)$$

則方程式 (a) 可被適應。反之，如方程式 (b) 爲已知，吾人可乘以任意 δu , δv , δw 以得 (a) 式。事實上，虛位移僅爲此等任意乘數之名稱。各力均保持不變。

(註1) 參閱 A. H. Cottrell, "Dislocations and Plastic Flow in Crystals," p. 38, Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1953.

(註2) 見 G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A*, vol. 134, pp. 362-387, 1934.

一靜止彈性體，與其表面力及體積力，為一質點系統，其中每一質點上受平衡力集之作用。經任何虛位移時，作用於任何質點上各力之總功為零，故系統內所有各力之總功為零。

對彈性物體，虛位移可為任何與材料連續條件適合之小位移（註1），及與物體面位移條件適合，如此等條件係經規定時。例如，物體表面一部分，設為梁之嵌入端，為不能移動或有一已知之位移，對此部分之虛位移可取為零。

用 u, v, w 代表實由荷力所造成之位移分量， $\delta u, \delta v, \delta w$ 為虛位移分量。後者為 x, y, z 之任意連續函數，絕對值為小量。

對應於六個應變分量增值虛位移為

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} \delta u, \dots, \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \delta v + \frac{\partial}{\partial y} \delta u, \dots \quad (c)$$

對一體積單元虛功為

$$(\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz \quad (d)$$

由90第 (g) 式此可寫為

$$\delta V_0 dx dy dz \quad (e)$$

V_0 取為應變分量之函數如 (132)。

如前所云，此項應變能改變為反於質點間互相反用力所用之功（如拉長彈簧等）。欲求質點互相作用力作之功，則應變更符號。

外力含 (1) 邊界表面力 $\bar{X} dS, \bar{Y} dS, \bar{Z} dS$ ，作用於每一表面單元 dS 上，及 (2) 體積力 $X d\tau, Y d\tau, Z d\tau$ 作用於每一體積單元 $d\tau$ 或 $dx dy dz$ 。

對整個物體總虛功為零之陳述現為以下形式

(註1) 小位移（與實際位移相較）僅係為方便計。

$$\int (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dS + \int (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) d\tau - \int \delta V_0 d\tau = 0 \quad (137)$$

因已知外力及實際應力分量在構成 (137) 式維持不變，變分符號可置於積分符號前。如此則可寫為

$$\delta [V_0 d\tau - \int (Xu + Yv + Zw) d\tau - \int (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dS] = 0 \quad (137')$$

基於 δ 對顯明寫出各力無影響之了解，括弧內第一項為應變能，因移御荷力時為可用之能，故可稱為變形位能。第二項積分為體積力之位能，當 $u=v=w=0$ 時此能為零。第三項為表面力位能。括弧內整個算式稱為系統之總位能。如此則 (137') 式說明在已知外力下（及已知支承型式）實際位移 u, v, w 為對任何虛位移使總位能一階變分為零——或簡言之，總位能為靜止值。

虛位移及虛功各名稱，雖具歷史背景習慣用法，此處涵意則僅為應用任意乘數 $\delta u, \delta v, \delta w$ 及平衡方程式。為方便計，如前各段內，視其為實際位移 u, v, w 之變分。

為考察平衡之穩定性，設自平衡位移中由衝擊干擾發生位移實際變化。因為能量消散，位能及動能和保持常數。如脫離平衡方位時位能必須增加，動能即必須減低，但如位能必須降低時，動能則須增加。對小干擾言，此兩例分別為穩定及不穩定。穩定顯然指平衡位置時位能為最小值，不穩定時為最大。應用此位能觀念時係設干擾後之運動 (1) 體力及面積力隨其在平衡方位所作用材料單元移動及 (2) 其值及方向保持不變。

設仍取單位體積應變能為平面應力之 (134) 式，經衝擊性干擾後，平衡之應變分量設已增值，經短時間後，為 $\delta\epsilon_x, \delta\epsilon_y, \delta\gamma_{xy}$ ，由 (134) 式，知 V_0 之新值應為

$$\frac{E}{2(1-\nu^2)} [(\epsilon_x + \delta\epsilon_x)^2 + 2\nu(\epsilon_x + \delta\epsilon_x)(\epsilon_y + \delta\epsilon_y) + (\epsilon_y + \delta\epsilon_y)^2] \\ + \frac{G}{2} (\gamma_{xy} + \delta\gamma_{xy})^2$$

減去 (134) 式之平衡值，得總增量爲

$$\frac{E}{2(1-\nu^2)} [2\epsilon_x\delta\epsilon_x + 2\nu(\epsilon_x\delta\epsilon_y + \epsilon_y\delta\epsilon_x) + 2\epsilon_y\delta\epsilon_y] + \frac{G}{2} 2\gamma_{xy}\delta\gamma_{xy} \\ + \frac{E}{2(1-\nu^2)} [(\delta\epsilon_x)^2 + 2\nu\delta\epsilon_x\delta\epsilon_y + (\delta\epsilon_y)^2] + \frac{G}{2} (\delta\gamma_{xy})^2$$

上式內第一行代表一階增量，除體積因子 $dx dy$ 外，完全對應於 (e) 式。第二式爲二階增量，因 (134) 式中對任何 ϵ_x ， ϵ_y ， γ_{xy} 值 V_0 均爲正，故爲正。

由 (137') 式括弧內所代表各項，用上述公設 (1) 及 (2)，體積力及面積力均無二階增量。其一階增量亦消失，因干擾之實際位移 δu ， δv ， δw 可視爲虛位移。因二階增量必爲正值，由定義吾人得一穩定系統。此項結論虎克定律 (註 1) 及公設 (1) 及 (2) 而定，對非線性應力 - 應變關係高級增量不限二次爲正。

一系統內總能量曾由格利弗 (A. A. Griffith) 氏用以發展對脆性材料破裂之理論 (註 2)。材料強度較由分子力所預料者爲過小爲均知

(註 1) 在側潰理論中材料可適應虎克定律，但一柱或板在超過奧伊拉臨界壓力下將無此處意義下之穩定，但側潰問題不在線性彈性理論，因線性理論中位移及應變均設爲小值。例如註 37 所示問題中，對兩豎邊係取 $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ ， $x = \pm l$ ，但正確邊界條件應爲變形後兩邊上無正交及切向荷力。

(註 2) *Trans. Roy. Soc. (London), Ser. A*, vol. 221, pp. 163-189, 1921; 及 *Proc. Intern. Congr. Appl. Mech., Delft, Delft*, pp. 55-63, 1924. 對破裂現象參考文獻，閱 A. H. Cotrell, "The Mechanical Properties of Matter," Chap. 11, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964; D. C. Drucker & J. J. Gilman (eds.) "Fracture in Solids," Academic Press Inc., New York, 1962; & *Intern. J. Fracture Mech. (Started March, 1965)*

之事實，對某種玻璃格利弗得一理論拉力強度為 1.6×10^6 磅/平方吋，而該玻璃棒之拉力試驗僅得 26×10^3 磅/平方吋，格氏證明此項理論與實驗差距可以解釋，如吾人設材料如玻璃者內有極微裂口空隙存在發生高應力集中而結果使裂口增長分散。為計算數據格氏取一狹長橢圓形洞口，其長軸與拉力方向垂直。設一板沿 ab 及 cd 兩邊固定，受均勻分布拉力 S 作用，如圖 131 所示。如一極微橢圓口 AB 長 l 出現於

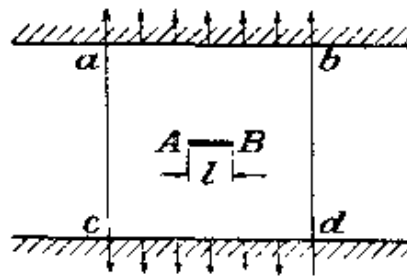


圖 131

板中， ab 及 cd 保持固定，由拉力 S 所生之起始應變能將減低。此減低量可由橢圓孔口解算出（註），對一單位厚度板為

$$V = -\frac{\pi l^2 S^2}{4E} \quad (f)$$

如裂縫增長，板內所蓄應變能將繼續減低，但裂縫增長增加表面能，因固體表面亦具如液體然之表面張力。例如，格利弗求得其試驗中所用玻璃每單位面積表面能 T 為 3.12×10^{-3} 磅/平方吋。如裂縫增長需增加之表面能可由應變能降底量供應，縫增長可在總能量不增加時出現。裂縫自動增長條件為此面積能量相等，用（f）式

$$\frac{dV}{dl} dl = \frac{\pi l S_{cr}^2}{2E} dl = 2dlT$$

由此式得

$$S_{cr} = \sqrt{\frac{4ET}{\pi l}} \quad (g)$$

（註）閱第94頁。

用割切玻璃鑽石所割已知長度裂縫所作試驗證示結果與 (g) 式所得者甚符合。實驗亦證明，如設法消除極微縫隙，通常可大為提高強度。格利弗對某些玻璃桿作所之試驗證示其極限強度可達 900,000 磅/平方吋，此約為上述理論強度一半強。

格利弗理論中裂縫末端處無限值應力存在疑問經由巴崙勃拉氏 (Barenblatt) 予以消除，彼引用大值但有限之應力以代表原子凝聚力 (註1)。

第九十三節 克氏定理

上節中一彈性物體受已知體力及邊界條件之平衡方位與經虛位移 δu , δv , δw 後鄰近方位相交。所得結論為對應於穩定平衡位置之真實位移為使系統總位能為最小。

現設考察對應於平衡位置之應力，而非位移。吾人知平衡微分方程式 (123)，連同邊界條件 (124)，不足以決定應力分量。吾人可求得不同之應力分布適應平衡方程式及邊界條件，而問題為：如何分別真實應力分布及所有其他靜力可能之應力分布？

設 σ_x 等為對應於平衡位置之真實應力分量； $\delta\sigma_x$ 等為此等應力小變量使新應力分量 $\sigma_x + \delta\sigma_x$ 等適應同一平衡方程式 (123)。如此則兩組方程式相減後，得應力分量變量適應以下型式之方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta\tau_{xz} = 0 \quad (a)$$

對應於此應力分量變化表面力亦將生變化，設 $\delta\bar{X}$, $\delta\bar{Y}$, 及 $\delta\bar{Z}$ 為邊界力小變化，則由 (124) 邊界條件得以下型式三個方程式

$$\delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m + \delta\tau_{xz} n = \delta\bar{X} \quad (b)$$

現考察由上述應力變化所造成應變能變化，取單位體積應變能為

(註1) G. N. Barenblatt, "Advances in Applied Mechanics," vol. 7, pp. 55-129, Academic Press Inc., New York, 1962.

應力分量之函數 (131)，其變化為

$$\delta V_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \cdots + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} + \cdots \quad (c)$$

式中右方含六項，內

$$\frac{\partial V_0}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \epsilon_x$$

等等，另

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \gamma_{xy}$$

等等，故

$$\delta V_0 = \epsilon_x \delta \sigma_x + \cdots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \cdots$$

因此由應力分量變更所造成總應變能變更為

$$\delta V = \int \delta V_0 d\tau = \int (\epsilon_x \delta \sigma_x + \cdots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \cdots) d\tau \quad (d)$$

現對此能量變更予以考察。為顧及邊界條件 (b)，吾人將需發散定理 (註 1)，或高斯定理，由曲面 S 所界限之區域，外向法線餘弦為 l ， m ，及 n 有三個位置函數 U ， V 及 W ，定理為

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) d\tau = \int (lU + mV + nW) dS \quad (138)$$

右方積分對整個邊界面，左方積分對 S 內整個體積， S 亦可為外部表面及內部表面 (孔隙) 和，現先選擇

$$U = u \delta \sigma_x \quad V = u \delta \tau_{xy} \quad W = u \delta \tau_{xz} \quad (e)$$

如此則定理 (138) 為

(註 1) 證明及有效條件見所有高等微積分或向量場分析書中，例如 I. S. Sokolnikoff 及 R. M. Redheffer, "Mathematics of Physics & Modern Engineering", p. 389, McGraw Hill Book Company, New York, 1958.

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \delta \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u \delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \delta \tau_{xz}) \right] d\tau = \int u (l \delta \sigma_x + m \delta \tau_{xy} + n \delta \tau_{xz}) dS \quad (f)$$

上式左方被積分函數可寫為

$$u \left(\frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta \sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta \tau_{xz} + \frac{\partial u}{\partial z} \delta \tau_{xz} \quad (g)$$

由 (a) 括弧內各項為零。現 (f) 變為

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta \sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \delta \tau_{xz} \right) d\tau = \int u \delta \bar{X} dS \quad (h)$$

如用另一選擇，由 (e) 式為循環調換

$$V = v \delta \sigma_y \quad W = v \delta \tau_{yz} \quad U = v \delta \tau_{yx}$$

所得結果為對 (h) 之循環調換

$$\int \left(\frac{\partial v}{\partial y} \delta \sigma_y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta \tau_{yz} + \frac{\partial v}{\partial x} \delta \tau_{yx} \right) d\tau = \int v \delta \bar{Y} dS \quad (i)$$

另一循環得

$$\int \left(\frac{\partial w}{\partial z} \delta \sigma_z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta \tau_{zx} + \frac{\partial w}{\partial y} \delta \tau_{zy} \right) d\tau = \int w \delta \bar{Z} dS \quad (j)$$

將 (h)，(i)，(j) 三式相加，並用位移應變關係 (2)，得

$$\begin{aligned} & \int (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \epsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) d\tau \\ & = \int (u \delta \bar{X} + v \delta \bar{Y} + w \delta \bar{Z}) dS \end{aligned} \quad (k)$$

此式左方為 δV ，如 (d) 式，因此 (131) 式之應變能變化，對應於保持平衡之應力變化，為

$$\delta V = \int (u \delta \bar{X} + v \delta \bar{Y} + w \delta \bar{Z}) dS \quad (139)$$

真實應力為能適應此方程式者。此種變化為數學性而非物理性。由邊界荷力變化引起之物理性應力變化較 (a) 式所示平衡條件牽制為多。但以數學觀點言，(136) 式之積分，其中 V_0 為六個變數之函

數，即 (131) 式中六個應力分量，當此等變數更值時必生變化，而不論其如何更值。

結構學理論中，集中力 P_1, P_2, \dots ，作用下線性彈性結構之應變能可用各力之二次函數 V 表示之。故

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial V}{\partial P_2} \delta P_2 + \dots$$

克氏定理 (註 1) 之對應位移分量 d_1, d_2, \dots 為

$$d_1 = \frac{\partial V}{\partial P_1} \quad d_2 = \frac{\partial V}{\partial P_2} \dots$$

此係因

$$\delta V = d_1 \delta P_1 + d_2 \delta P_2 + \dots \quad (140)$$

(140) 及 (139) 式之對比極為顯然，公理 (140) 亦稱為克斯蒂格里奴定理 (Castigliano's theorem)。

回視 (139) 式，吾人知應力變化可置邊界力 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 不變，如此則 (b) 式三條件之 $\delta \bar{X}, \delta \bar{Y}, \delta \bar{Z}$ 為零，而 (139) 變為

$$\delta V = 0 \quad (141)$$

因此對此等變化 V 為靜止值。吾人僅曾考慮〔由 (c) 式起〕一階增量或變量。對二階增量予以考慮時，可知事實上 V 為一最小值。方程式 (141) 有時亦稱為最小功原理，如結構學中類似之集中力問題。

在平面應力或平面應變中 $w = 0$ 或 $\delta Z = 0$ ，(139) 式化為

$$\delta V = \int (u \delta \bar{X} + v \delta \bar{Y}) ds \quad (142)$$

內 V 取其適當形式，例如平面應力時取 (133)，積分係對單位厚度，沿單元為 ds 繞周界曲線之線積分。

(註 1) 參閱 S. Timoshenko & D. H. Young, "Theory of Structures", p. 234, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965,

較廣泛之變分原理亦曾建立，位移與應力均可變分 (註1)。

第九十四節 最小功原理之應用——矩形板

取一矩形板為例。前曾證示用三角級數 (見第 95 頁) 可適應矩形板兩邊條件，當板之寬度較長度為小時，此方法所解得可具實用價值。如板之長度同階時，四邊之條件均須考慮。此種問題求解時最小能量原理有時可有效使用。

取受拉力之矩形板為例，設拉力在兩端上為拋物線式分布 (註2) (圖132)，邊界條件為：

對 $x = \pm a$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \sigma_x = S \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

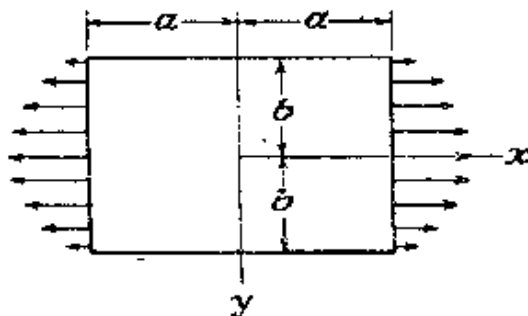


圖 132

對 $y = \pm b$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad (a)$$

單位厚度平板之應變能，由 (133) 式，

$$V = \frac{1}{2E} \iint (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2) dx dy \quad (b)$$

對一簡單連結邊界，如現所討論者，應力分布與彈性常數無關 (見第 140 頁)。以下計算中可取 ν 為零。如此引用應力函數 ϕ 並代於 (b) 式。

(註1) E. Reissner, "On Some Variational Theorems in Elasticity," N. I. Muskhelishvili 70th Anniversary Volume, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1961.

(註2) 參考 S. Timoshenko, *Phil. Mag.*, vol. 47, p. 1905, 1924.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \nu = 0$$

得知

$$V = \frac{1}{2E} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (c)$$

正確之應力函數形式為適應 (a) 並使應變能 (c) 為最小值。

如吾人用變分學方法以求 (c) 之最小值，將得 (30) 式之應力函數。設另取以下步驟 (註) 求問題之近似解。取應力函數為級數式

$$\phi = \phi_0 + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3 + \dots \quad (d)$$

使適應邊界條件 (a)， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ 為待定常數，代於 (c) 式，得 V 為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ 之二次式，此等常數值由以下條件計算

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_3} = 0 \quad \dots \quad (e)$$

此將為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ 之線性方程式。

由適當選擇之函數 ϕ_1, ϕ_2, \dots 通常僅須級數 (d) 首數項即可得滿意之近似值。此例中邊界條件 (a) 可取

$$\phi_0 = \frac{1}{2} S y^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right)$$

予以適應，因所得應力分量為

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} = 0 \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} = 0 \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} = S \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

其他函數 ϕ_1, ϕ_2, \dots 選擇時須使對應應力邊界上為零。為保證此點用因子 $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)^2$ 於所有此等函數；對 x 之二次導數在 $y = \pm b$ 邊上為零，對 y 之二次導數沿 $x = \pm a$ 為零， $\partial^2 / \partial x \partial y$ 則沿板四邊均為零。因此取

$$\phi = \frac{1}{2} S y^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right) + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \dots) \quad (f)$$

因應力分布與 x 及 y 軸均對稱，故僅用 x 及 y 之偶冪。僅取 α_1 一個係數，則

(註) 瑞芝或瑞萊-瑞芝法見 W. Ritz, *J. Reine Angew. Math.* vol. 135, pp. 1-61, 1908; 或 W. Ritz, "Gesamelte Werke," Gauthier-Villars, Paris, pp. 192-250, 1911.

$$\phi = \frac{1}{2} S y^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right) + \alpha_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

如此 (e) 之第一式化爲

$$\alpha_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}$$

板爲正方形時 ($a=b$) 得

$$\alpha_1 = 0.04253 \frac{S}{a^6}$$

應力分量爲

$$\sigma_x = S \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) - 0.1702 S \left(1 - \frac{3y^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2$$

$$\sigma_y = -0.1702 S \left(1 - \frac{3x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right)^2$$

$$\tau_{xy} = -0.6805 S \frac{xy}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right)^2$$

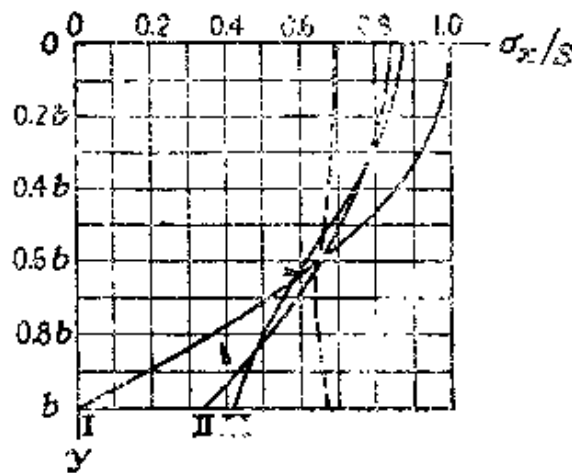


圖 133

斷面 $x=0$ 上 σ_x 之分布由曲線 II (註) 代表 (圖 133)。

爲求較佳近似值，取 (f) 之三項。如此則

$$\alpha_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left(\frac{64}{77} + \frac{64}{49} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_3 a^2 \left(\frac{64}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}$$

$$\alpha_1 \left(\frac{64}{11} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left(\frac{192}{143} + \frac{256}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{192}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_3 a^2 \left(\frac{64}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2} \quad (g)$$

(註) 曲線 I 代表板端拋物線應力分布。

$$\alpha_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{64}{11} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left(\frac{64}{77} + \frac{64}{77} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_3 a^2 \left(\frac{192}{7} \frac{b^2}{a^2} + \frac{256}{77} \frac{b^4}{a^4} + \frac{192}{143} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}$$

對一正方形板此為

$$\alpha_1 = 0.04040 \frac{S}{a^6}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0.01174 \frac{S}{a^8}$$

此應力分布係如曲線 III (註 1) (圖 133)。

$$(\sigma_x)_{x=0} = S \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) - 0.1616S \left(1 - 3 \frac{y^2}{a^2} \right) + 0.0235 \left(1 - 12 \frac{y^2}{a^2} + 15 \frac{y^4}{a^4} \right)$$

當板長增加時，分布於 $x=0$ 斷面上之應力逐漸趨於均勻。如取 $a=2b$ ，由 (g) 式得

$$\alpha_1 = 0.07983 \frac{S}{a^4 b^2} \quad \alpha_2 = 0.1250 \frac{S}{a^6 b^2} \quad \alpha_3 = 0.01826 \frac{S}{a^8 b^2}$$

對應之 σ_x 值如下表：

$\frac{y}{b} = 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\sigma_x = 0.690S$	0.684S	0.669S	0.653S	0.649S	0.675S

此分布在圖 133 中由虛線表示之，由此知此例結果與平均應力 $2/3 S$ 之差距甚小。

如為其他形式之對稱力分布，吾人僅需更換 (f) 內 ϕ_0 之形式即可。(g) 式內則僅換右方算式。

取不對稱於 x 軸應力分布例，設圖 134 (註 2) 所示撓曲兩端上受力為 $(\sigma_x)_{x=-a} = Ay^3$ (圖 134b 曲線 b)。顯然應力系統對 x 軸為奇而對 y 為偶。此等條件可取下列應力函數予以適應

$$\phi = 1/20Ay^5 + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 y + \alpha_2 y x^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 x^2 y^3 + \dots) \quad (\text{h})$$

式內第一項適應 ϕ 之邊界條件。用 (h) 式及 (e) 式內四個係數 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ，對一正方板得

(註 1) 類似結果見 C. E. Inglis, *Proc. Roy. Soc. (London)*, Ser. A, vol. 103, 1923; 另 G. Pickett, *J. Appl. Mech.*, vol. 11, p. 176, 1944.

(註 2) 此等計算取出 J. N. Goodier 博士論文，密西根大學，1931。另見 *Trans. ASME*, vol. 54, p. 173, 1932.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2Aa^3 \left\{ \frac{1}{2}\eta^3 - (1-\xi^2)^2(0.08392(5\eta^3-3\eta) + 0.004108(21\eta^5-20\eta^3+3\eta)) - \xi^2(1-\xi^2)^2(0.07303(5\eta^3-3\eta) + 0.04179(21\eta^5-20\eta^3+3\eta)) \right\} \quad (k)$$

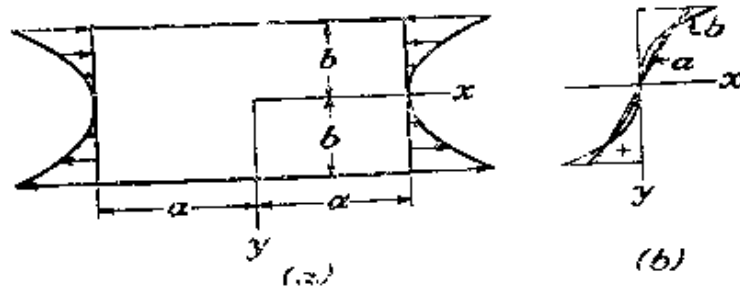


圖 134

式內 $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ 。中斷面 $x=0$ 上應力分布去線性甚遠，在圖 134b 中由曲線 a 代表。

第九十五節 寬翼緣梁之有效寬度

應用於矩形二維問題最小能量原理另一例，取翼緣極大之梁（圖 135）。此種梁常見於鋼筋混凝土及船殼結構。撓曲初等理論設撓曲應力與對中和線距離成正比，亦即沿翼緣寬度不變，但如寬度為極大時知距腹板相當遠處翼緣部分對抵抗

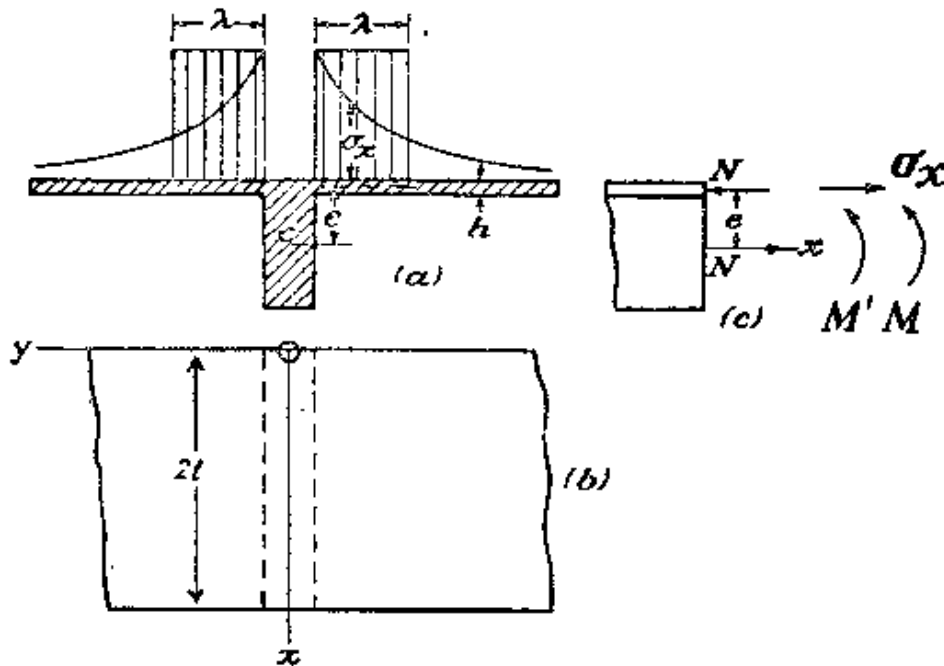


圖 135

撓矩不能充分發生效能，梁實際較初等理論所預料者為弱。計算此種梁應力時通常習慣用減低之寬度代替實際寬度，使由初等撓曲理論對改換後之斷面可提供正確之最大撓應力。減低後翼緣寬度稱為有效寬度，以下討論中將對有效寬度之決定予以理論上的根據（註1）。

為使問題儘量簡化，設一無限長梁連續支承於等距離支點上，各跨間荷力相同並均與跨中線對稱。圖 135 中一跨之支點取為坐標原點， x 軸沿梁軸。由對稱關係，僅一個跨度及半個翼緣需予考慮。翼緣寬度設為無限大，其厚度 h 則較梁深度為甚小。翼緣之平板撓曲可予忽計，並設梁撓曲時力係傳遞於翼緣之中而使翼緣中應力分布代表一二維問題。對應之應力函數，適應微分方程式

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

可取下式之對稱級數

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (b)$$

內 $f_n(y)$ 為僅含 y 之函數。代於方程式 (a) 中，得下式之 $f_n(y)$ ：

$$f_n(y) = A_n e^{-n\pi y/l} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{-n\pi y/l} + C_n e^{n\pi y/l} + D \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{n\pi y/l} \dots \quad (c)$$

為適應 y 為無限值時應力須消失之條件，吾人取 $C_n = D_n = 0$ ，如此則應力函數為

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{-n\pi y/l} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{-n\pi y/l} \right] \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (d)$$

係數 A_n 及 B_n 將由應變能為最小之條件求得。此應變能含翼緣及腹板兩部分。代

(註1) 此問題為 T. V. Kármán 所研究；見 “Festschrift August Föppl”, p. 114, 1923. 另閱 G. Schnadel, *Werft und Reederei*, vol. 9, p. 92, 1928; E. Reissner, *Der Stahlbau*, 1934, p. 206; E. Chawalla; *Der Stahlbau*, 1936; L. Beschkin, *Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, vol. 5, p. 65, 1938. 其他參考資料見 Thein Wah (ed.), “A Guide for the Analysis of Ship Structures,” pp. 370–391, Office of Technical Services, U. S. Department of Commerce, Washington D. C., 1960.

應力

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

於應變能算式

$$V_1 = 2 \frac{h}{2E} \int_0^\infty \int_0^{2l} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2) dx dy$$

並用 (d) 式之應力函數，翼緣部分應變能為 (註)

$$V_1 = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \pi^3}{l^2} \left(\frac{B_n^2}{E} + \frac{A_n B_n}{2G} + \frac{A_n^2}{2G} \right) \quad (e)$$

考慮腹板上應變能時，設 A 為斷面面積， I 為對經形心橫軸之慣性撓矩， e 為自腹板形心至翼緣中面距離 (圖 135)。由腹板及翼緣傳遞於任何斷面之撓矩在此對稱例中可以下列級數代表之

$$M = M_0 + M_1 \cos \frac{\pi x}{l} + M_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (f)$$

級數中 M_0 為一靜不定值，視各支點上撓矩而定，其他係數 M_1, M_2, \dots 由荷力情況計算。設 N 代表翼緣上壓力 (圖 135c)，撓矩 M 可分為兩部：腹板上之 M' 及 $M'' = Ne$ ，由翼緣及腹板縱向力所造成。因此，由靜力方程式得

$$N + 2h \int_0^\infty \sigma_x dy = 0$$

$$M' - 2he \int_0^\infty \sigma_x dy = M \quad (g)$$

內 $-2he \int_0^\infty \sigma_x dy = M''$ 為翼緣部分所取撓矩。腹板之應變能為

$$V_2 = \int_0^{2l} \frac{N^2 dx}{2AE} + \int_0^{2l} \frac{M'^2 dx}{2EI} \quad (h)$$

對 (g) 之第一式得

$$N = -2h \int_0^\infty \sigma_x dy = -2h \int_0^\infty \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = 2h \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0}^{y=\infty}$$

由 (d) 式之應力函數得

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=\infty} = 0, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

(註) 此積分計算見 Kármán 論文。

故知

$$N = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$M' = M + 2he \int_0^{\infty} \sigma_x dy = M + Ne = M + 2he \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

另用符號

$$2h \frac{n\pi}{l} A_n = X_n$$

吾人可寫

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (\text{k})$$

$$M' = M + e \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{l} = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

代於 (h) 並用已知積分

$$\int_0^{2l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l, \quad \int_0^{2l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \quad m \neq n$$

$$V_2 = \frac{l}{2AE} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{M_0^2 l}{EI} + \frac{l}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2$$

與 (e) 式之翼緣應變能相加，並引用下列符號

$$2h \frac{n\pi}{l} A_n = X_n \quad 2h \frac{n\pi}{l} B_n = Y_n$$

得總應變能算式為：

$$V = \frac{\pi}{2hE} \sum_{n=1}^{\infty} n(Y_n^2 + (1+\nu)X_n Y_n + (1+\nu)X_n^2) + \frac{l}{2AE} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2$$

$$+ \frac{M_0^2 l}{EI} + \frac{l}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2 \quad (1)$$

式內 M_0 , X_n , Y_n 各量應由最小應變能 (1) 之條件決定。因 M_0 僅出現於 $M_0^2 l / EI$ 項中，故 (1) 式最小條件之一為 $M_0 = 0$ 。

由另一條件

$$\frac{\partial V}{\partial Y_n} = 0$$

得知

$$2Y_n + (1 + \nu)X_n = 0$$

$$Y_n = -\frac{1 + \nu}{2}X_n$$

代此結果及 $M_0 = 0$ 於 (1) 式，得下列之應變能算式：

$$V = \frac{\pi}{2hE} \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n X_n^2 + \frac{l}{2AE} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{l}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n - eX_n)^2 \quad (\text{m})$$

由 X_n 須使 V 為最小之條件

$$\frac{\partial V}{\partial X_n} = 0$$

得

$$X_n = \frac{M_n}{e} \frac{1}{1 + (I/Ae^2) + (n\pi I/hle^2) \{(3 + 2\nu - \nu^2)/4\}} \quad (\text{n})$$

設取撓矩為餘弦式， $M = M_1 \cos(\pi x/l)$ ，由 (n) 式得

$$X_1 = \frac{M_1}{e} \frac{1}{1 + (I/Ae^2) + (\pi I/he^2l) \{(3 + 2\nu - \nu^2)/4\}}$$

由 (k) 式知翼緣上 N 之撓矩為

$$M'' = eN = eX_1 \cos \frac{\pi x}{l} = \frac{M}{1 + (I/Ae^2) + (\pi I/he^2l) \{(3 + 2\nu - \nu^2)/4\}} \quad (\text{p})$$

沿翼緣寬度上應力 σ_x 之分布現可自 (d) 式除 A_1 及 B_1 外取所有 A_n 及 B_n 為零計算之，用以下符號

$$A_1 = \frac{lX_1}{2\pi h} \quad B_1 = -\frac{1 + \nu}{2}A_1 = -\frac{(1 + \nu)lX_1}{4\pi h}$$

應力 σ_x 之分布亦於圖 135a。距腹板漸遠時應力 σ_x 漸低。

現決定一 T 形斷面梁翼緣之寬度 2λ (圖 135a)，使翼緣上均勻分布應力，如陰影部分所示，提供 (p) 式所得之撓矩 M'' 。此將為翼緣之有效寬度。

用 M' 及 M'' 代表撓矩之腹板與翼緣所負荷部分， σ_c 為腹板形心處應力， σ_e 為翼緣中面上應力，由撓曲初等理論得

$$\sigma_e = \sigma_c - \frac{M'e}{I} \quad (\text{q})$$

由靜力方程式，知

$$\begin{aligned} 2\lambda h\sigma_e + \sigma_c A &= 0 \\ -2\lambda h\sigma_e e &= M'' \end{aligned} \quad (r)$$

兩部分撓矩之算式，由 (q) 及 (r)，為

$$\begin{aligned} M' &= -\frac{I}{e}(\sigma_e - \sigma_c) = -\frac{I}{e}\left(1 + \frac{2\lambda h}{A}\right)\sigma_e \\ M'' &= -2\lambda h e \sigma_e \end{aligned}$$

M'' 對總撓矩之比為

$$\frac{M''}{M' + M''} = \frac{2\lambda h e \sigma_e}{2\lambda h e \sigma_e + (I/e)\left(1 + \frac{2\lambda h}{A}\right)\sigma_e} = \frac{1}{1 + (I/Ae^2) + (I/2\lambda h e^2)} \quad (s)$$

為使此比例與 M''/M 相等 (式 (p))，須取

$$\frac{I}{2\lambda h e^2} = \frac{\pi I}{h e^2 l} \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}$$

由此得有效寬度之算式為：

$$2\lambda = \frac{4l}{\pi(3 + 2\nu - \nu^2)}$$

例如，取 $\mu = 0.3$ ，得

$$2\lambda = 0.181(2l)$$

此即對所設之撓矩翼緣有效寬度約為跨度百分之18。

在連續梁受集中荷力於各跨中點上例中，撓矩圖將如圖 136 所示。用傅立葉

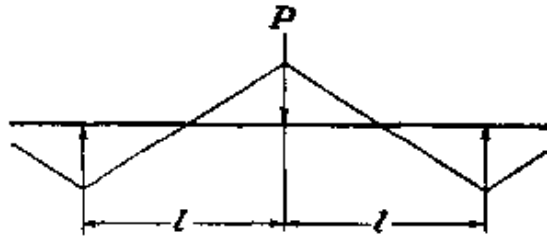


圖 136

級數代表撓矩並以上述方式分析，得支點上之有效寬度為

$$2\lambda = 0.85 \frac{4l}{\pi(3 + 2\nu - \nu^2)}$$

此值略小於餘弦函數式撓矩所得者。

與第94節所討論相同性質問題之一出現於薄壁加勁結構中。設一箱形梁，圖 137。由兩槽 $ABFE$ 及 $DCGH$ 沿邊沿銲接或鉚接於薄板 $ABCD$ 或 $EFGH$ 作成。如整個梁左端固定，另一端荷兩 P 如懸臂梁，初等撓曲理論將予薄片 $ABCD$ 以拉應力均勻分布於任何與平行 BC 斷面上。事實上，薄片由凹槽傳遞於其邊緣之剪應力獲其拉應力，如圖 137 所示，沿其寬度拉應力分布並非均勻，而係兩邊較中

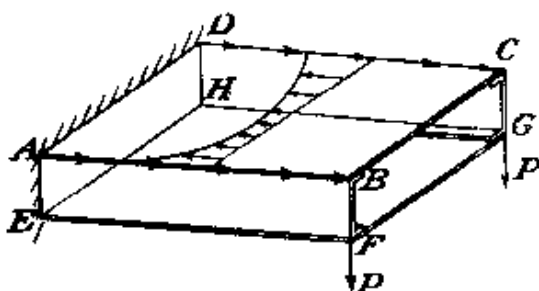


圖 137

間為高。此項對初等理論差距稱為剪落後 (shear lag)。此問題曾由應變能及他種方法分析，以簡化之假設為助 (註)。

習 題

1. 為何原因吾人應想像任何通常金屬同溫楊氏模數較其絕熱模數為小？
2. 求平面應變 ($\epsilon_z = 0$) 時以 σ_x , σ_y , σ_{xy} 所表達之柱體或稜體單位厚度應變能。
3. 用極坐標及極坐標應力分量寫出平面應力情況下應變能之積分 (與第93節 (b) 式比較)。

(79) 式之應力分量解圖 138 所示問題，力偶 M 由均勻分布於環內面剪力所造成，環外面有一均衡力偶。求環內之應變能，使此與加載時所作功，求環內面固定時外圓之轉動量。

(註) E. Reissner, *Quart. Appl. Math.*, vol. 4, p. 268, 1946; J. Hadji-Argyris *Brit. Aeron. Res. Council Repts. Mem.* 2038, 1944; J. Hadji-Argyris and H. L. Cox, *Brit. Aeron. Res. Council Rept. Mem.* 1969, 1944. 早期參考資料均見此論文中。

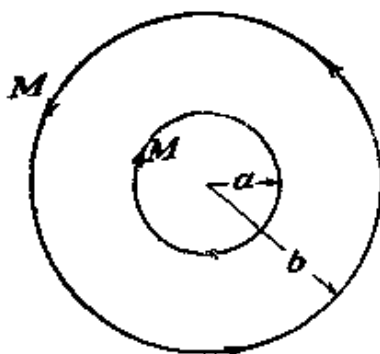


圖 138

4. 計算單位長圓柱 $a < r < b$ 受內壓力 p 時應變能。柱之兩端自由 ($\sigma_z = 0$)。
5. 解釋以下方程式

$$\iint V_0 dx dy = \frac{1}{2} \iint (Xu + Yv) dx dy + \frac{1}{2} \int (\bar{X}u + \bar{Y}v) ds$$

並對右方因子 $1/2$ 說明。

6. 由 (131) 式證平面應力情況，及一對應平面應變 ($\epsilon_z = 0$) 應力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 相同時，平面應力中具較大 (單位厚度) 之應變能。
7. 圖 139 中 (a) 代表受壓板條，應力延伸於整個內部。在 (b) 中其上下兩邊限於固定板間。應力是否延伸於整體抑僅為兩端局部性者？在 (c) 中上邊自由，如 (a)，但底邊固定如 (b)，應力是否為局部者？
8. 由穩定系統較其鄰近方位具較低位能原理，不用計算說明圖 131 板中應變能經一細割時必降低或保持為常數。
9. 敘述克氏定理 (142) 式使適用於極坐標，邊界力 \bar{X} 及 \bar{Y} 由徑向及切向 \bar{R} 及 \bar{T} 代表，位移分量用第四章之極坐標分量 u 及 v 。
10. “如 $\delta\bar{V}, \delta\bar{X}, \delta\bar{Y}$ 為適應平衡條件應力分量微小變更所造成，則不論此種變更是否合於配合條件 (16)，(142) 式有效。應力之變更即由變更邊界力 $\delta\bar{X}, \delta\bar{Y}$ 所實際造成者。” 以上敘述是否正確？

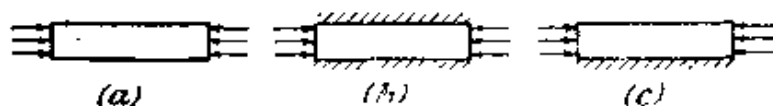


圖 139

11. 第90節 (g) 式為適應虎克定律材料所適應。如材料不遵虎克定律但具有

以應變分量為函數之應變能函數 V_0 。證 (非線性) 應力-應變關係仍為以下形式

$$\sigma_x = \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \epsilon_x} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \gamma_{xy}}$$

(考慮一個應變分量之增量，其他固定)

第九十六節 解之唯一性

現考慮對應於已知面積及體積力所用方程式是否可有多於一種之解。

設 $\sigma_x', \dots, \tau_{xy}', \dots$ 代表對荷力 \bar{X}, \dots, X, \dots 之解，另設 $\sigma_x'', \dots, \tau_{xy}'', \dots$ 代表相同荷力另一解。如此則對第一解吾人所有之方程式為

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial z} + X = 0$$

.....

$$\bar{X} = \sigma_x' l + \tau_{xy}' m + \tau_{xz}' n$$

.....

及各配合條件。

對第二解為

$$\frac{\partial \sigma_x''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}''}{\partial z} + X = 0$$

.....

$$\bar{X} = \sigma_x'' l + \tau_{xy}'' m + \tau_{xz}'' n$$

.....

及各配合條件。

相減後知應力差 $\sigma_x' - \sigma_x'', \dots, \tau_{xy}' - \tau_{xy}'', \dots$ 適應方程式

$$\frac{\partial (\sigma_x' - \sigma_x'')}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{xy}' - \tau_{xy}'')}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{xz}' - \tau_{xz}'')}{\partial z} = 0$$

.....

$$0 = (\sigma_x' - \sigma_x'')l + (\tau_{xy}' - \tau_{xy}'')m + (\tau_{xz}' - \tau_{xz}'')n$$

.....

式中所有外力均消失。配合條件(125)亦將由對應之應變差 $\epsilon_x' - \epsilon_x''$,
 \dots , $\gamma_{xy}' - \gamma_{xy}''$ 予以適應。

故此種應力分布為對應於表面與體積力為零者。加載時此等力所作之功為零，因此 $\iiint V_0 dx dy dz$ 消失。但如 (132) 式所示，對所有應變情況 V_0 均為正，故僅當每點上 V_0 均為零時積分始可消失。此需每一應變分量 $\epsilon_x' - \epsilon_x''$, \dots , $\gamma_{xy}' - \gamma_{xy}''$, \dots , 應為零。此兩種應變情況 ϵ_x' , \dots , γ_{xy}' , \dots , 及 ϵ_x'' , \dots , γ_{xy}'' , \dots , 與其對應之兩種應力情況 σ_x' , \dots , τ_{xy}' , \dots , 及 σ_x'' , \dots , τ_{xy}'' , \dots , 必各完全相同。此即，各方程式對已知荷力僅能提供一個解 (註1)。

解之唯一性證明係根據應變能，及應力，當外力為零時亦自物體中消失。但外力不存在時亦可有起始應力存在之事例，前於43節所討論之環即為此種問題。如環兩鄰近斷面中間部分經割離，然後用銲接或其他方法使端復合，即得一具起始應力之環 (註2)。前在二維問題中曾討論若干此類問題。

簡單連結物體中，由製造程序中所發生某些非彈性變形亦可導致

(註1) 此定理係 G. Kirchhoff 所創，見其所著 "Vorlesungen über Mathematische Physik, Mechanik."

(註2) 環代表多重連結物體之最簡單者。此類物體中，一般彈性方程式，以應力分量表達者，不足以決定應力。為求完全解，必需論及位移。此問題最初研究者為 J. H. Michell, 見 *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, p. 103, 1899. 另閱 L. N. G. Filon, *Brit. Assoc. Advanc. Sci. Rept.*, 1921, p. 305, 及 V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, *Ann. École Norm.*, Paris, ser. 3, vol. 24, pp. 401-517, 1907. 其他起始應力參考資料見 P. Neményi 論文, *Z. Angew. Math. Mech.* vol. 11, p. 59, 1931.

起始應力。例如，大鍛件中由不均勻冷卻可導致相當起始應力；金屬軋桿由冷作所生塑性流亦如此。決定起始應力時，彈性方程式不足應用，另須對物體製造過程有所了解。

應注意者在所有情況中凡重疊原理可採用時，外力所造成變形及應力與起始應力無關，其計算與起始應力不存在時完全相同。故總應力可重疊由外力所生產力於起始應力上求得。當重疊原理不能使用時，起始應力未知時不能決定外力所生之應力。例如，吾人無法計算細桿由側向荷力所造成之撓曲應力，如此桿具未知之軸向拉或壓力。

第九十七節 倒轉定理

取一彈性體受已知表面力 \bar{X}' , \bar{Y}' , \bar{Z}' 及體積力 X' , Y' , Z' 作用並設位移、應變、及應力均為已知。用 u' , ϵ_x' , γ_{xy}' , σ_x' , τ_{xz}' 等代表此等值。設另一組外力 \bar{X}'' , ..., X'' , ..., 造成 u'' , ϵ_x'' , γ_{xy}'' , σ_x'' , τ_{xy}'' 。

故現有二個不同問題及兩個不同答案。兩問題間相關者為皆係針對同一個物體。吾人現建立此相關關係之一——倒轉定理 (註1)。設兩解之一為

$${}''T = \int (\bar{X}'u'' + \bar{Y}'v'' + \bar{Z}'w'')dS + \int (X'u'' + Y'v'' + Z'w'')d\tau \quad (a)$$

互換單分號及雙分號可得另一式

$${}'T = \int (\bar{X}''u' + \dots + \dots)dS + \int (X''u' + \dots + \dots)d\tau \quad (b)$$

此定理指

(註1) 見 E. Betti, *Il nuovo Cimento*, ser. 2, vols. 7&8, 1872. 其他科目中亦有類似定理——參考 Rayleigh, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 4, 1873, 及所著 "Theory of Sound", Dover Publications, New York; 及 H. Lamb, "Higher Mechanics", Cambridge University Press, Inc., New York, 1929.

$$'T'' = ''T' \quad (c)$$

吾人仍用發散定理予以證明，取 (a) 式代表項

$$\int \bar{X}' u'' dS \quad (d)$$

此亦可寫爲

$$\int (\bar{l}\sigma_x' + m\tau_{xy}' + n\tau_{xz}') u'' dS \quad (e)$$

用以下各式於 (138) 內

$$U = u'' \sigma_x' \quad V = u'' \tau_{xy}' \quad W = u'' \tau_{xz}' \quad (f)$$

使其右方與表面積分 (e) 相同。

現以類比於第 (93) 節 (f) 及 (g) 之步驟，用下式之三平衡方程式

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial z} + X' = 0 \quad (g)$$

相當於第93節 (k) 式，得

$$\begin{aligned} & \int (\epsilon_x'' \sigma_x' + \dots + \dots + \gamma_{xy}'' \tau_{xy}' + \dots + \dots) d\tau \\ & = \int (\bar{X}' u'' + \bar{Y}' v'' + \bar{Z}' w'') dS + (X' u'' + Y' v'' + Z' w'') d\tau \end{aligned} \quad (h)$$

此示 (a) 可轉換爲

$$'T'' = \int (\epsilon_x'' \sigma_x' + \dots + \dots + \gamma_{xy}'' \tau_{xy}' + \dots + \dots) d\tau \quad (i)$$

吾人可將 (i) 式全用應力或全用應變表示之。選用後者及 (11) 與 (6) 式之虎克定律。如此則 (i) 式內被積分函數可寫爲

$$\begin{aligned} & \epsilon_x'' \sigma_x' + \dots + \dots + \gamma_{xy}'' \tau_{xy}' + \dots + \dots \\ & = \lambda \epsilon' \epsilon'' + 2G(\epsilon_x' \epsilon_x'' + \epsilon_y' \epsilon_y'' + \epsilon_z' \epsilon_z'') \\ & \quad + G(\gamma_{xy}' \gamma_{xy}'' + \gamma_{yz}' \gamma_{yz}'' + \gamma_{zx}' \gamma_{zx}'') \end{aligned} \quad (j)$$

式內

$$\epsilon' = \epsilon_x' + \epsilon_y' + \epsilon_z', \quad \epsilon'' = \epsilon_x'' + \epsilon_y'' + \epsilon_z''$$

顯然(j)式內單分號與雙分號互換時將不影響其結果。但此項互換，對(i)式言，即為表達'' T ''所需者。因此定理(c)成立。

(a)式右方為第一種狀態(單分號)各力對第二狀態(雙分號)位移所作之功。(b)式為第二狀態各力對第一狀態位移之功，而此兩功相等。

此定理可立即引申於動力學問題，視慣性力為體力。

在靜力問題中此定理具重要實用。茲舉兩例題。應用於熱應力問題將於第13章討論。

先取受兩等值反向力 P (註1)所壓之均勻桿，如圖140a所示。求桿中所造成應力為一繁複問題；但現設求桿之總拉長 δ 而非其應力。用上述原理此問題可立予解決。設另取圖140b所示受軸向拉力之

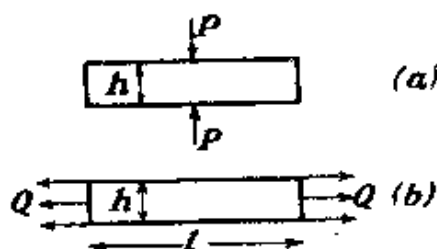


圖 140

桿。第二種情形下桿之側向縮短為 $\delta_1 = \nu(Qh/AE)$ ， A 為桿斷面。如此由倒轉定理知

$$P\nu \frac{Qh}{AE} = Q\delta$$

故圖140a中桿之拉長為

$$\delta = \frac{\nu Ph}{AE}$$

並與斷面形式無關。

第二例為計管圖141a中彈性體受兩等值反向力 P 作用時體積之縮

(註1) 為避免異點吾人可設力係分布於一小面積上。

減。第二狀態為同物體受均勻分布壓力 p 。此後一狀態中物體各向壓縮均為 $(1-2\nu)p/E$ [見 (8) 式]，而 A 及 B 兩點間距離將減低

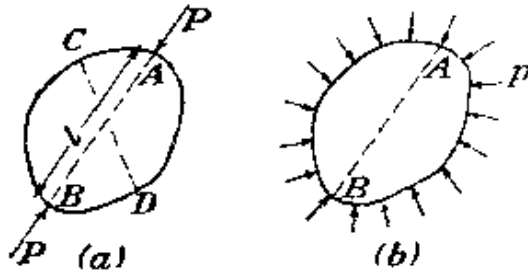


圖 141

$(1-2\nu)pl/E$ 。倒轉定理施於圖141兩種狀態 (註1) 為

$$P \frac{(1-2\nu)pl}{E} = \Delta p$$

因此物體之體積縮減為

$$\Delta = \frac{Pl(1-2\nu)}{E}$$

第九十八節 平面應力解之近似性

前於第16節中指明在所設條件下 ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 與 z 無關) 所得足夠解平面應力問題各方程式並不保證適應所有配合條件。此等假設指明 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}$ 均與 z 無關, γ_{xz}, γ_{yz} 為零。配合條件 (125) 中第一個包括於平面應力理論內, 如 (21) 式。其他五個條件驗證後知僅當 ϵ_z 為 x 及 y 之線性函數時始能適應, 但此為第三至第六章中所討論各平面應力問題之例外情況, 並非一般法則。顯然此等解不能為完全正確, 但吾人現將證示對平板問題其極佳之近似性。

設求三維問題之正確解, 其中 (註2)

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

並取體積力為零。此等解須適應平衡方程式 (123) 及配合條件 (126)。

(註1) 其他此類問題見 Love, *op. cit.* pp. 174-176.

(註2) A. Clebsch, "Elasticität," art. 39. 另 Love, *op. cit.*, p. 206.

因 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 爲零, (126) 式中第三、第四、及第五式爲

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0$$

此即示 $\partial \theta / \partial z$ 爲一常數。由 k 代表此值, 對 z 積分後得

$$\theta = kz + \theta_0 \quad (\text{a})$$

θ_0 爲 x 及 y 之任意函數。

(123) 中第三式可完全適應, 前兩個化爲二維式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (\text{b})$$

此可由取

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

予以適應。但現 ϕ 爲 $x, y,$ 及 z 之函數。

回至 (126) 式, 將左方三式相加, 用 $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, 得

$$\nabla^2 \theta = 0 \quad (\text{c})$$

由 (a) 式知

$$\nabla_1^2 \theta_0 = 0 \quad (\text{d})$$

內

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

另因 σ_z 爲零, σ_x 及 σ_y (b) 內前兩式, (126) 第一式變爲

$$\nabla_1^2 \phi = kz + \theta_0 \quad (\text{e})$$

θ_0 爲 x 及 y 之函數適應 (d) 式, 由 (a) 及 (b) 第一式, (126) 第一式變爲

$$(1+\nu) \nabla^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{f})$$

但

$$\nabla^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\nabla_1^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\theta_0 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)$$

內最後一步用 (e) 式。另由 (d) 式關係, 可用 $-\partial^2 \theta_0 / \partial y^2$ 代替 $\partial^2 \theta_0 / \partial x^2$ 。如此

則 (f) 變爲,

$$(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\theta_0+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}=0$$

或
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\nu}{1+\nu}\theta_0\right)=0 \quad (g)$$

此式可替代 (126) 第一式。同理第二及最後一式可用

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\nu}{1+\nu}\theta_0\right)=0 \quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\nu}{1+\nu}\theta_0\right)=0$$

替代。連同 (g) 式，證示所有括弧內函數對 x 及 y 二次導數為零。此函數對 x 及 y 必為線性，故可寫為

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\nu}{1+\nu}\theta_0=a+bx+cy \quad (h)$$

內 a ， b ，及 c 為 z 之任意函數，對 z 積分兩次，得

$$\phi=-\frac{1}{2}\frac{\nu}{1+\nu}\theta_0z^2+A+Bx+Cy+\phi_1z+\phi_0 \quad (i)$$

內 A ， B ， C ，為對 a ， b ， c 重積分後 z 之函數， ϕ 及 ϕ_1 為 x 及 y 之任意函數。如由 (i) 用公式 (b) 計算 σ_x ， σ_y ， τ_{xy} ，則

$$A+Bx+Cy$$

項並無分別。因此吾人可取 A ， B ，及 C 為零，亦即 (h) 式內取 a ， b ，及 c 為零。

如吾人將問題限於對中面 $z=0$ 對稱者， ϕ_1z 項亦為零，(a) 式內 k 亦必如此。如此則 (i) 式化為

$$\phi=\phi_0-\frac{1}{2}\frac{\nu}{1+\nu}\theta_0z^2 \quad (j)$$

但 ϕ 及 θ_0 之關係為 (e) 式內 k 現可取為零。因此代 (j) 於 (e) 並用 (d)，得

$$\nabla_1^2\phi_0=\theta_0 \quad (k)$$

再由 (d) 式知

$$\nabla_1^4\phi_0=0 \quad (l)$$

其他配合方程式 (126) 由 (a) 及 σ_z ， τ_{xz} ， τ_{yz} 為零原因均適應。

吾人現可選擇 x 及 y 之函數 ϕ_0 適應 (l)，由 (k) 及 (j) 式選擇 θ_0 及 ϕ 。

以求應力分布。各應力分布即由 (b) 式算出。每一應力分量將含兩部分，第一部分導自 (j) 式之 ϕ_0 ，另一部分為由 $-(1/2)(\nu/\nu')\theta_0 z^2$ 項所得者。由 (1) 式知第一部分與第三章至第六章所求平面應力分量完全相同。第二部分，與 z^2 成比例，如平板厚度甚小時，與第一部分值比較將為可忽略者。因此，雖第三章至第六章所得各解雖不能儘合於配合條件，但在薄板問題中仍不失為甚佳之近似解。

正確解，由應力函數 (j) 式代表，將需邊界上及他處應力沿厚度為拋物線式變化，但對此種分布之任何變更，只須沿邊界曲線單位長荷力密度無更改，將僅影響邊緣附近之應力，此可由聖維南原理推知。上述解法將得實際應力值，除接近邊緣處外分量 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 值均甚小 (註 1)。

習 題

1. 試證

$$\epsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \epsilon_y = k(y^2 + z^2) \quad \gamma_{xy} = k'xyz \quad \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

內 k 及 k' 為小常數，為一不可能之應變狀態。

2. 一物體加熱至溫度 T ， T 為 x 及 y 之函數，設每一單元對熱膨脹均無拘束，應變分量將為

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha T \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

內 α 為熱膨脹係數。

證僅當 T 為 x, y, z 之線性函數時方可出現 (如 T 為非線性所造成應力及應變將於第十三章中討論)。

3. 一盤狀體如圖 141a 所示受 C 及 D 點上沿 CD 線兩 P 力壓縮，使 AB 伸長，然後由沿 AB (圖 141a) 兩力 P 壓縮使 CD 伸長。證兩伸長相等。

4. 第 88 節內所示通解內如何選擇 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ 使此解用於平面應變 ($w=0$)?

5. 取第 85 節 (f) 式與第 (16) 節 (25) 式相較。證前者可化為後者，如設平面應力 $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, z=0$ 。

(註 1) 因此，厚度上平均值，即“廣義平面應力”之根據，並無利益。除邊緣附近外應為簡單拋物線式變化，邊緣附近對 z 之變化不同但視邊界荷力與 z 關係而定。

第九章 三維初等彈性問題

第九十九節 均勻應力

討論平衡方程式 (123) 及邊界條件 (124) 時，曾說明一問題之正確解不僅須適應 (123) 及 (124)，各方程式亦須適應配合條件 (閱第85節)。如無體力作用，或體力為常數時，此等條件僅含應力分量之二次導數。因此，如 (123) 及 (124) 可取應力分量為常數或坐標之線性函數予以適應時，配合條件將恆被適應，而此等應力即為問題之正確解。

舉極簡單一例，吾人取一桿受軸向拉力，設忽計體力，平衡方程式可取

$$\sigma_x = \text{常數} \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (\text{a})$$

予以適應。

顯然邊界條件 (124) 對桿之側面言，因無外力作用，可被適應，因所有應力分量，除 σ_x 外，均為零。在兩端面上，邊界條件簡化為

$$\sigma_x = \bar{X} \quad (\text{b})$$

亦即，如一桿兩端面上為均勻分布之拉應力，在各斷面上亦有均勻分布之拉應力，此例中解 (a) 適應 (123) 及 (124) 各方程式，並為問題之正確解因配合條件 (126) 恆被適應。

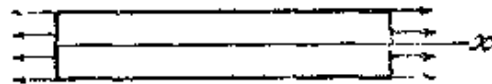


圖 142

如兩端拉應力非均勻分布，(a) 解不再正確，因其不能適應邊界條件。因在斷面上應力不再均勻分布，正確解變為較繁複者。此等非均勻分布例見前對二維問題討論 (閱第57及第267頁)。

第二例取無體力之靜水壓力系統。平衡方程式可取

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

予以適應。應力橢圓體在此例為一球面。任何三垂直方向均可視為主向，任一平面上應力為一法向壓應力等於 p 。如壓力 p 係均勻分布於物體表面，則表面條件 (124) 顯然亦被適應。

第一〇〇節 稜體桿因自身重量之拉長

如 ρg 為桿每單位體積重量 (圖 143)，體力為

$$X = Y = 0 \quad Z = -\rho g \quad (a)$$

平衡微分方程式 (123) 可取

$$\sigma_z = \rho g z \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \quad (b)$$

予以適應，亦即設每一斷面上有由底部桿重量所致之均勻拉應力。

在側面上，因無外力作用，邊界條件 (124) 顯然被適應。對桿之底面上邊界條件為零應力，對頂面邊界條件為 $\sigma_x = \rho g l$ ， l 為桿長。

配合方程式 (126) 亦可由解 (b) 適應之；因此 (b) 為一正確解，如桿頂面力為均勻分布者，此與材料力學初等書本所示者相符。

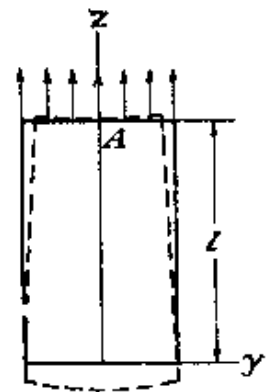


圖 143

現考慮桿之位移 (閱第86節)。由虎克定律，用方程式 (3) 及 (6)，知

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\rho g z}{E}$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

位移 u , v , w 現可對方程式 (c), (d) 及 (e) 積分求出。對 (c) 積分得

$$w = \frac{\rho g z^2}{2E} + w_0 \quad (f)$$

此處 w_0 為 x 及 y 之函數，以後決定之，將 (f) 代入 (e) 之第二及第三式，吾人得

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

由此知

$$u = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0 \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0 \quad (g)$$

內 u_0 及 v_0 為 x 及 y 之函數。代 (g) 於 (d)，得

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\nu \frac{\rho g z}{E} \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E} \quad (h)$$

因 u_0 及 v_0 與 z 無關，(e) 式僅當取

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \nu \frac{\rho g}{E} \quad (k)$$

時始可適應。代式 (g) 之 u 及 v 於 (e) 之第一式，結果為

$$-2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

但因 u_0 及 v_0 均與 z 無關，故必須為

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

由 (k) 及 (1) 各方程式，現可寫出 u_0 , v_0 , w_0 各函數之一般形式，所有各方程式顯然可由

$$\begin{aligned} u_0 &= \delta y + \delta_1 \\ &\dots \dots \dots \\ v_0 &= -\delta x + \gamma_1 \end{aligned}$$

$$w_0 = \frac{\nu\rho g}{2E}(x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma$$

予以適應，內 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta_1, \gamma_1$ 皆為任意常數。由 (f) 及 (g)，位移之一般算式為

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu\rho g xz}{E} - \alpha z + \delta y + \delta_1 \\ v &= -\frac{\nu\rho g yz}{E} - \beta z - \delta x + \gamma_1 \end{aligned} \quad (m)$$

$$w = \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu\rho g}{2E}(x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma$$

此中六個任意常數必須由支承處條件予以決定。支承必須阻礙桿之任何剛體運動。為阻止竿之平移，設固定頂面形心 A 使 $x = y = 0$ 及 $z = l$ 處 $u = v = w = 0$ 。為消去竿對經 A 點之軸作平行於 x 及 y 軸之轉動，設在 A 處固定一 z 軸之單元。如此則在 A 處 $\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = 0$ 。對 z 軸可能之轉動可由經 A 點，平行於 zx 平面固定一面積單元予以消除。如此則 A 點上 $\partial v / \partial x = 0$ 。用 (m) 各方程式，在 A 處六個條件變為

$$\begin{aligned} -\alpha l + \delta_1 &= 0 & -\beta l + \gamma_1 &= 0 & \frac{\rho g l^2}{2E} + \gamma &= 0 \\ \alpha &= 0 & \beta &= 0 & \delta &= 0 \end{aligned}$$

因此

$$\delta_1 = 0 \quad \gamma_1 = 0 \quad \gamma = -\frac{\rho g l^2}{2E}$$

而位移之最後算式為

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu\rho g xz}{E} \\ v &= -\frac{\nu\rho g yz}{E} \\ w &= \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu\rho g}{2E}(x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E} \end{aligned}$$

在 z 軸上各點僅有豎向位移

$$w = -\frac{\rho g}{2E}(l^2 - z^2)$$

桿內其他各點，因橫向收縮關係，除豎向外亦有側向位移。變形前平行於 z 軸各線變形後傾斜於此軸，竿經變形後狀如圖 143 虛線所示。垂直於 z 軸各斷面變形後變為拋物體曲面，例如，斷面 $z=c$ 上之點，變形後落於曲面

$$z = c + w = c + \frac{\rho g c^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E}(x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E}$$

此曲面垂直於桿之縱向纖維，此等纖維變形後傾斜於 z 軸，使無剪應變 γ_{xy} 或 γ_{xz} 。

第一〇一節 常斷面圓軸之扭轉

圓軸扭轉之初等理論說明斷面（圖 144）任意一點之剪應力 τ 垂

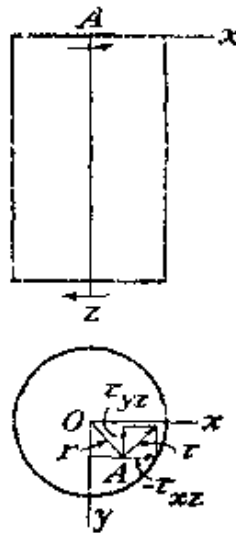


圖 144

直於半徑 r ，其值與 r 長及單位軸長之扭角 θ 成正比，即

$$\tau = G\theta r \quad (a)$$

G 為剛性模數。分解此應力為平行於 x 及 y 軸兩分量，得

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= G\theta r \frac{x}{r} = G\theta x \\ \tau_{xz} &= -G\theta r \frac{y}{r} = -G\theta y\end{aligned}\quad (b)$$

初等理論另設

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

吾人可以證明在某些條件下此初等解爲一正確解。因各應力分量全爲坐標之線性函數或零值，配合方程式 (126) 均可適應，而僅須考慮各平衡方程式 (123) 及邊界條件 (124)。將以上各剪應力分量代入 (123) 式，倘無體力作用時，此等方程式均可適應。軸之側面無外力作用，各邊界條件 (124)，因圓柱表面上 $\cos(Nz) = n = 0$ ，簡化爲

$$0 = \tau_{xz} \cos(Nx) + \tau_{yz} \cos(Ny) \quad (c)$$

對圓柱體吾人另有

$$\cos(Nx) = \frac{x}{r} \quad \cos(Ny) = \frac{y}{r} \quad (d)$$

將 (d) 及 (b) 代入 (c) 式，顯然此邊界條件係被適應。另明顯之事實爲對非圓形斷面時，因不能採用 (d) 式，應力分量 (b) 不再適應邊界條件 (c)，故 (a) 解亦不能用。此等較繁雜之扭轉問題將予以後討論 (閱第十章)。

現檢討軸兩端面上之邊界條件，吾人知外面上剪力之分布必須與應力 τ_{xz} 及 τ_{yz} 在任何中間斷面上情況完全相同方可，僅當如此時方程式 (b) 所表示之應力分布方爲問題之精確解。但在實際應用上則不必如此限制，依聖維南原理可以推論對一長桿扭轉，對距兩端遠處斷面上，應力僅轉矩 M 而定，實際與各方如何分配於兩端面上無甚關係。

此例中位移可用類如前節所用方法求得。設在 A 點處拘束條件與前問題相同，可得

$$u = -\theta yz \quad v = \theta xz \quad w = 0$$

此表示各斷面皆保持為平面及各半徑保持為直線之假設，亦即在通常初等扭轉理論中所用者，係正確。

第一〇二節 稜體桿之純撓曲

取一稜體桿受兩等值反向力偶 M 作用撓曲於其主面之一如圖 145 所示。設坐標原點在斷面形心及 xz 面為撓曲主面，通常初等撓曲理論所提各應力分量為

$$\sigma_z = \frac{Ex}{R} \quad \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{yz} = 0 \quad (a)$$

內 R 為撓曲後桿之曲率半徑。代 (a) 式各應力分量於平衡方程式 (123) 中，知如無體力存在時此等方程式均可適應。在兩端上邊界條件需要表面力必須在端面上以應力 σ_x 之方法分布，僅當適合此條件時應力 (a) 始為問題之正確解。撓矩 M 可由方程式

$$M = \int \sigma_z x dA = \int \frac{Ex^2 dA}{R} = \frac{EI_y}{R}$$

求得，內 I_y 為梁斷面，對平行於 y 軸中和線之慣性矩。

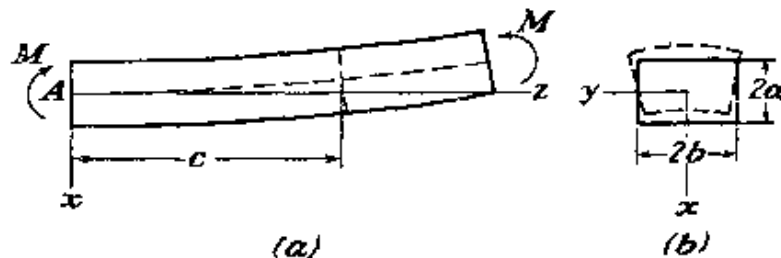


圖 145

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_y}$$

為初等撓曲理論所熟知之公式。

現考慮純撓曲所產生之位移。用虎克定律及方程式 (2)，由解 (a) 知：

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{R} \quad (b)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{x}{R} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{x}{R} \quad (c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (d)$$

用此等微分方程式，並顧及桿之支承條件，位移可以第 100 節之方式求得。

由 (b) 式，可得

$$w = \frac{xz}{R} + w_0$$

內 w_0 為 x 及 y 之函數。方程式 (d) 之第二及第三式提供

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

由此得

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{\nu x}{R} \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\nu x}{R} \quad (e)$$

式內 u_0 及 v_0 為 x 及 y 之未知函數，其值以後決定。代 (e) 式於方程式 (c)，

$$u = -\frac{z^2}{2R} \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0 \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0$$

對任何 z 值此等方程式均須適應，故

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad (f)$$

積分之，得

$$u_0 = -\frac{\nu x^2}{2R} + f_1(y) \quad v_0 = -\frac{\nu xy}{R} + f_2(x) \quad (g)$$

現將 (e) 及 (g) 代入 (d) 中第一式，結果為

$$2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} + \frac{\nu y}{R} = 0$$

注意此式僅第一項與 z 有關，故可得以下結論

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial f_1(x)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} - \frac{\nu y}{R} = 0$$

此等方程式及 (f) 需要求

$$w_0 = mx + ny + p$$

$$f_1(y) = \frac{\nu y^2}{2R} + \alpha y + \gamma$$

$$f_2(x) = -\alpha x + \beta$$

其中 $m, n, p, \alpha, \beta, \gamma$ 為常數。位移之算式現為

$$u = -\frac{z^2}{2R} - mz - \frac{\nu x^2}{2R} + \frac{\nu y^2}{2R} + \alpha y + \gamma$$

$$v = -nz - \frac{\nu xy}{R} - \alpha x + \beta$$

$$w = \frac{xz}{R} + mx + ny + p$$

各任意常數由支承條件決定之。設桿左端之形心 A ，連同 z 軸上一單元及 xz 平面上的一單元，均經固定，則對 $x=y=z=0$

$$u = v = w = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

此等條件可由取所有任意常數為零適應之。如此則

$$u = -\frac{1}{2R} [z^2 + \nu(x^2 - y^2)] \quad v = -\frac{\nu xy}{R} \quad w = \frac{xz}{R} \quad (h)$$

欲求桿軸之撓曲線，代 $x=0$ ， $y=0$ 於 (h) 式。則

$$u = -\frac{z^2}{2R} = -\frac{Mz^2}{2EI_y} \quad v = w = 0$$

此與初等撓曲理論所得者相同。

現考慮任一斷面 $z=c$ ， c 為對桿左端距離。變形後，此斷面上各點將落於平面

$$z = c + w = c + \frac{cx}{R}$$

亦即，純撓曲時斷面保持平面如初等初論所設者。為檢查斷面在其平面內之變形，取邊線 $y = \pm b$ (圖 145)。撓曲後得

$$y = \pm b + v = \pm b \left(1 - \frac{\nu x}{R}\right)$$

邊線變為傾斜如圖中虛線所示。

斷面上另兩邊 $x = \pm a$ 撓曲後之方程式為

$$x = \pm a + u = \pm a - \frac{1}{2R} [c^2 + \nu(a^2 - y^2)]$$

故係撓曲為拋物線式，當變形甚小時可由半徑為 R/ν 之圓弧線以相當精確度代表之。對桿之上下兩面言，雖沿桿長撓曲後曲率係向下凸出，橫向曲率則係向上凸出者。以逆向曲面之等高線係如圖 146a 所示。在 (h) 中第一式內取 x 及 u 為常數，此等高線方程式為

$$z^2 - \nu y^2 = \text{常數}$$

此為雙曲線組，其漸近線為

$$z^2 - \nu y^2 = 0$$

由此方程式角 α (圖 146a) 可由

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{\nu}$$

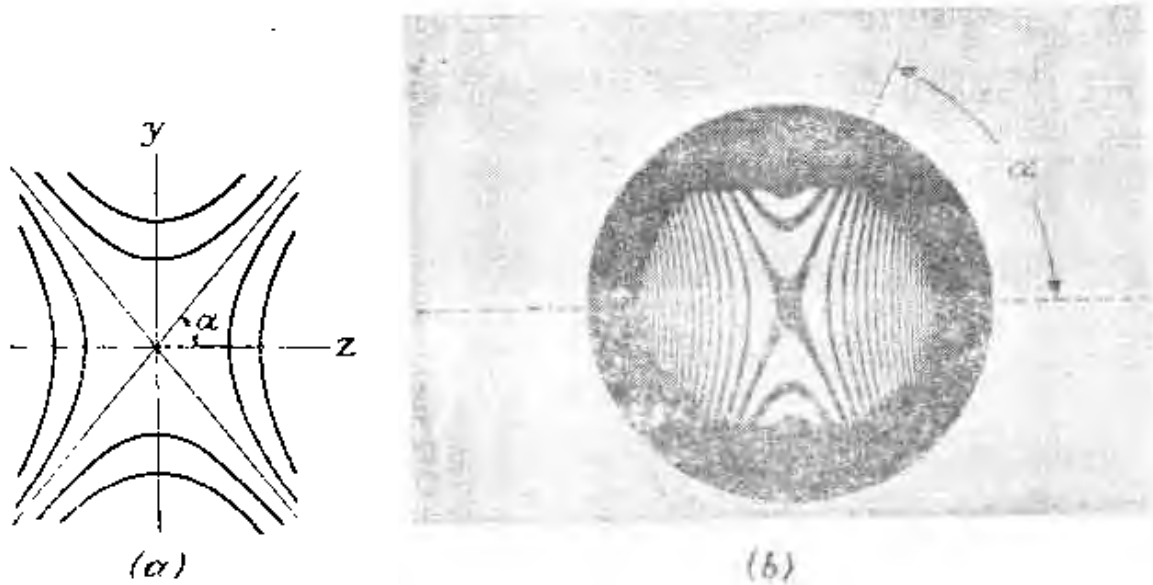


圖 146

此方程式曾用於決定柏松比 ν (註)。如梁之上部平面經磨光後覆一平板玻璃，撓曲後將在梁曲面與玻璃間出現一不同厚度之空氣空隙。此不同厚度可用光學方法量得。單色光線如黃鈉光，垂直於平板玻璃，將部分由玻璃板部分由梁面反射，此兩反射光線在空氣空隙厚度使兩光線路徑差別為一非偶數之光線半波長各點上互相干涉。圖146b，代表雙曲線式等高線，係用此法所得。

第一〇三節 板之純撓

上節之結果可用於討論均勻厚度板之撓曲。如應力 $\sigma_x = Ez/R$ 分布於平行於 y 軸邊緣之厚度上 (圖 147)，平板將撓曲為一逆向曲面

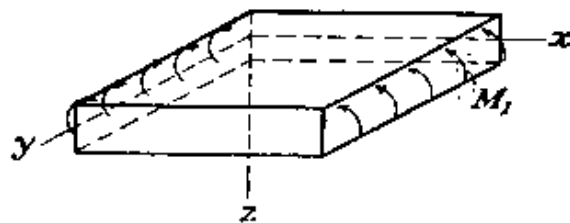


圖 147

(註) A. Cornu, *Compt. Rend.*, vol. 69, p. 333, 1869. See also R. Straubel, *Wied. Ann.*, vol. 68, p. 369, 1899.

(註) , 在 xz 面內曲率為 $1/R$ 而在其垂直方向則為 $-\nu/R$ 。用 h 代表板之厚度 , M_1 為在平行於 y 軸邊上單位長之撓矩 , 及

$$I_y = \frac{h^3}{12}$$

為單位長慣性矩 , M_1 與 R 之關係 , 由前節為

$$\frac{1}{R} = \frac{M_1}{EI_y} = \frac{12M_1}{Eh^3} \quad (\text{a})$$

當兩垂直方向均有撓曲作用時 (圖 148) , 撓曲面各曲率可由重疊求得。設 $1/R_1$ 及 $1/R_2$ 為撓曲面平行於坐標面 zx 及 zy 各面內之曲率 ; 並設 M_1 及 M_2 為在平行於 y 及 x 軸各邊上單位長之撓曲。用方程式 (a) 並採重疊原理 , 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2) \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1) \end{aligned} \quad (\text{b})$$

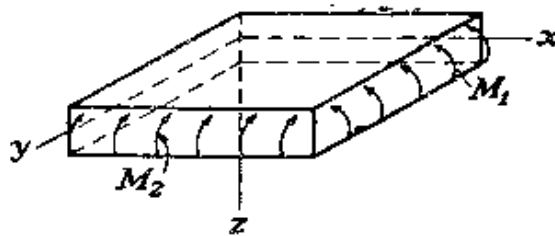


圖 148

當撓矩使板之撓度向下凸出時視為正值 , 對方程式 (b) 解 M_1 及 M_2 , 可得

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_1} + \nu \frac{1}{R_2} \right) \\ M_2 &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_2} + \nu \frac{1}{R_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{c})$$

(註) 設撓度與板厚度較為一小比率。

對小撓度可用近似式

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

並取符號

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D \quad (143)$$

則可寫撓矩為

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (144)$$

常數 D 稱為板之撓曲剛度 (flexural rigidity)。當板撓曲為母線平行於 y 軸之圓柱面時 $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ ，由方程式 (144)，得

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_2 &= -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (145)$$

對 $M_1 = M_2 = M$ 時，則

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

此時板將撓曲為球面，曲率與撓矩關係為，由 (c) 式

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \frac{1}{R} = \frac{D(1+\nu)}{R} \quad (146)$$

吾人以後將用此等結果。

公式 (144) 常用於板理論中，在通常情況下撓矩並非均勻分布，而與剪力及面上壓力同時存在，此時可由第八章一般方程式尋求，而當板厚度甚小時可用於近似計算。桿撓曲之初等理論亦可與一般方程式作類似之關聯 (註)。

(註) J. N. Goodier, *Trans. Roy. Soc. Can.*, sect. III, 3d ser., vol. 32, p. 65, 1938.

第十章 扭 轉

第一〇四節 直桿之扭轉

前曾說明（見第 101 節）如吾人設扭轉時桿斷面保持平面並對軸線爲無形變轉動時可得圓軸扭轉問題之正確解。此項理論，由庫倫（Coulomb）（註 1）氏所發展；經納威（Navier）（註 2）氏應用於非圓形桿。用以上假設彼得一錯誤結論，即對已知扭矩，桿之扭角與斷面形心極慣性矩成反比，而最大剪應力出現於距斷面形心最遠之點上（註 3），顯然以上假設與邊界條件矛盾。例如，取一矩形斷面桿（圖 149）。由納威之假設在邊上任一點 A 處剪應力須作用於半徑 OA 之方

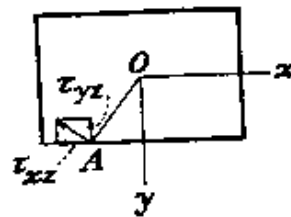


圖 149

向，分解此應力爲兩分量 τ_{xz} 及 τ_{yz} ，則顯然將有一輔應力，等於 τ_{yz} ，作用於 A 點處側面單元上（閱第 5 頁）。此與側面上桿不受外力作用之假設矛盾，因扭轉係由施於末端力偶所發生，對矩形斷面桿之簡單實驗，如圖 150 所示，證明桿之斷面扭轉時不能維持其平面，桿表面上矩形單元之形變係在邊上中點處爲最大，亦即最接近於軸線之點上。

（註 1）見 “Histoire de l'Académie,” 1784, pp. 229-269, Paris, 1787.

（註 2）見 Navier, “Résumé des Leçons sur l'Application de la Mécanique,” 3d ed., Paris, 1864, edited by Saint-Venant.

（註 3）對一薄塗層，相當於桿兩斷面間之一片附著於剛體板中，此結論爲正確者。參閱 J. N. Goodier, *J. Appl. Phys.*, vol. 13, p. 167, 1942

力偶旋於桿端扭轉問題之正確解析由聖維南氏所提供 (註) 。



圖 150

彼所用者稱為半反法 (semi-inverse method) 。此即開始時對扭轉後桿之變形先作若干假設，然後證在此等假設下可適應平衡方程式 (123) 及邊界條件 (124) 。最後自彈性方程式解之唯一性 (見第 96 節)，知最初所作假設係屬正確而所得扭轉問題解為正確解。當然末端上所施之轉矩須為一剪應力分布，與解本身所得者須完全一致。

(註) 見 “Mémoires Savants Etrangers,” vol. 14, 1855. 另閱 Saint-Venant's note to Navier's book, *loc. cit.*, 及 I. Todhunter and K. Pearson, “History of the Theory of Elasticity,” vol. 2.

取任一斷面一致之桿兩端受力偶扭轉如圖 151 所示。自對圓軸所得之解為借鏡（見第 293 頁），聖維南氏設扭轉後軸之變形含（1）軸各斷面之轉動與圓軸同及（2）各斷面之翹曲（warping）沿 z 軸一致。取坐標原點於一端斷面（圖 151），對應於斷面轉動之位移為

$$u = -\theta z y \quad v = \theta z x \quad (a)$$

θz 為對原點 z 距離處斷面之轉角。

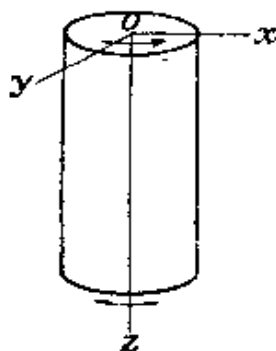


圖 151

斷面之翹曲由函數 ψ 表示之，寫為

$$w = \theta \psi(x, y) \quad (b)$$

用已設（註）之位移（a）及（b），由（2）式算得之應變分量為

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \quad (c)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)$$

對應之應力分量，由方程式（3）及（6），為

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

（註）曾經證明無其他為轉角 θ 線性之位移可能存在，如每一桿之薄片係同一情況。閱 J. N. Goodier and W. S. Shaw, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 10, pp. 35-52, 1962.

$$\tau_{xz} = G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right) \quad (d)$$

$$\tau_{yz} = G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)$$

由此可知用 (a) 及 (b) 對變形之假設，在軸纖維間及纖維縱向均無正文應力作用。因 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 均為零，故任何斷面平面內均無形變。在每一點上均為剪應力分量 τ_{xz} 及 τ_{yz} 所代表之純剪。函數 $\psi(x, y)$ 代表斷面之翹曲，其決定條件為必須適應平衡方程式 (123)。代入此等方程式並忽計體積力，知 ψ 須適應下式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \quad (147)$$

現考慮邊界條件 (124)。對桿之側面，因無外力作用而法線與 z 軸垂直，故 $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$ 及 $\cos(Nz) = n = 0$ 方程式中前兩個恆被適應，第三個為

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0 \quad (e)$$

此指在邊界上剪應力和係沿邊界切線方向者，如圖 152 所示。前已說明（見第302頁），如側面不受外力作用此條件必須適應。

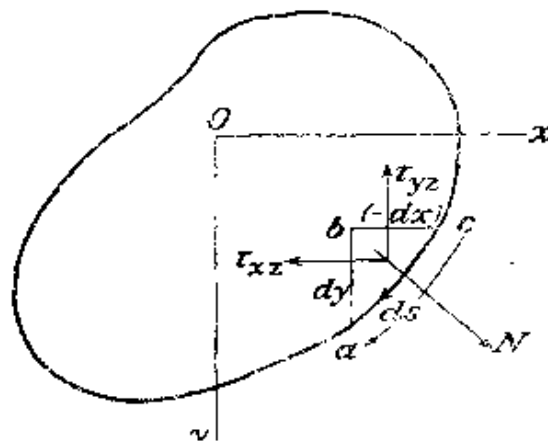


圖 152

在邊界上取極小單元 abc ，並設 s 沿 c 至 a 方向為增加者，由圖 152 知

$$l = \cos Nx = \frac{dy}{ds} \quad m = \cos Ny = -\frac{dx}{ds}$$

方程式 (e) 變為

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \frac{dx}{ds} = 0 \quad (148)$$

故每一扭轉問題均簡化為尋求適應方程式 (147) 及邊界條件 (148) 之函數 ψ 。

另一進行分式，可得一較簡單之邊界條件，其程序如下。因 σ_x ， σ_y ， σ_z ， τ_{xy} 均為零 [(d) 式]，平衡方程式 (123) 變為

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

前兩個因已被適應，因 τ_{xz} 及 τ_{yz} ，由 (d) 式知，與 z 無關。第三個可取

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (149)$$

予以適應， ϕ 為 x 與 y 之函數，為問題之應力函數 (註)。

由 (149) 及 (d) 式知

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) \quad -\frac{\partial \phi}{\partial x} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \quad (f)$$

第一式對 y 微分，後一式對 x 微分，相減後可消去 ψ ，得應力函數所須適應之微分方程式為

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = F \quad (150)$$

$$\text{內} \quad F = -2G\theta \quad (151)$$

用 (149) 式，邊界條件 (e) 變為

(註) 此係 L. Prandte 所創用，見 *Physik. Z.*, vol. 4, 1903.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (152)$$

此示沿斷面邊界應力函數 ϕ 須為一常數。對單連結面，例如，實體桿之斷面，此常數可取任意值，在以下討論中將取為零。故求某扭轉桿斷面之應力分布為尋一適當方程式 (150) 在邊界上為零之函數 ϕ 。此理論施用於特種形式之斷面將於以後數節說明之。

現考慮扭轉桿末端上之條件。末端斷面上法線係 z 向。因此 $l = m = 0$, $n = \pm 1$, 故 (124) 式變為

$$\bar{X} = \pm \tau_{xz} \quad \bar{Y} = \pm \tau_{yz} \quad (g)$$

內 $+$ 號應為外向法線沿正 z 向之末端斷面所取，如圖 (151) 中桿之下端。由此知末端面上剪應力分布與桿各中間斷面上相同。此等應力之總和將可證明為一轉矩。將 (149) 代於 (g) 式並用邊界上 ϕ 為零之條件，得

$$\begin{aligned} \iint \bar{X} dx dy - \iint \tau_{xz} dx dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy - \int x d \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dy &= 0 \\ \iint \bar{Y} dx dy &= \iint \tau_{yz} dx dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy \\ &= - \int dy \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = 0 \end{aligned}$$

故分布於桿端各力之總力為零，其總和為一力偶值為

$$M_t = \iint (\bar{Y}x - \bar{X}y) dx dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} y dx dy \quad (h)$$

用部分積分，知在邊界上 $\phi = 0$ ，得

$$M_t = 2 \iint \phi dx dy \quad (153)$$

(h) 式右方每一積分提供轉矩之半，因此知一半轉矩係由應力分量 τ_{xz} 另一半由 τ_{yz} 所造成。

由此知設位移 (a) 及 (b)，自 (145)，(150)，及 (152) 式求應力分量 τ_{xz} 及 τ_{yz} ，吾人得一應力分布適應平衡方程式 (123)，及桿側面無外力作用之條件，並在兩端上造成 (153) 式之轉矩。配合條件不需另外考慮。應力係得自位移 (a) 及 (b)。配合問題簡化為單值函數 ψ 之存在，此可由自 (f) 式內消去 ψ 所得之 (150) 式予以保證。因此所有彈性方程式均經適應故所得之解為扭轉問題之正確解。

前曾指出此解需桿兩端面上作用之力為一定方式之分布。但此解之實際應用並非僅限於此種情況。由聖維南原理知如在一長扭轉桿中，對兩端相當距離斷面上，應力僅視轉矩 M_t 而定，而實際與端面上力如何分布無甚關係。

第一〇五節 橢圓斷面

設斷面邊界方程式為 (圖153)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a)$$

則方程式 (150) 及邊界條件可取以下形式之應力函數

$$\phi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (b)$$

予以適應，式內 m 為一常數。代 (b) 於 (150) 式中，得

$$m = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} F$$

因此

$$\phi = \frac{a^2 b^2 F}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (c)$$

常數 F 值可由 (153) 求出。將 (c) 代於 (153) 中，得

$$M_t = \frac{a^2 b^2 F}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a^2} \iint x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2 dx dy - \iint dx dy \right) \quad (d)$$

因

$$\int \int x^2 dx dy = I_y = \frac{\pi b a^3}{4} \quad \int \int y^2 dx dy = I_x = \frac{\pi a b^3}{4}$$

$$\int \int dx dy = \pi ab$$

由 (d) 式得

$$M_t = -\frac{\pi a^3 b^3 F}{2(a^3 + b^3)}$$

故

$$F = -\frac{2M_t(a^3 + b^3)}{\pi a^3 b^3} \quad (e)$$

然後由 (c) 式得

$$\phi = -\frac{M_t}{\pi ab} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (f)$$

代入方程式 (149)，應力分量爲

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_t y}{\pi ab^3} \quad \tau_{yz} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b} \quad (154)$$

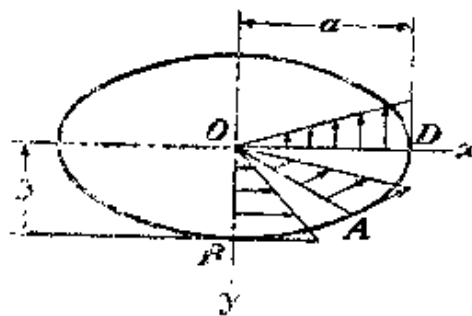


圖 153

兩應力分量比例與 y/x 成正比，故沿任一半徑如 OA 上 (圖153) 爲常數。此即沿任何半徑 OA 剪應力和有一固定方向並顯然與在邊界上 A 點切線方向相同。沿豎軸 AB 應力分量 τ_{yz} 爲零，應力和等於 τ_{xz} 。沿水平軸 OD 剪應力和等於 τ_{yz} 。最大應力顯然係在邊界上，並可簡易證

明此最大值出現於橢圓短軸之端點上。代 $y=b$ 於 (154) 式中，得此最大應力之絕對值為

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2} \quad (155)$$

如 (a) 等於 (b)，此公式與熟知之圓斷面公式相符。

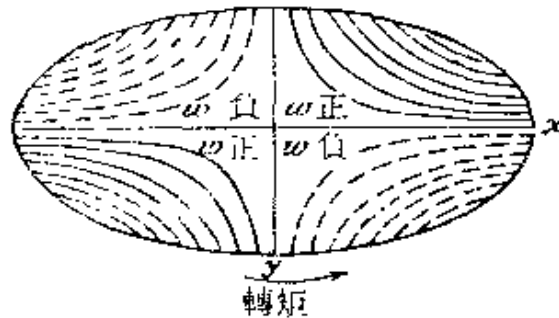


圖 154

代 (e) 於 (151) 式可得扭角算式

$$\theta = M_t \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G} \quad (156)$$

將 M_t 除以 θ 所得之因子即單位扭角所需之扭矩稱為扭轉剛度 (torsional rigidity)。用 C 代表，對橢圓斷面其值為，由 (156) 式

$$C = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2} = \frac{G}{4\pi^2} \frac{(A)^4}{I_p} \quad (157)$$

內 $A = \pi ab$ $I_p = \frac{\pi ab^3}{4} + \frac{\pi ba^3}{4}$

為斷面面積與形心慣性矩。

已知應力分量 (154) 可即求得位移。分量 u 及 v 為第 (104) 節方程式 (a) 所示者。位移 w 可由第 104 節 (d) 及 (b) 式算出。代入 (154) 及 (156) 並積分之，得

$$w = M_t \frac{(b^2 - a^2)xy}{\pi a^3 b^3 G} \quad (158)$$

此示翹曲後斷面之等高線為雙曲線，橢圓之主軸為其漸近線(圖154)。

第一〇六節 其他初等解

聖維南氏在討論扭轉問題時，曾提出方程式 (150) 許多項式解法。設將應力函數寫為下式

$$\phi = \phi_1 + \frac{F}{4}(x^2 + y^2) \quad (\text{a})$$

則由 (150) 得

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{b})$$

及沿邊界線上，由 (152)，

$$\phi_1 + \frac{F}{4}(x^2 + y^2) = \text{常數} \quad (\text{c})$$

因此扭轉問題變為解 (b) 式適應邊界條件 (c)。為求多項式解，吾人取複變數函數

$$(x + iy)^n \quad (\text{d})$$

此式之實值與虛值部分均為 (b) 式解 (閱第175頁)。例如取 $n=2$ 得解 $x^2 - y^2$ 及 $2xy$ 。當 $n=3$ 時，得解 $x^3 - 3xy^2$ 及 $3x^2y - y^3$ 。設 $n=4$ ，得四次式之齊次函數解，等等。將此等解組合可得各式之多項式解。

例如，取

$$\phi = \frac{F}{4}(x^2 + y^2) + \phi_1 = \frac{F}{2} \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) + b \right] \quad (\text{e})$$

吾人得一三次多項式 (150) 之解，其中 a 及 b 兩常數待安排。此多項式為扭轉問題之一解，如能使其適應邊界條件 (152)，亦即如斷面之邊界曲線，可由以下方程式

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) + b = 0 \quad (\text{f})$$

所代表時。將式內常數 b 調整，可得各種形式之斷面。

取 $b = -2/27a^2$ 吾人得等邊三角形之解。此時 (f) 式可寫為

$$(x - \sqrt{3}y - 2/3a)(x + \sqrt{3}y - 2/3a)(x + 1/3a) = 0$$

而此為圖155所示三角形三邊方程式之乘積。因 $F = -2G\theta$ ，將

$$\phi = -G\theta \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27}a^2 \right] \quad (g)$$

代入 (149) 式，即得應力分量 τ_{xz} 及 τ_{yz} 。

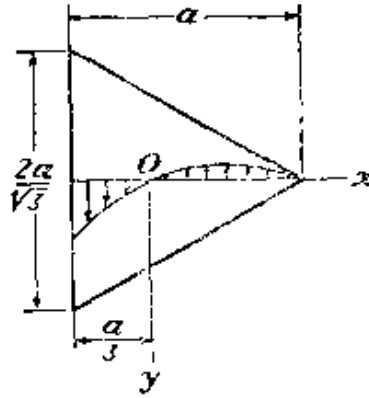


圖 155

沿 x 軸，由對稱條件， $\tau_{xz} = 0$ ，由 (g) 式得

$$\tau_{yz} = \frac{3G\theta}{2a} \left(\frac{2ax}{3} - x^2 \right) \quad (h)$$

最大應力係在三角形各邊中點處，其值為，由 (h) 式

$$\tau_{max} = \frac{G\theta a}{2} \quad (k)$$

三角形尖端處剪應力為零 (圖155)。

代 (g) 於 (153) 式中，得

$$M_t = \frac{G\theta a^4}{15\sqrt{3}} = \frac{3}{5}\theta G I_p \quad (1)$$

取方程式 (150) 之解為僅含偶數 x 及 y 之四次多項式，吾人得下式之應力函數

$$\phi = -G\theta \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{a}{2}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \frac{1}{2}(a-1) \right]$$

如斷面邊界由以下方程式所表示

$$x^2 + y^2 - a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + a - 1 = 0$$

則可適應邊界條件 (152)。調整常數 a ，聖維南一斷面組如圖 156a 所示。組合四次與八次多項式解，所得之解為圖156b所示之斷面。

根據其所作之研究，聖維南氏曾下一具實用之一般性結論。彼曾證示，對單連結斷面及已知面積斷面，如斷面之極慣性矩降低時其扭轉剛性增加。因此，對等量之材料圓形斷面扭轉剛性為最大。對最大應力亦可作類似之結論。對已知斷面面積及轉矩，極慣性矩最小之斷面其最大應力值為最小者。

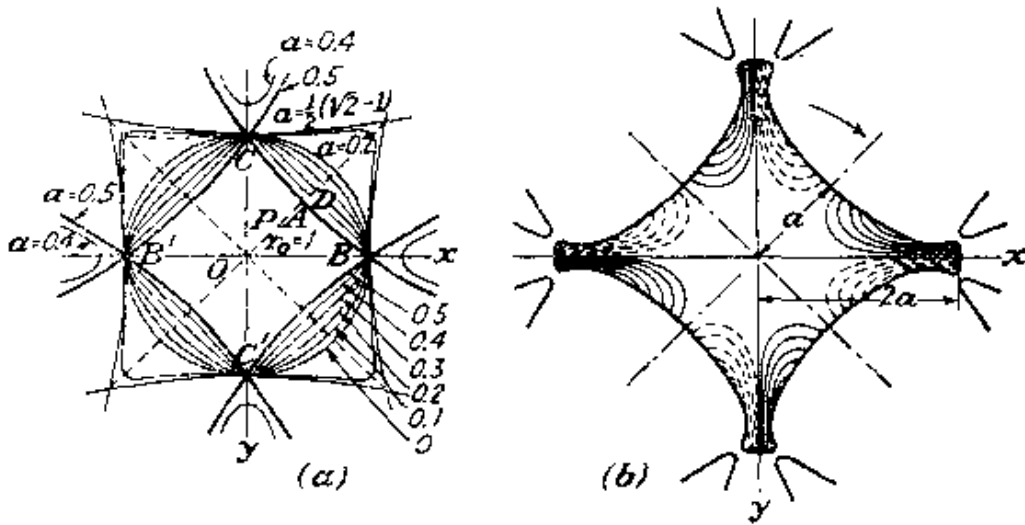


圖 156

比較各式之單連結斷面，聖維南氏察知可用 (157) 式計算扭轉剛性之近似值，亦即由橢圓斷面軸替代已知軸，僅須斷面面積及極慣性矩相同。

所有曾經聖維南氏研究之斷面最大應力均在邊界上距形心最近處之點上。費郎氏 (Filon) (註) 對此問題曾作較詳盡之探討，證明最大應力點，雖永係在邊界上，但不一定為形心之最近點。

取 $n=1$ 及 $n=-1$ 於算式 (d)，並採極坐標 r 及 ψ ，可得 (b) 式以下之解：

$$\phi_1 = r \cos \psi \quad \phi_2 = \frac{1}{r} \cos \psi$$

(註) 見 L. N. G. Filon, *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 193, 1900. 另參考 G. Pólya, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 10, p. 353, 1930.

應力函數 (ϕ) 可取為下式

$$\phi = \frac{F}{4} (x^2 + y^2) - \frac{Fa}{2} r \cos \psi + \frac{Fb^2}{2} \frac{a}{r} \cos \psi - \frac{F}{4} b^2 \quad (\text{m})$$

內 a 及 b 為常數。如在邊界上使 $\phi=0$ ，此將適應邊界條件 (152)，或由 (m) 式

$$r^2 - b^2 - 2a(r^2 - b^2) \frac{\cos \psi}{r} = 0 \quad (\text{n})$$

亦即

$$(r^2 - b^2) \left(1 - \frac{2a \cos \psi}{r} \right) = 0 \quad (\text{o})$$

此代表斷面 (註) 圖157邊界方程式，取

$$r^2 - b^2 = 0$$

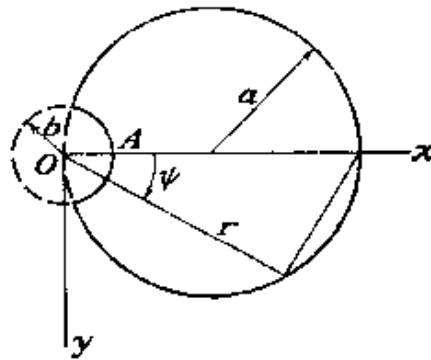


圖 157

吾人得中心在原點上半徑 b 之圓；取

$$1 - \frac{2a \cos \psi}{r} = 0$$

得一半徑 a 在原點上切於 y 軸之圓，最大應力在 A 點處其值為

$$\tau_{\max} = G\theta(2a - b)$$

當 a 較 b 為極小時，亦即，當有一極小半徑縱向半圓槽口時，槽口底處最大應力為無槽口半徑 a 圓軸最大應力之兩倍。

第一〇七節 薄膜類比

(註) 此問題經 C. Weber 討論，見 C. Weber, *Forschungsarbeiten*, no. 249, 1921.

浦藍得(Prandtl)(註1)氏所引用之薄膜類比(membrane analogy)法，對解扭轉問題極具價值。設想一均勻薄膜(圖158)，周圍支承與受扭轉桿斷面有相同之外線，受沿邊緣均勻拉力及側向均勻壓力。如 q 為膜上單位面積壓力， S 為周界單位長之拉力，作用於無限小單元 $abcd$ (圖158) ad 及 bc 邊上拉力，當薄膜撓度為小值時，將有一向上總和 $-S(\partial^2 z/\partial x^2) dx dy$ 。作用於另兩邊之拉力之總和為 $-S(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) dx dy$ 。單元之平衡方程式為

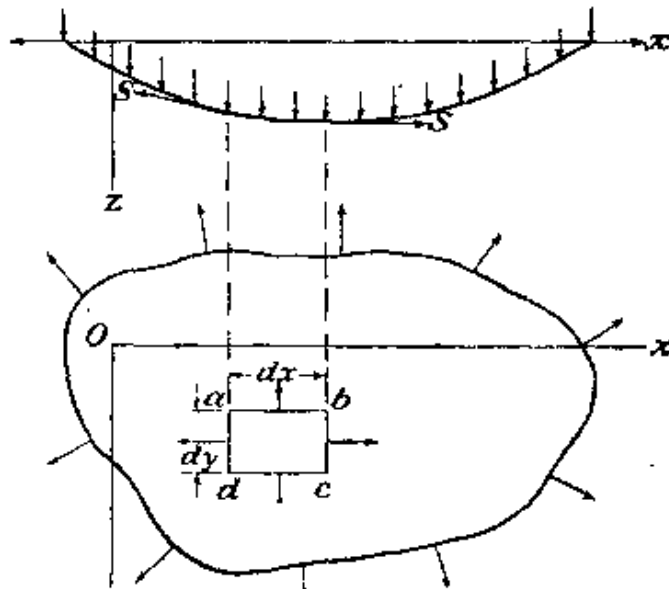


圖 158

$$q dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy = 0$$

由此可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \tag{159}$$

(註1) 見 *Physik. Z.*, vol. 4, 1903. 另參閱 Anthes, *Dinglers Polytech. J.*, p. 342, 1906. 此類比進一步發展及應用見 A. A. Griffith and G. I. Taylor, *Tech. Rept. Adv. Comm. Aeron.*, vol. 3, pp. 910 and 938, 1917-1918.

沿邊界上膜之撓度為零。比較薄膜方程式 (159) 及其撓度 z 之邊界條件與對應之扭轉應力函數方程式 (150) 及 (152)，知兩問題完全類比。因此，由薄膜之撓度吾人可得 ϕ 之值，只須 (159) 式中 $-(q/S)$ 換以 (150) 中 $F = -2G\theta$ 。

求得由等高線所代表之薄膜撓曲面後 (圖159)，對扭轉之應力分布可獲若干重要結論。取薄膜上任意一點 B 。沿經此點等高線薄膜撓度為常數，故

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

應力函數 ϕ 之對應方程式為

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) = \tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0$$

此示在任一點 B 上剪應力和對等高線法線之投影為零，故吾人得一結論為在扭轉桿內 B 點上剪應力係沿經此點等高線切線之方向。在扭轉桿斷面上所繪之曲線，使曲線上任一點上剪應力和沿曲線切線方向稱

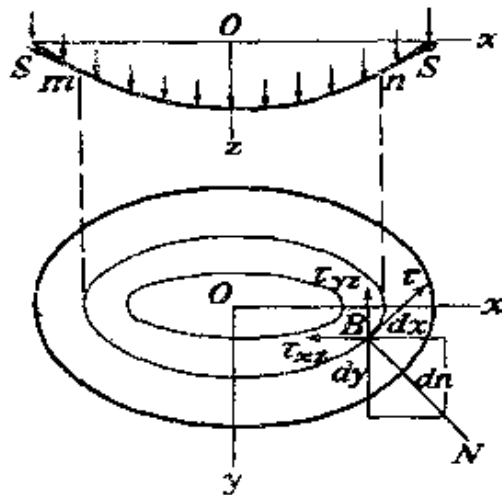


圖 159

為剪應力線 (lines of shearing stress)。因此，薄膜等高線為扭轉桿斷面上剪應力線。

在 B 點上總應力 τ (圖159) 可由應力分量 τ_{xz} 及 τ_{yz} 投影於切線

上求出。如此則

$$\tau = \tau_{yz} \cos(Nx) - \tau_{xz} \cos(Ny)$$

代入

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \cos(Nx) = \frac{dx}{dn} \quad \cos(Ny) = \frac{dy}{dn}$$

得

$$\tau = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dn}\right) = -\frac{d\phi}{dn}$$

因此，在 B 點上剪應力值為薄膜在此點之最大斜度，僅須在斜度算式中以 $2G\theta$ 代替 q/S 。由此所得之結論為最大剪應力作用於等高線間最接近處。

由方程式 (153) 知撓曲薄膜與 xy 面間容積之兩倍 (圖 159) 代表轉矩，只須 q/S 代以 $2G\theta$ 。

由以上結果可察知薄膜之形式，亦即應力分布，不論斷面何點取為扭轉問題之坐標原點，均無分別。此點代表斷面之旋轉軸。初時可能懷疑於斷面可對不同軸 (平行) 轉動而仍受同一轉矩。事實上其間差別僅關剛體轉動。例如，取對中心軸扭轉之圓柱體，表面上一母線與原方向成一斜角，但柱體對一直徑作剛體轉動時可恢復原狀，各斷面最後位置即相當於視此母線為定軸之扭轉。各斷面保持平面，但因柱之剛體轉動關係與其原平面成斜角。非圓斷面內將生翹曲，末端面上已知單元面積之斜度為固定值， $\partial w/\partial x$ 及 $\partial w/\partial y$ 為第 (104) 節之 (d) 及 (b) 式。此一單元可對末端面內一軸之剛體轉動回至原方位。此轉動將變更扭轉軸於一平行軸。因此，僅當末端面上一單元面積最後方位經規定時——例如單元為完全固定，扭轉軸或中心、或扭心 (center of torsion) 始可認定。

現察考限於一等高線內薄膜 mn 部分 (圖 159) 之平衡條件。沿此線薄膜斜率在每一點上與剪應力成比例並等於 $\tau(q/S)/2G\theta$ 。用 A 代表薄膜 mn 部分之水平投影，此部分平衡方程式為

$$\int S \left(\tau \frac{q}{S} - \frac{1}{2G\theta} \right) ds = qA$$

$$\text{或} \quad \int \tau ds = 2G\theta A \quad (160)$$

由此可得沿等高線剪應力之平均值。

取 $q=0$ ，亦即無側向力之薄膜，得以下方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (161)$$

此與前節函數 ϕ_1 相同。取薄膜邊界上豎坐標使

$$z + \frac{F}{4}(x^2 + y^2) = \text{常數} \quad (162)$$

前節中邊界條件 (c) 亦可適應。因此吾人可自無荷力薄膜之撓曲面獲得函數 ϕ_1 ，倘在邊界上薄膜曲面具一定值，後將說明有荷及無荷之薄膜均可用於以實驗方法求扭轉桿之應力分布。

薄膜類比不僅有用於桿在彈性限度內之扭轉，當斷面內一部分材料屈服時亦可應用 (註 1)。設在屈服過程中剪應力保持為常數，斷面彈性區域內應力分布如前由薄膜代表，塑性區域內應力將為對應屈服應力最大常數斜率之面所提供。設想於桿之斷面上建如此之面如一屋頂，而薄膜受拉及荷力如前。壓力遞增時將達一情況薄膜開始與屋頂接觸。此對應於扭轉桿塑性流動之起始，再增加壓力時，某些部分薄膜與屋頂接觸。此等接觸部分為桿內塑性流動區域。解釋此理論之實驗曾由納戴 (A. Nádai) 氏 (註 2) 完成。

第一〇八節 窄矩形斷面桿之扭轉

對窄矩形斷面桿薄膜類比方法提供一極簡單扭轉問題解。忽視矩

(註 1) 此係經 L. Prandtl 指出；見 A. Nádai, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 3, p. 442, 1923. 另閱 E. Trefftz, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 5, p. 64, 1925.

(註 2) 見 *Trans. ASME, Applied Mechanics Division*, 1930. 另閱 A. Nádai, "Theory of Flow and Fracture of Solids," chaps. 35 and 36, 1950.

形短邊之效應並設微撓薄膜曲面為柱體（圖160），吾人自均勻荷力弦線之拋物線撓曲線公式得薄膜撓度：

$$\delta = \frac{qc^3}{8S} \quad (a)$$

由熟知之拋物線性質，知最大斜率為

$$\frac{4\delta}{c} = \frac{qc}{2S} \quad (b)$$

此斜率出現於矩形長邊中間部分，撓曲薄膜與 xy 面間容積，以拋物線式柱體計算，為

$$V = \frac{2}{3} c \delta b = \frac{qbc^3}{12S} \quad (c)$$

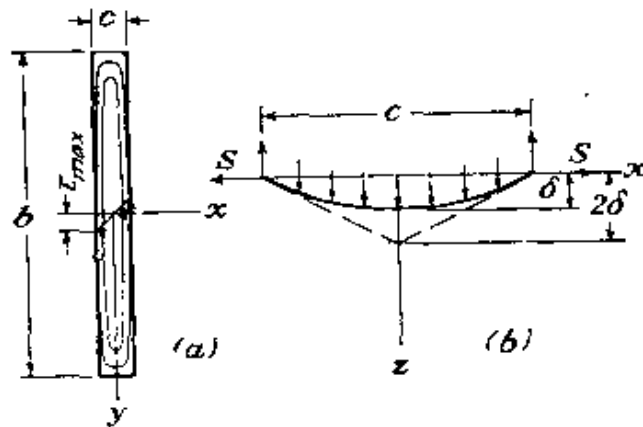


圖 160

現用薄膜類比並以 $2G\theta$ 代 q/S 於 (b) 及 (c)，得

$$\tau_{max} = cG\theta \quad M_t = 1/3bc^3G\theta \quad (d)$$

由此知

$$\theta = \frac{M_t}{1/3bc^3G} \quad (163)$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{1/3bc^2} \quad (164)$$

由拋物線撓曲線（圖160b）

$$z = \frac{4\delta}{c^2} \left(\frac{c^2}{4} - x^2 \right)$$

薄膜任一點上斜率為

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{8\delta x}{c^2} = -\frac{q}{S}x$$

扭轉桿內之對應應力為

$$\tau_{yz} = 2G\theta x$$

應力分布為線性者如圖160a所示。計算對應於此應力分布之轉矩，得

$$\frac{\tau_{\max}}{4} c \cdot \frac{2}{3} cb = \frac{1}{6} bc^2 \tau_{\max}$$

此僅為 (164) 式總轉矩之半，另一半係應力分量 τ_{xz} 所提供，當吾人設薄膜撓曲面係柱體時此應力分量全被忽計。雖此等分量僅在矩形短

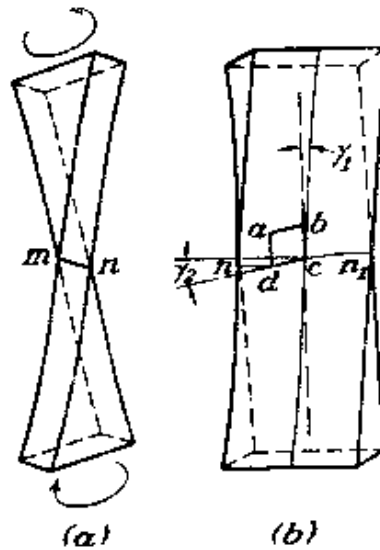


圖 161

邊附近具相當值而其最大值小於以上算出之 τ_{\max} ，但係作用於對桿軸線較大距離處，故其力矩仍能為轉矩 M_t (註) 之一半。

由方程式 (d) 第一式知 τ_{\max} 兩倍於直徑為 c 受相同扭角 θ 圓軸

(註) 此問題係由克爾文爵士予以澄清；見 Kelvin and Tait, “自然哲學”，卷 2，第 267 頁。

之最大剪應力。此點頗饒興趣。其原因，可由斷面之翹曲解釋。斷面之邊線如 m_1 (圖161) 在兩端上保持與縱向纖維垂直，如圖中所示 n 及 n_1 點。單元如 $abcd$ 上之總剪應變可分為兩部：一部 γ_1 係由斷面對桿軸線轉動所造成並等於直徑為 c 圓桿之剪應變；另一部分 γ_2 係由斷面翹曲所造成。在窄矩形斷面例中 $\gamma_2 = \gamma_1$ ，而總應變二倍於直徑為 c 之圓斷面。

方程式 (163) 及 (164)，係對窄矩形所導出，亦可用於斷面為 (162) 圖所示之薄壁桿。此時 b 用斷面之展開長度。此係根據以下之事實：如一開口管 (圖162a) 之厚度 c 遠較其直徑為小，薄膜之最大斜率將與同寬度 c 窄矩形斷面者接近相等，薄膜所限之容積亦將與

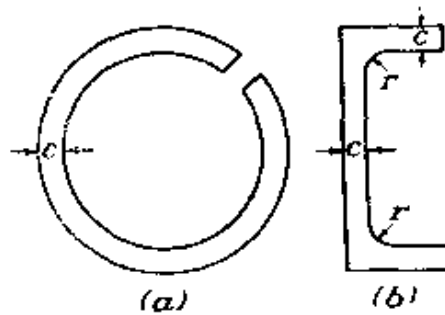


圖 162

同寬度 c 及同中線周長之管者相等。類比之結論亦可用於一槽形斷面 (圖162b)。所應注意者後一例中在扭角處有相當之應力集中，視補角 r 半徑而定，方程式 (164) 不能用於此等點上。對此點將於第112節中討論之。

第一〇九節 矩形桿之扭轉

用薄膜類比，此問題化為尋求均勻荷力下薄膜位移如圖 163 所示。此位移須適應方程式 (159)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad (a)$$

而在邊界處為零。

對 y 軸之對稱條件及邊 $x \pm a$ 上邊界條件，可取 z 為以下之無限級數予以適應

$$z = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{2a} Y_n \quad (b)$$

內 b_1, b_3, \dots 為常數係數， Y_1, Y_3, \dots 為 y 之函數。代 (b) 於 (a)，並察知 (a) 式右方常數在 $-a < x < a$ 範圍內可由傅立葉級數

$$-\frac{q}{S} = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q}{S} \frac{4}{n\pi} (-1)^{(n-1)/2} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (c)$$

代表，吾人得下式以決定 Y_n ：

$$Y_n = A \sinh \frac{n\pi y}{2a} + B \cosh \frac{n\pi y}{2a} + \frac{16qa^2}{Sn^3\pi^3b_n} (-1)^{(n-1)/2} \quad (d)$$

由此知

$$Y_n'' - \frac{n^2\pi^2}{4a^2} Y_n = -\frac{q}{S} \frac{4}{n\pi b_n} (-1)^{(n-1)/2} \quad (e)$$

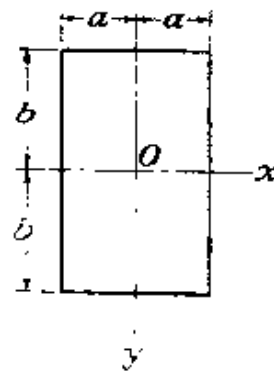


圖 163

由薄膜撓曲面對 x 軸之對稱條件，知積分常數須為零。常數 B 則由在 $y = \pm b$ 上薄膜撓度為零之條件求得，即 $(Y_n)_{y=\pm b} = 0$ ，因此得

$$Y_n = \frac{16qa^2}{Sn^3\pi^3b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \quad (f)$$

故薄膜位移曲面之一般算式為

$$z = \frac{16qa^2}{S\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

用 $2G\theta$ 替代 q/S ，吾人得應力函數

$$\phi = \frac{32G\theta a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (g)$$

各應力分量可由對上式微分求出，例如

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \sin \frac{n\pi x}{2a} \quad (h)$$

設 $b > a$ ，最大剪應力，對應於薄膜之最大斜率，係在長 $x = \pm a$ 中點處。代 $x = a$ ， $y = b$ 於 (h) 式，得

$$\tau_{\max} = 2G\theta a - \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh(n\pi b/2a)}$$

因知 (註)

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

故

$$\tau_{\max} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[1 - \frac{1}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \quad (165)$$

右方之無窮級數，對 $b > a$ 時，迅速收斂，故對已知 b/a 值計算足夠精確之 τ_{\max} 值並無困難。例如，窄矩形斷面例中， b/a 為一大數，故 (165) 式中無窮級數和可被忽計，故得

$$\tau_{\max} = 2G\theta a$$

此與前節中 (d) 之第一式相符。

(註) 參考 H. S. Carslaw, "Fourier Series and Integrals," 3d ed., p. 235, Dover Publications, Inc., New York, 1830.

當爲正方形斷面時， $a=b$ ；由 (165) 式得

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= 2G\theta a \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{\cosh(\pi/2)} + \frac{1}{9 \cosh(3\pi/2)} + \dots \right] \right\} \\ &= 2G\theta a \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{2.509} + \frac{1}{9 \times 55.67} + \dots \right) \right] = 1.351G\theta a\end{aligned}\quad (166)$$

一般情況下可寫

$$\tau_{\max} = k2G\theta a \quad (167)$$

內 k 爲一數值因子其值視 b/a 比例而定。下表中爲此因子之數值。

矩形斷面桿扭轉常數

$\frac{b}{a}$	k	k_1	k_2	$\frac{b}{a}$	k	k_1	k_2
1.0	0.675	0.1406	0.208	3	0.985	0.263	0.267
1.2	0.759	0.166	0.219	4	0.997	0.281	0.282
1.5	0.848	0.196	0.231	5	0.999	0.291	0.291
2.0	0.930	0.229	0.246	10	1.000	0.312	0.312
2.5	0.968	0.249	0.258	∞	1.000	0.333	0.333

現計算爲扭角 θ 函數之扭矩 M_t ，用方程式 (153)，吾人得

$$\begin{aligned}M_t &= 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \phi dx dy - \frac{64G\theta a^2}{\pi^3} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{(n-1)/2} \right. \\ &\quad \left. \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \right\} dx dy - \frac{32G\theta (2a)^3 (2b)}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ &\quad - \frac{64G\theta (2a)^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a}\end{aligned}$$

另因已知級數和

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

故得

$$M_t = \frac{1}{3} G\theta(2a)^3(2b) \left(1 - \frac{192}{\pi^3} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad (168)$$

級數之右方收斂極速，故對任何值之 a/b ， M_t 可極易算出。在窄矩形例中，吾人可取

$$\tanh \frac{n\pi b}{2a} = 1$$

因此，

$$M_t = \frac{1}{3} G\theta(2a)^3(2b) \left(1 - 0.630 \frac{a}{b} \right) \quad (169)$$

在正方形例中， $a=b$ ；故 (168) 式為

$$M_t = 0.1406 G\theta(2a)^4 \quad (170)$$

一般情況下，扭矩可由下式代表

$$M_t = k_1 G\theta(2a)^3(2b) \quad (171)$$

式中 k_1 為一數值因子，其值視比例 b/a 而定。此因子若干值列於前頁表中。代 (171) 式 θ 值於 (167) 式內，吾人得以扭矩為函數之最大剪應力算式

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{k_2(2a)^2(2b)} \quad (172)$$

內 k_2 為一數值因子，其值亦見上表中。

第一一〇節 其他結果

用於前節之無窮級數，可解若干其他形式斷面之扭轉問題。

在扇形斷面例中 (註 1) (圖 164)，邊界為 $\psi = \pm d$ ， $r = 0$ ， $r = a$ 。吾人取應力函數為

(註 1) 此解曾由聖維南討論，見 *Compt. Rend.*, vol. 87, pp. 849, and 893 1978. 另參考 A. G. Greenhill, *Messenger of Math.*, vol. 10, p. 83, 1880. 另一解法用柏塞爾函數見 A. Dinnik, *Bull. Don Polytech. Inst., Novotcherkassk*, vol. 1, p. 309. 另參考 A. Föppl and L. Föppl, "Drang und Zwang," p. 96, 1928.

$$\phi = \phi_1 + \frac{F}{4} (x^2 - y^2) = \phi_1 - \frac{G\theta r^2}{2}$$

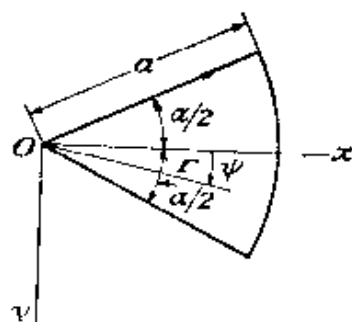


圖 164

函數 ϕ_1 須適應拉普拉司方程式 (閱第 106 節)。取此問題之一解為以下之級數式

$$\phi_1 = \frac{G\theta}{2} \left[\frac{r^2 \cos 2\psi}{\cos \alpha} + a^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^{n\pi/\alpha} \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} \right]$$

吾人得應力函數

$$\phi = \frac{G\theta}{2} \left[-r^2 \left(1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha} \right) + a^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^{n\pi/\alpha} \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} \right]$$

此式在邊界線

$$\psi = \pm \frac{\alpha}{2}$$

上值為零。為使其在圓弧 $r=a$ 上為零，吾人必須置

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} = 1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha}$$

由此以常用方法得

$$A_n = \frac{16\alpha^2}{\pi^3} (-1)^{(n+1)/2} \frac{1}{n(n+2\alpha/\pi)(n-2\alpha/\pi)}$$

故應力函數為

$$\phi = \frac{G\theta}{2} \left[-r^2 \left(1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha} \right) + \frac{16a^2\alpha^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(n+1)/2} \left(\frac{r}{a} \right)^{n\pi/\alpha} \frac{\cos(n\pi\psi/\alpha)}{n(n+2\alpha/\pi)(n-2\alpha/\pi)} \right]$$

代入方程式 (153) 中，得 $M_t = 2 \iint \phi r dr d\psi = kGa^4\theta$ ，內 k 為一因子視扇角 α 而定。聖維南氏曾予若干 k 值加以計算，列表如下

$\alpha =$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$k =$	0.0181	0.0349	0.0825	0.148	0.298*	0.572*	0.672 ⁺	0.878 ⁺
$k_1 =$	0.452	0.622	0.728 [‡]
$k_2 =$	0.490	0.652	0.849

* 此數值至 M. Aissen 予以修正，見 G. Pólya and G. Szegő, "Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics," p. 261, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

⁺ 經 Dinnik 修正，*loc. cit.*

[‡] 作者對 G. Szegő 指正表謝意。

沿圓弧及徑向邊界線上最大剪應力各為 $k_1 Ga^2$ 及 $k_2 Ga^2$ ，若干 k_1 及 k_2 值見上表中。

兩同心圓弧及兩半徑所包含之曲矩形可以相同方式求解（註 1）。

在直之等腰三角形例中（註 2），扭角可由下式代表

$$\theta = 38.3 \frac{M_t}{Ga^4}$$

內 a 為三角形兩等邊長度，最大剪應力係在斜邊之中點處，其值為

$$\tau_{\max} = 18.02 \frac{M_t}{a^3}$$

引用曲線坐標，若干他種斷面曾被究討。用橢圓坐標（見第 193 頁）及共軛函數 ξ 及 η ，並用下式

$$x + iy = c \cosh(\xi + i\eta)$$

（註 1）Saint-Venant, *loc. cit.* 另參閱 A. E. H. Love, "Theory of Elasticity," 4th ed., p. 319, 1927; A. G. Greenhill, *Messenger of Math.*, vol. 9, p. 35, 1879.

（註 2）B. G. Galerkin, *Bull. Acad. des Sci. de Russ.*, p. 111, 1919; G. Kolossoff, *Compt. Rend.*, vol. 178, p. 2057, 1924.

可得共焦橢圓及雙曲線所定界之斷面 (註 1) 。用以下方程式 (註 2)

$$x + iy = 1/2(\xi + i\eta)^2$$

得邊界為正交拋物線之斷面。

甚多其他斷面 (註 3) 亦會解出，包含多邊形、角、心臟形、雙扭形 (註 4)、實心或空心，及具一個或多個非同圓洞之圓形 (註 5) 。當一斷面可保角映像於單位圓內時，即可用複變積分寫出解法 (註 6) 。

第一一節 扭轉問題之能量解法 (註 7)

吾人已知扭轉問題解每一例中為求適應微方程式 (150) 及邊界條件 (152) 之應力函數。在導求問題之近似解時，可用某積分為最小值條件代替微分方程以求應力函數 (註 8) 。此可用扭轉桿之應變能

(註 1) A. G. Greenhill, *Quart. J. Math.*, vol. 16, 1879. 另參閱 Filon, *loc. cit.*

(註 2) E. W. Anderson and C. L. Holl, *Iowa State Coll. J. Sci.*, vol. 3, p. 231, 1929.

(註 3) 彙編見 T. J. Higgins, *Am. J. Phys.*, vol. 10, p. 248, 1942.

(註 4) 此處無法例舉所有正確解，讀者可參閱 *Applied Mechanics Reviews*, *Science Abstracts A*, *Mathematical Reviews*, and *Zentralblatt für Mechanik*.

(註 5) 見林致平著 C. B. Ling, *Quart. Applied Math.*, vol. 5, p. 168, 1947.

(註 6) 此為 N. I. Muskhelishvili 所得 (見第 200 頁，註 6) 。另參考 I. S. Sokolnikoff, "Mathematical Theory of Elasticity" 2d ed., p. 151, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956. 新發展及參考資料見 W. A. Bassali, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 8, pp. 87-99, 1960.

(註 7) 對各種接近法之綜合參考及文獻，閱 T. J. Higgins, *J. Applied Phys.*, vol. 14, p. 469, 1943.

(註 8) 此法為 W. Ritz 所倡議，彼曾用以解矩形板撓曲及振動問題，見 *J. Reine Angew. Math.*, vol. 135, 1908, and *Ann. Physik*, ser. 4, vol. 28, p. 737, 1909.

觀點求之。由 (136) 式，知單位桿長之應變能為

$$V = \frac{1}{2G} \iint (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dx dy = \frac{1}{2G} \iint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

如吾人予應力函數任何微變分 $\delta\phi$ ，在邊界上為零值（註），應變能之變分為

$$\frac{1}{2G} \delta \iint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

扭矩之變分，由 (153) 式，為

$$2\theta \iint \delta\phi dx dy$$

用與導求方程式 (142) 類比之論據，得

$$\frac{1}{2G} \delta \iint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - 2\theta \iint \delta\phi dx dy$$

或
$$\delta \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\phi \right\} dx dy = 0$$

因此應力函數 ϕ 之真正算式為使下列積分之變分為零

$$U = \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\phi \right\} dx dy \quad (173)$$

用虛功原理及薄膜類比可得相同結論（見第92節）。如 S 為膜內均勻拉力，膜內由位移所增加之應變能為拉力 S 與膜增加面積之乘積，如此則得

$$\frac{1}{2} S \iint \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

內 z 為薄膜之撓度，如對薄膜之平衡位置予一虛位移，因此項變更所致薄膜應變能之變更必須等於均勻荷力對虛位移所作之功，因此吾人得

$$\frac{1}{2} S \delta \iint \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint q \delta z dx dy$$

故求薄膜位移變為尋一函數 z 下列積分

$$\iint \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{q}{S} z \right\} dx dy$$

（註）如 $\delta\phi$ 在邊界上取為零，在側面上將無由 ϕ 變分引進之力。

爲一最小值，如將此式內 q/S 代以 $2G\theta$ ，即得 (173) 式之積分。

尋求扭轉問題近似解時，吾人對以上之變分學問題換以求函數極小值之單純問題，吾人取應力函數爲以下之級數式

$$\phi = a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \dots \quad (\text{a})$$

內 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ 爲適應邊界條件之函數，亦即在邊界上均爲零值。選擇此等函數時應以薄膜類比爲依據而取適於代表函數 ϕ 之形式者。各係數 a_0, a_1, a_2, \dots 爲數值因子將由積分 (173) 之最小值條件所決定。將級數 (a) 代入此積分，積分後得一爲 a_0, a_1, a_2, \dots 之二次函數，其最小值條件爲

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial a_2} = 0 \quad (\text{b})$$

因此得一系統之線性方程式以決定 a_0, a_1, a_2, \dots 各係數值。

增加級數 (a) 項數可增加近似解之精確性，用無窮級數時可得扭轉問題之正確解 (註1)。

取矩形斷面 (圖163) (註2) 爲例。邊界線爲方程式 $x = \pm a, y = \pm b$ ，函數 $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$ 在邊界上爲零。級數 (a) 可取爲下式

$$\phi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \sum \sum a_{mn} x^m y^n \quad (\text{c})$$

內 m 及 n ，由對稱條件，須取偶數。

設爲一正方形斷面並取級數之第一項，

$$\phi = a_0(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \quad (\text{d})$$

代於 (173) 式，由最小條件得

(註1) 此解法之收斂問題曾由 Ritz 予以檢討，*loc. cit.* 另閱 E. Trefftz "Handbuch der Physik," vol. 6, p. 130, 130, 1928.

(註2) 參考 S. Timoshenko, *Bull. Inst. Ways of Communication*, St. Petersburg, 1913, and *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 20, p. 389, 1921.

$$a_0 = \frac{5}{8} \frac{G\theta}{a^2}$$

扭矩值，由 (153) 式，為

$$M_t = 2 \iint \phi \, dx \, dy = 20/9 G\theta a^4 = 0.1388(2a)^4 G\theta$$

與正確解 (170) 相較，差誤約為百分之 $1\frac{1}{3}$ 。

為得較佳之近似值，取級數 (c) 之前三項，用對稱條件，得

$$\phi = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)[a_0 + a_1(x^2 + y^2)] \quad (e)$$

代此於 (173) 式並用方程式 (b)，得

$$a_0 = \frac{5}{8} \frac{259}{277} \frac{G\theta}{a^2} \quad a_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} \frac{35}{277} \frac{G\theta}{a^2}$$

代於 (153) 式，得扭矩為

$$M_t = 20/9 [259/277 + (2/5)(3/2)(35/277)] G\theta a^4 = 0.1404 G\theta (2a)^4$$

此值僅較正確值小百分之 0.15。

對最大應力值將得最差誤較大之結果，代 (e) 於 (149) 式，最大應力之差誤約為百分之 4。欲得較佳之近似值則須級數之更多項數。

由薄膜類比可知用以上所述程序，吾人通常得一較正確值為小之轉矩。完全柔性薄膜，在邊界上受均勻拉力並受均勻荷力，為一具無限自由度系統，取級數中小數項相當於引進若干拘束於系統內，而使系統變為僅具少數自由度者。此等拘束僅能降低系統柔性及減小位移後薄膜所包含之容積。因此轉矩值，為此容積所代表，通常小於其正確值。

楚弗茲 (A. Trefftz) (註) 倡議用另一接近方法以求應力函數 ϕ 。用此方法所得之轉矩接近值大於其正確值。因此合用瑞芝及楚弗

(註) 參考 *Proc. 2d Intern. Congr. Appl. Mech.*, Zürich, 1926, p. 131.

See also N. M. Basu, *Phil. Mag.*, vol. 10, p. 886, 1930.

茲方法接近解差誤限可被建立。

用瑞芝法時並不限於取多項式 (c)。吾人可取級數 (a) 內之 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ 為適於代表應力函數 ϕ 之任何其他形式。例如，取三角函數，並注意對稱條件 (圖163)，吾人得

$$\phi = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (f)$$

代入 (173) 式並積分後，得

$$U = \frac{\pi^2 ab}{8} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - 2G\theta \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{mn} \frac{16ab}{mn\pi^2} (-1)^{[(m+n)/2]-1}$$

方程式變為

$$\frac{\pi^2 ab}{4} a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - 2G\theta \frac{16ab}{mn\pi^2} (-1)^{[(m+n)/2]-1} = 0$$

故得

$$a_{mn} = \frac{128G\theta b^2 (-1)^{[(m+n)/2]-1}}{\pi^4 mn(m^2 a^2 + n^2)}$$

內 $\alpha = b/a$ ，代入 (f) 式，吾人得一無窮三角函數級數式之正確解。

轉矩將為

$$\begin{aligned} M_t &= 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \phi \, dx \, dy \\ &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{128G\theta b^2}{\pi^4 mn(m^2 a^2 + n^2)} \frac{32ab}{mn\pi^2} \end{aligned}$$

此算式可化為 (168) 式，如吾人引用以下已知關係

$$\frac{1}{m^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2(m^2 a^2 + n^2)} = \frac{\pi^4}{96m^2} \frac{\tanh(m\alpha\pi/2) - (m\alpha\pi/2)}{-1/3(m\alpha\pi/2)^3}$$

另一例，取窄矩形斷面，其高 b 較寬 a 為甚大 (圖163)，對第一次接近值取

$$\phi = G\theta(a^2 - x^2) \quad (\text{h})$$

此與前所討論解相同（見第 108 節）。爲求適應短邊上邊條件之較佳接近解，吾人可取

$$\phi = G\theta(a^2 - x^2)[1 - e^{-\beta(b-y)}] \quad (\text{i})$$

並對 β 值作一選擇使積分 (173) 爲最小。如此吾人得

$$\beta = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{5}{2}}$$

用 (i) 式括弧內指數項關係，在距矩形短邊相當遠處各點上吾人得實際與 (h) 解相同之應力分布，接近短邊處應力函數適應邊界條件 (152)。代 (i) 式於 (152) 式，所得之轉矩爲

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \phi \, dx \, dy = \frac{1}{3} G\theta(2a)^3(2b) \left(1 - 0.632 \frac{a}{b}\right)$$

此與前用無窮數所得之 (169) 式極相近。

一多項式之應力函數，類比於對矩形斷面所取之 (c) 式，可用於任何凸多邊形。如

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \dots$$

爲多邊形各邊之方程式，應力函數可取爲

$$\phi = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \dots (a_nx + b_ny + c_n) \sum \sum_{mn} x^n y^m$$

而級數之前數項通常足夠得一相當精確解。

能量法亦有用於斷面邊界（圖165）爲兩曲線（註 1）

$$y = a\psi\left(\frac{x}{b}\right) \quad \text{及} \quad y = -a_1\psi\left(\frac{x}{b}\right)$$

（註 1）此類問題曾爲 L. S. Leibenson 氏予以討論，閱其所著 "Variational Methods for Solving Problems of the Theory of Elasticity," Moscow, 1943. 另閱 W. J. Duncan, *Phil. Mag.*, ser. 7, vol. 25, p. 634, 1938.

內 $\psi\left(\frac{x}{b}\right) = \psi(t) = (t)^m [1 - (t)^p]^q$

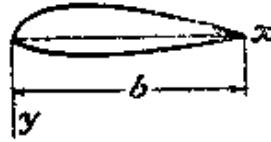


圖 165

如取以下之應力函數接近式

$$\phi = A(y - a\psi)(y + a_1\psi)$$

代於積分式 (173)，由 $dI/dA = 0$ 之條件，得

$$A = -\frac{G\theta}{1 + \alpha(a^2 + a_1^2 + aa_1)/b^2}$$

內

$$\alpha = \frac{\int_0^1 \psi^3 (d\psi/dt)^2 dt}{\int_0^1 \psi^3 dt}$$

由 (153) 式得轉矩值爲

$$M_t = -A \frac{b(a + a_1)^2}{3} \int_0^1 \psi^3 dt$$

在一特例中當 $m = 1/2$ ， $p = q = 1$ ， $a = a_1$ ，則 $y = \pm a\psi(x/b) = \pm \sqrt{x/b}[1 - (x/b)]$ ，並得

$$A = -\frac{G\theta}{1 + \frac{11}{13} \frac{a^2}{b^2}} \quad M_t = 0.0736 \frac{G\theta b a^2}{1 + \frac{11}{13} \frac{a^2}{b^2}}$$

對斷面爲一圓弧及一弦爲邊界之接近解及與實驗比較曾由魏淦 (註) 氏 (A. Weigand) 提出報告，扭轉問題之數值分析將於本書附錄中討論。

(註) 見 *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 20, 1944, 及英譯 *NACA Tech. Mem.* 1182, 1948.

第一一二節 各式軋製斷面型之扭轉

研討各式軋製斷面型如角、槽及工字梁等之扭轉時，在對窄矩形桿（見第108節）所導得之公式仍可採用。如斷面厚度不變，如圖166a所示，扭角可於（163）式中用中線之展開長以替代 b （註1），即 $b = 2a - c$ 而得一足夠精確之結果。在槽形斷面例中（圖166b），取翼緣

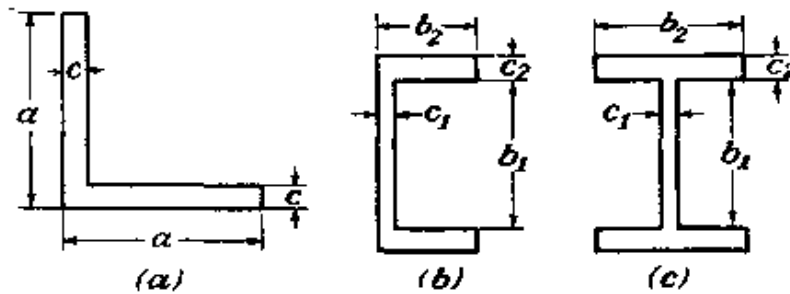


圖 166

之平均厚度 c_2 ，將斷面分為三個矩形，並以 $b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3$ 代替 bc^3 於（163）式中，亦即設槽之扭轉剛度為三矩形扭轉剛度之和（註2），可得扭角之粗略接近值。如此則

$$\theta = \frac{3M_t}{(b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3) G} \quad (a)$$

計算對面各尖角遠距離處各點上之應力，吾人可再援用窄矩形斷面之公式並取

$$\tau = c\theta G$$

如此則（a）式得對槽之翼緣

$$\tau = \frac{3M_t c_2}{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3} \quad (b)$$

（註1）較完備之公式，計入由各矩形接頭所增加之剛度，會由 G. W. Trayer 及 H. W. March 根據皂膜及扭轉實驗展出，見 *Natl. Advisory Comm. Aero. Rept.* 334, 1930.

（註2）此法所得之扭轉剛度與實驗所得結果比較見 A. Föppl, *Sitzber. Bayer. Akad. Wiss., München*, p. 295, 1921. 另參考 *Bauingenieur*, ser. 5, vol. 3, p. 42, 1922.

相同之接近公式可用於工字梁斷面中 (圖166c)。

在凹角處有相當之應力集中存在，其值視填角半徑而定。填角上最大應力之粗略接近值可得自薄膜類比。設取斷面為一致厚度 c 之角 (圖 167) 其凹角填角半徑為 a ，另設在平分線 OO_1 上薄膜為接近於旋轉曲面，用極坐標，薄膜之位移方程式 (159) 變為

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} = -\frac{q}{S} \quad (c)$$

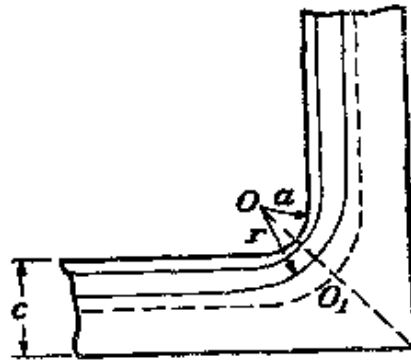


圖 167

當 q/S 由 $2G\theta$ 替代時，薄膜斜率 dz/dr 為剪應力 τ ，由 (c) 得剪應力方程式如下：

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r}\tau = -2G\theta \quad (d)$$

對尖角處相當遠距離角臂上對應之方程式，因薄膜為一近於柱體之曲面，為

$$\frac{d\tau}{dn} = -2G\theta \quad (e)$$

內 n 為邊界上之法線，用 τ_1 代表邊界上應力，由 (e) 式得前對窄矩形所得解 $\tau_1 = G\theta c$ ，用此結果，由 (d) 式得

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r}\tau = -\frac{2\tau_1}{c} \quad (d')$$

積分之結果為

$$\tau = \frac{A}{r} - \frac{\tau_1 r}{c} \quad (f)$$

內 A 為積分常數。為決定此常數，設在距邊界 $c/2$ 之 O_1 處剪應力變為零（圖167）。如此則由（f），

$$\frac{A}{a+(c/2)} - \frac{\tau_1 [a+(c/2)]}{c} = 0 \quad A = \frac{\tau_1}{c} \left(a + \frac{c}{2} \right)^2$$

代於（f）式並取 $r = a$ ，得

$$\tau_{\max} = \tau_1 \left(1 + \frac{c}{4a} \right) \quad (g)$$

如 $a = 1/2c$ ，如圖 167 所示， $\tau_{\max} = 1.5\tau_1$ ，對極小之填角半徑，最大應力值甚高。例如取 $a = 0.1c$ 吾人得 $\tau_{\max} = 3.5\tau_1$ 。

較精確及完整結可得自以微差法為根據之數值計算（參閱附錄章），用此法（註）所得以 a/c 為函數之 τ_{\max}/τ 曲線示於圖 168 中（曲線 A）；另為代表方程式（g）之曲線。由此圖知當 a/c 小於 0.3 時此簡單公式可提供良好之結果。

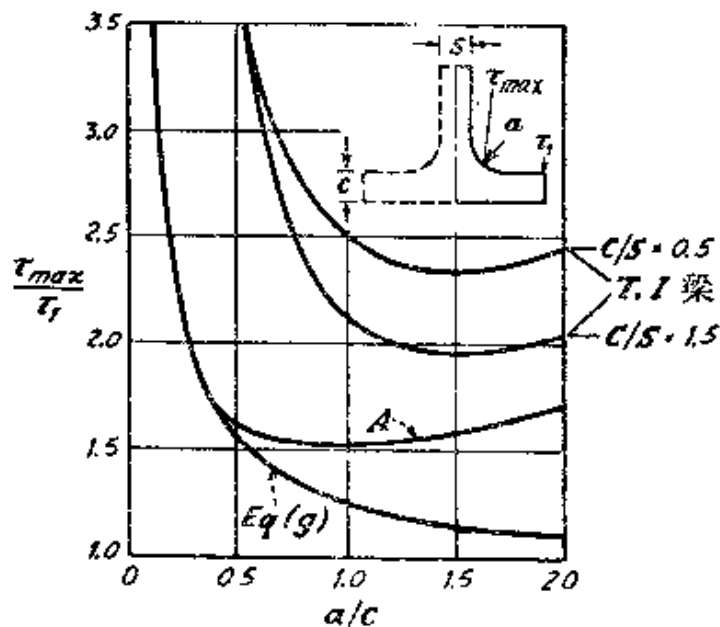


圖 168

(註) 見 J. H. Huth, *J. Appl. Mech.*, vol. p. 388, 1950. 另參考 I. Lyse and B. G. Johnston, *Proc. ASCE*, 1935, p. 469.

第一一三節 實驗類比

吾人已知扭轉桿內斷面上應力分布可由薄膜類比獲得一有用之一般了解。用皂膜所製成之薄膜亦曾於應力之直接測度 (註1)。皂膜係作於平板割為所需形式之洞口上。為使直接決定應力變為可能，同一板中須另有一圓洞口代表圓斷面以作比較。對兩膜施以相同壓力，吾人得同值之 q/S (註2)，對應於兩扭轉桿同值之 $G\theta$ 。因此，度量兩皂膜之斜率，吾人可比較已知斷面在相同單位長扭角 θ 及相同 G 值下應力與圓斷軸應力。對應之轉矩比例可由皂膜與平板間容積之比例求得 (註3)。

應力集中點處，如小半徑填角上，皂膜將供不精確之結果 (註4)。較可靠之值可得自電導片類比 (註5)。電導片割為扭轉桿斷面相同之形式。如常數電流 i (單位面積) 輸入整個面積中，片中電位 V 將適應方程式

$$\nabla^2 V = -\rho i$$

內 ρ 為片之均勻電阻係數。如在邊界上保持常數電位，吾人得一由方

(註1) 見 Griffith 及 Taylor 論文，*loc. cit.*；另見 Trayer 及 March 論文，*loc. cit.* 對扭轉此項及其他類比，連同參考資料，見 T. J. Higgins, *Exp. Stress Anal.*, vol. 2, no. 2, p. 17, 1945.

(註2) 設兩膜之表面張力相同，此經實驗證明相當正確。

(註3) 詳細討論見 M. Hetényi (ed.), "Handbook of Experimental Stress Analysis," chap. 16, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950.

(註4) 見 C. B. Biezeno and J. M. Rademaker, *De Ingenieur*, no. 52, 1931. 另閱 P. A. Cushman, *Trans. ASME*, 1932, H. Quest, *Ingenieur-Arch.*, vol. 4, p. 510, 1933, and J. H. Huth, *loc. cit.*

(註5) N. S. Waner and W. W. Soroka, *Proc. Soc. Exptl. Stress Anal.*, vol. II(L), pp. 19-26, 1953; 另見 W. W. Soroka, "Analog Methods in Computation and Simulation."

程式 (150), (151) 及 (152) 所代表扭轉問題之完整類比。圖168中 T, I 標記之曲線用此法求得 (註1), 而對角斷面之曲線亦經此法驗正。

第一一四節 流體動力學類比

扭轉問題與流體在管中連動有若干類比存在。克爾文爵士(註2)指出函數 ϕ_1 [閱第106節 (a) 式], 有時用於扭轉問題者, 與理想流體某種非旋轉連動之流線函數 (stream function) 完全相同, 如流體容器斷面與扭轉桿斷面相同。

另一類比係由包新尼斯克 (J. Boussinesq) (註3) 所指出。彼證示決定應力函數 ϕ 之微分方程式與邊界條件 [(150) 及 (152) 式] 與黏性流體沿管作層流運動決定速度之各方程式完全相同, 如管斷面與扭桿斷面相同 (註4)。

格林希 (Greenhill) 氏曾證示應力函數 ϕ 與理想流體具均勻旋度 (註5) 環流之流線函數具完全相同之數學意義, 如管之斷面同於扭轉桿 (註6)。設 u 及 v 在 A 點處 (圖169) 環流流體之速度分量, 由理想流體之不可壓縮性知

(註1) C. W. Beadle and H. D. Conway (1) *Exp. Mech.*, pp. 198-200, August, 1963; (2) *J. Appl. Mech.*, vol. 30, pp. 138-141, 1963. 後一論文並提供用解析近似所得結果。

(註2) Kelvin and Tait, "Natural Philosophy," pt. 2. p. 242.

(註3) *J. Math. Pure Appl.*, ser. 2, vol. 16, 1871.

(註4) 此類比曾被 M. Paschoud 應用, 見 *Compt. Rend.*, vol. 179, p. 451, 1924. 另參考 *Bull. Tech. Suisse Rom. (Lausanne)*, November, 1925.

(註5) 旋度之算式與第241頁所討論之轉動 ω_2 相同, 倘 u 與 v 代表流體速度分量。

(註6) A. Greenhill, *Hydromechanics*, 大英百科全書 11th ed., p. 115, 1910.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{a})$$

均勻旋度條件爲

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \text{常數} \quad (\text{b})$$

取

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{c})$$

可適應 (a) 式，由 (b) 式得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \text{常數} \quad (\text{d})$$

此與扭轉問題之 (150) 式相同

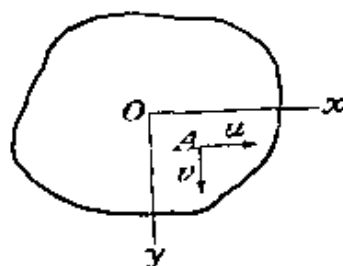


圖 169

在邊界上流體環流之速度係沿邊切線方向，流體動力之邊界條件與扭轉問題 (152) 式之條件相同。因此流體動力中速度分布與扭轉問題應力分布之數學模型完全一致，故若干實用上重要之結論可自己知流體力解得知。

吾人取扭轉圓軸內有一小圓孔爲例 (圖 170) (註)。此孔對應力分布之影響流體動力模型之環流內引進一同直徑之靜止固體圓柱相同。此一圓柱對其附近流體速度發生極大變更。在前後兩點上速度變爲零，而在邊上 m 及 n 點速度增爲兩倍。此一洞孔在軸上使剪應力增

(註) 見 J. Larmor, *Phil. Mag.*, vol. 33, p. 76, 1892.

加兩倍。軸上一小半圓槽口平行於軸長（圖 170）具同一效應，在槽底 m 點處約為距槽口遠處軸表面處應力之兩倍。

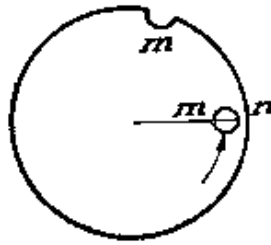


圖 170

同一流體動力類比解釋小橢圓形孔口及半橢圓形槽口之效應。如小橢圓孔主軸之一為 a 徑向另一主軸為 b ，在孔邊 a 軸末端上增加之比率為 $(1+a/b) : 1$ ，因此最大應力視比例 a/b 之值而定，洞口橢圓之長軸為徑向時其對應力之影響大於其為沿周界時。此解釋徑向裂縫對軸之強度大為降低之原因。表面上之半橢圓槽溝，平行於軸線，對應力分布有類似效應。

由流體動力類比知斷面上尖角受扭轉時剪應力為零，而在凹角應力在理論上變為無窮大，亦即雖最小之扭矩即可使材料屈服或裂損。如軸上有一矩形鍵槽，鍵槽底處凹角上必有高度應力集中。此等高應力可由填角使之減低（註）。

第一一五節 空心軸之扭轉

前此所討論之扭轉軸均限斷面為單條曲線所包圍者。現討論空心軸其斷面具兩個或更多邊界。此類問題最簡單者為一空心軸內周界與

（註）鍵槽處應力曾用皂膜法探討，見 A. A. Griffith and G. I. Taylor, *Tech. Rept., Natl. Advisory Comm. Aeronaut.*, vol. 3, p. 938, 1917-1918. 設計公式及圖表見 R. E. Peterson, "Stress Concentration Design Factors," John Wiley & Sons; 另 M. Nisida and M. Hondo, *Proc. Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, vol. 2, pp. 129-132, 1959.

實軸應力線之一重合，其曲線與空心軸之外邊界相同。

例如，取一橢圓斷面（圖153）。實軸之應力函數為

$$\phi = \frac{a^2 b^2 F}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (a)$$

曲線

$$\frac{x^2}{(ak)^2} + \frac{y^2}{(bk)^2} = 1 \quad (b)$$

為一橢圓與斷面邊界幾何相似。沿此橢圓應力函數（a）保持常數，故當 k 小於一時，此橢圓為橢圓軸之應力線。在此線上任一點之剪應力其方向沿此線之切線。設想一由此線所構成之柱形面，其軸線平行於橢圓軸線。如此則由上述有關應力方向，可知將無應力經過此柱形面。吾人可設想面內材料經被移去，而對外部應力分布並無改變。因此，應力函數（a）亦可應用於空心軸。

對已知扭角 θ 空心軸內之應力與對應實軸相同，但轉矩將較小，其量即為實心軸對應於孔洞部分所負荷者。由方程式（156）知此一部分與總轉矩之比為 $k^4 : 1$ 。因此，對空心軸，（156）式變為

$$\theta = \frac{M_t}{1 - k^4} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G}$$

應力函數（a）變為

$$\phi = - \frac{M_t}{\pi ab(1 - k^4)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

最大應力公式則為

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi ab^3} \frac{1}{1 - k^4}$$

用薄膜類比時，薄膜中間部分，相當於軸之洞孔（圖171），必須以水平板 CD 替代。吾人知均勻分布於 CFD 部分之壓力與均勻分布於 BD 板上相同壓力為靜力相當而薄膜對此板邊緣作用之拉力 S 與板

上均勻壓力平衡。故相同之薄膜試驗此時仍可應用，因以板 CD 代替薄膜 CFD 部分並未影響其餘部分之方位及平衡條件。

現考慮較普遍例，即孔口邊緣並非實軸應力線。由扭轉一般原理（閱第 104 節）吾人知在每一邊界上應力函數須為常數，但此等常數不能任意選擇，前討論二維問題多重連結邊界時，曾證示必須求助於

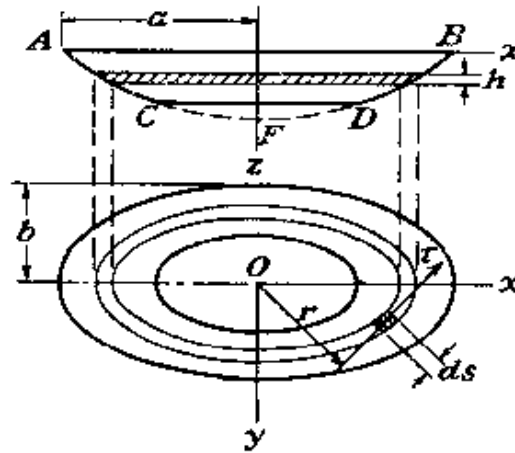


圖 171

位移算式，而積分常數應選擇使位移為單值。對空心軸扭轉問題，處理程序與此類比。沿各界線上應力函數之各常數值必須如此決定使位移為單值。決定各常數足夠數目之方程式即可求得。

由第104節方程式 (b) 及 (d) 得

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta y \right) \quad \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta x \right) \quad (c)$$

現沿每一邊界計算積分

$$\int \tau \, ds = 2G\theta A \quad (d)$$

用 (c) 式並將總應力分解為其分量，得

$$\begin{aligned} \int \tau \, ds &= \int \left(\tau_{xz} \frac{dx}{ds} + \tau_{yz} \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= G \int \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) - \theta G \int (y dx - x dy) \end{aligned} \quad (174)$$

第一個積分須爲零值，因積分係沿封閉曲線，而 w 爲一單值函數。因此，

$$\int \tau ds = \theta G \int (x dy - y dx)$$

右方積分爲所包含面積之兩倍，故

$$\int \tau ds = 2G\theta A \quad (175)$$

吾人求沿各洞口邊界應力函數常數時必須對每邊界均適應 (175) 式。

對斷面內所繪任一封閉曲線，(174) 式內第一及第二項代表剪應力切線分量沿此曲線之線積分，與流體動力學中環流類比，可稱爲剪應力環流。故 (175) 式仍可應用並可稱爲剪應力環流定理。

薄膜類比中 (175) 式之意義曾在第178頁予以討論。此式指薄膜中每一板之水平面，如 CD 板 (圖171)，必須取使板上之豎向與薄膜施於板邊拉力總和之豎向分力等值反向。如洞口邊界均與對應實軸應力線重合，則以上條件足夠保證板之平衡，一般情況下此條件即不足夠，欲使板維持水平方向之平衡，特種導向裝置變爲必需。此使空心軸皂膜試驗變爲較繁複。

爲避免此種困難可採以下步驟 (註)。在板上作一洞口相當於軸之外邊界。各內部邊界，對應於各洞口，均裝置於豎向滑動柱上使可易於調整高度，任取此等高度並拉薄膜於各邊界上，吾人得一曲面適應方程式 (150) 及邊界條件 (152)，但 (175) 式通常不能適應，故薄膜不代表空心軸之應力分布。重複此項試驗，次數與邊界數目相同，每次對各內部邊界高度作另一調整並量出薄膜高度，吾人得足夠之數據以決定內部邊界高度之正確值，最後可拉皂膜於所需之形式。此可證明如下：如 i 爲邊界數目， $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i$ 爲 i 次不同調整邊界高度後之膜面，則函數

$$\phi = m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2 + \dots + m_i \phi_i \quad (e)$$

內 m_1, m_2, \dots, m_i 爲數值因數，亦爲 (150) 式之一解，倘

$$m_1 + m_2 + \dots + m_i = 1$$

(註) Griffith and Taylor, *loc. cit.*, p. 938.

因知剪應力等於薄膜斜率，代 (e) 式於 (150) 式中，可得 i 個下列方程式

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 2G\theta A_i$$

由此可得 i 個因子 m_1, m_2, \dots, m_i 以 θ 為函數。如此則正確之應力函數可得自 (e) 式 (註)。此法曾由格雷弗斯及泰勒氏 (Griffith and Taylor) 以決定有鍵槽之空心軸應力。彼等證明如此可使最高應力大為降低，而軸之強度、軸之偏心洞口增加。

帶一個或多數洞孔軸之轉矩可用兩倍於薄膜、平板與 xy 面間容積求得之，為證此吾人計算兩應力線間單元環上應力分布所生之轉矩，如圖 171，用 δ 代表環之變化寬度並取圖中陰影部分之單元，此單元之剪應力為 $\tau \delta ds$ ，其力矩對 O 為 $r\tau \delta ds$ ，如此則單元環上之轉矩為

$$dM_t = \int r\tau \delta ds$$

積分係延伸於環之整個長度。用 A 代表環所包圍之面積，因知 τ 為斜率，故 $\tau \delta$ 為兩鄰接等高線之水平差 h ，由 (f) 式

$$dM_t = 2hA \quad (g)$$

亦即對應於單元環之轉矩為圖中陰影部分體積之兩倍。總轉矩為此等體積總和所代表，亦即 AB, AC, BD 及 CD 之體積之兩倍。如有多數洞孔，此結論可類此應用。

第一一六節 薄管之扭轉

用薄膜類類比對薄壁管之扭轉可立得一近似解。設 AB 及 CD (圖 172) 代表邊界外內兩水平， AC 及 BD 拉於此等邊界上薄膜之斷面。在薄管壁例中，吾人可忽計經此厚度薄膜斜率變化，並設 AC 及 BD 為直線。此相當於設剪應力均勻分布於管壁厚度上。故如用 h 代表二邊界之水平差， δ 為管壁可變化之厚度，任一點上應力，由薄膜斜率代表，為

(註) 格雷弗斯及泰勒氏由其實驗知用吾壓力較常壓力為適宜。對因子 m_1, m_2, \dots 之計算之詳細討論見其論文中。

$$\tau = \frac{h}{\delta} \quad (a)$$

此對管之厚度為反比，故管壁最薄處剪應力最大。

為建立剪應力與轉矩 M_t 間之關係，吾人仍使用薄膜類比，並由 $ACDB$ 之體積以計算轉矩。故

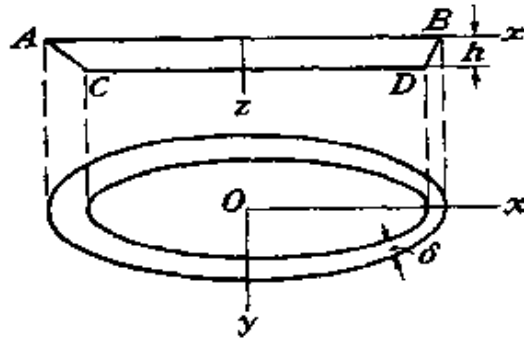


圖 172

$$M_t = 2Ah\tau = 2A\delta\tau \quad (b)$$

內 A 為管外邊界與內邊界所圍面積之平均值。由 (b) 式吾人得一簡單公式以計算剪應力：

$$\tau = \frac{M_t}{2A\delta} \quad (176)$$

對求扭角 θ ，用方程式 (160)。則

$$\tau ds = \frac{M_t}{2A} \int \frac{ds}{\delta} = 2G\theta A \quad (c)$$

因此 (註)

$$\theta = \frac{M_t}{4A^2G} \int \frac{ds}{\delta} \quad (177)$$

如管之厚度一致， δ 為常數，(177) 式變為

$$\theta = \frac{M_t s}{4A^2G\delta} \quad (178)$$

(註) 薄壁管方程式 (176) 及 (177) 係 R. Bredt 所得，見 *VDI*, vol. 40, p. 815, 1896.

內 s 為管之環斷面中線長。

如管中有凹角時，如圖 173 所示，則相當之應力集中出現於轉角處。最大應力較 (176) 式所得者為高並視凹角填角半徑 a 而定。計

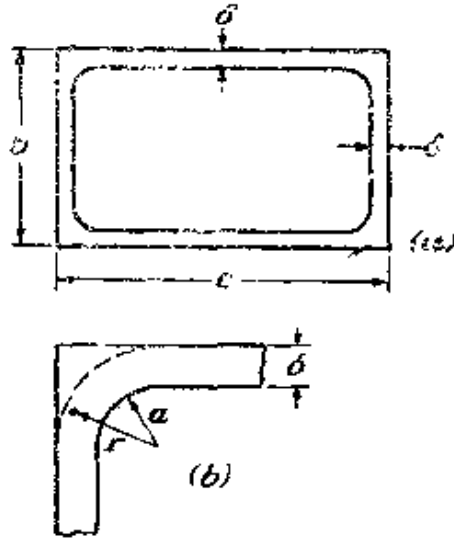


圖 173

算此最大應力時，吾人將用薄膜類比如對軋製斷面凹角所用方法（見第112節）。在凹角處薄膜方程式可取為

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} = -\frac{q}{S}$$

用 $2G\theta$ 代替 q/S 並用 $\tau = -dz/dr$ (圖 172)，得

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = 2G\theta \quad (d)$$

設一管之厚度為常數 δ ，用 τ_0 代表由 (176) 式算出距轉角遠處點上應力，由 (c) 式得

$$2G\theta = \frac{\tau_0 S}{A}$$

代入 (d) 式得

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = \frac{\tau_0 S}{A} \quad (e)$$

此式之通解爲

$$\tau = \frac{C}{r} + \frac{\tau_0 s r}{2A} \quad (f)$$

設斷面轉角處有半徑 a 之填角，如圖所示，積分常數 C 可由下式決定

$$\int_a^{a+\delta} \tau dr = \tau_0 \delta \quad (g)$$

此係由流體動力類比所得（見第 114 節），亦即：如一理想流體在一渠中環流，渠一形式管之環斷面相同，經渠每一斷面之流量爲一常數。代 (f) 式於 (g) 式，積分後得

$$C = \tau_0 \delta \frac{1 - (s/4A)(2a + \delta)}{\log_e(1 + \delta/a)}$$

由 (f) 式知

$$\tau = \frac{\tau_0 \delta}{r} \frac{1 - (s/4A)(2a + \delta)}{\log_e(1 + \delta/a)} + \frac{\tau_0 s r}{2A} \quad (h)$$

對薄壁管，比例 $s(2a + \delta)/A$ ， $s r/A$ ，均爲小數目，(h) 式可寫爲

$$\tau = \frac{\tau_0 \delta / r}{\log_e(1 + \delta/a)} \quad (i)$$

代 $r = a$ 即得凹角處應力。結果示於圖 174。另一曲線（註）（圖 174 之 A 處）係由微差法所得，未設轉角處薄膜爲一旋轉面。此驗證方程式 (i) 之準確性——對 a/δ 達 1/4 之小填角。對較大之填角言，(i) 式所得值嫌過高。

現考慮多於兩個邊界管狀斷面。例如，取圖 175 所示之例，並設管壁厚度甚小。由薄膜類比，管壁剪應力爲

$$\tau_1 = \frac{h_1}{\delta_1} \quad \tau_2 = \frac{h_2}{\delta_2} \quad \tau_3 = \frac{h_1 - h_2}{\delta_3} = \frac{\tau_1 \delta_1 - \tau_2 \delta_2}{\delta_3} \quad (j)$$

（註）Huth, op. cit.

內 h_1 及 h_2 為 CD 及 EF 內邊界水平 (註)。

轉矩之值，由體積 $ACDEFB$ 決定，為

$$M_t = 2(A_1 h_1 + A_2 h_2) = 2A_1 \delta_1 \tau_1 + 2A_2 \delta_2 \tau_2 \quad (h)$$

內 A_1 及 A_2 為圖中所示陰影部分面積。

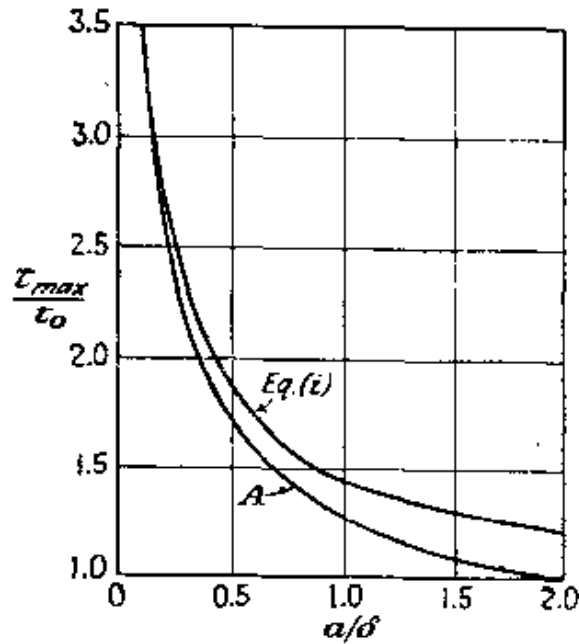


圖 174

解此問題其他方程式可用 (160) 式於圖中所示虛線之封閉曲線求得。設厚度 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 為常數並以 s_1, s_2, s_3 代表對應虛線長度，由圖 175 得

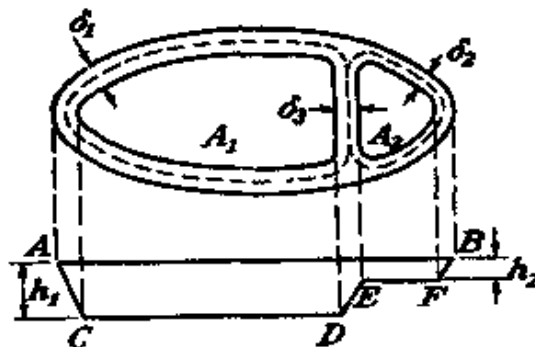


圖 175

(註) 設板保持水平 (見第344頁)。

$$\begin{aligned}\tau_1 s_1 + \tau_3 s_3 &= 2G\theta A_1 \\ \tau_2 s_2 - \tau_3 s_3 &= 2G\theta A_2\end{aligned}\quad (1)$$

用 (j) 最後一式及 (k) 與 (1)，吾人得應力 τ_1, τ_2, τ_3 爲轉矩之函數如下：

$$\tau_1 = \frac{M_t [\delta_3 s_2 A_1 + \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)]}{2[\delta_1 \delta_3 s_3 A_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 A_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_2 (A_1 + A_2)^2]} \quad (m)$$

$$\tau_2 = \frac{M_t [\delta_3 s_1 A_2 + \delta_1 s_3 (A_1 + A_2)]}{2[\delta_1 \delta_3 s_2 A_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 A_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]} \quad (n)$$

$$\tau_3 = \frac{M_t (\delta_1 s_2 A_1 - \delta_2 s_1 A_2)}{2[\delta_1 \delta_3 s_2 A_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 A_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]} \quad (o)$$

所討論斷面例中， $s_1 = s_2, \delta_1 = \delta_2, A_1 = A_2, \tau_3 = 0$ 。此時轉矩全由外壁負荷，管之腹壁不受應力 (註)。

求同 (175) 所示斷面扭角時，代應力值於 (1) 式之一。則 θ 可由轉矩 M_t 之函數代表之。

第一一七節 螺旋脫節

在以上兩節中，吾人已知如問題之解正確代表一扭轉情況，則 w 必須爲一單值函數。重新檢討方程式 (149)，(150)，及 (151) 及邊界條件 (152)，迅即察覺可能有一對應於 $\theta = 0$ 之應力情況。應力函數係適應拉普拉司方程式，而在斷面每一邊界上爲常數。此時吾人用 w 替代第304頁所用之 $\phi\psi(x, y)$ 。如此則第305頁方程式 (f) 換爲

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G \frac{\partial w}{\partial x} \quad -\frac{\partial \phi}{\partial x} = G \frac{\partial w}{\partial y} \quad (a)$$

此爲對函數 Gw 及 ϕ 之庫希-黎曼方程式 (開第174頁)。故 $Gw + i\phi$ 爲 $x + iy$ 之解析函數。吾人寫

$$Gw + i\phi = f(x + iy) \quad (b)$$

(註) 經腹板厚度對應於薄膜斜率變更之微應力忽計。

選定 f 後，即為固定情況，內 w 為僅有之非零位移分量。

現設 r 及 ψ 代表斷面內極坐標。取

$$f(x+iy) = -iA \log(x+iy) = A\psi - iA \log r \quad (c)$$

內 A 為實常數，在塑性變形脫節理論中特具重要性（見第 34 節）由 (b) 式，現得

$$Gw = A\psi \quad \phi = -A \log r \quad (d)$$

對應之剪應力為周向者，其極坐標分量為

$$\tau_{z\psi} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r} \quad \tau_{zr} = 0 \quad (e)$$

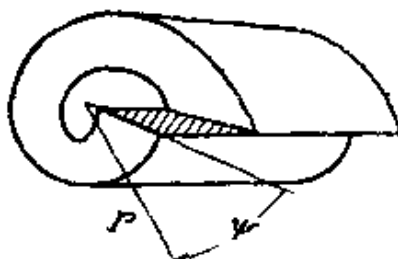


圖 176

任何柱體邊界面 $r = a$ 無荷力作用。但位移 w 並非連續，吾人可將解施於圖 176 所示空心圓柱 $a < r < b$ ，柱有一軸向割裂。一面對另一面沿軸向移動一相對位移

$$w(r, 2\pi) - w(r, 0) = \frac{2\pi A}{G}$$

得自 (d) 第一式。應力 (e) 可視為此相對位移與末端荷載所致。此荷載成一轉矩

$$2\pi \int_a^b \tau_{z\psi} r^2 dr = \pi(b^2 - a^2)A$$

重疊一純扭轉相當於引進等值反向轉矩（第 101 節），其中

$$\tau_{z\psi} = Br \quad \tau_{zr} = 0 \quad B = \frac{-2A}{a^2 + b^2}$$

及 $w = 0$ 。最後則應力為

$$\tau_{z\psi} = A \left(\frac{1}{r} - \frac{2r}{a^2 + b^2} \right) \quad (g)$$

此可視為因相對位移(f)所致，末端轉矩為零。但在末端上，當然，仍有剪應力分布，如(g)式所代表者。因其總和為零，依聖維南原理，移去時僅有局部效應。

此最後狀態，應用於材料學中，稱為螺旋脫節(註1)。割裂之空心柱體有六種不同型式之脫節，應變經裂口處均連續。螺旋脫節、第34節之邊緣脫節及平行孔隙脫節屬於同一割裂，及第31節(圖45)之角狀空隙脫節，共為六種之四(註2)。

第一一八節 一斷面保持平面桿之扭轉

討論扭轉問題時，通常均假設轉矩係由剪應力分布於桿端所造成。此應力分布係一定形式，適應方程式(150)及邊界條件(152)。如在端面上應力分布並非如此，應力將為局部不規律，方程式(150)及(152)之解僅可用於距末端遠處之區域內(註3)。

如扭轉桿之某一斷面受有拘束不能翹曲時類此之不規律亦將出現。在工程上

(註1) 閱 A. H. Cottrell, "Dislocations and Plastic Flow in Crystals," Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1953.

(註2) 閱第91頁註1參考資料，對空心錐及空心球體之螺旋脫節，閱 J. N. Goodier and J. C. Wilhoit, *Quart. Appl. Math.*, vol. 13, pp. 263-269, 1955.

(註3) 圓柱體兩端不規律曾由 F. Purser 討論，見 *Proc. Roy. Irish Acad.*, Dublin, ser. A, vol. 26, p. 54, 1906. 另閱 K. Wolf, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien*, vol. 125, p. 1149, 1916; A. Timpe, *Math. Ann.*, vol. 71, p. 480, 1912; G. Horvay and J. A. Mirabel, *J. Appl. Mech.*, vol. 25, pp. 561-570, 1958; H. D. Conway and J. R. Moynihan, *ibid.*, vol. 31, pp. 346-348, 1964; M. Tanimura, *Tech. Repts. Osaka Univ.*, vol. 12, no. 497, pp. 93-104, 1962.

有時遭遇此種問題（註1）。圖 177 示一簡單之例。由對稱條件，知扭轉時桿之中斷面將保持為平面。因此，中斷面附近應力分布必與前對矩形斷面所得者（見第 109 節）不同。討論此等應力時，先取極窄矩形斷面例（註2），即 b 對 a 為一大數。如斷面係自由翹曲，由第108節，應力為

$$\tau_{xz} = -2G\theta y \quad \tau_{yz} = 0 \tag{a}$$

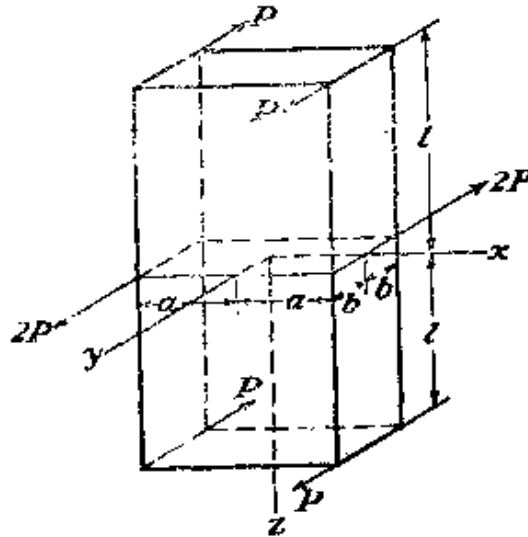


圖 177

對應之位移，由 (104) 式之 (a)，(b) 及 (d)，為

$$u = -\theta yz \quad v = \theta xz \quad w = -\theta xy \tag{b}$$

為阻止斷面翹曲，正交壓力 σ_z 必須施於斷面上。吾人設 σ_z 與 w 成正比，其值隨與中斷面距離 z 增加而逐漸降低，此等假設可取

$$\sigma_z = -mE\theta e^{-mz} xy \tag{c}$$

予以適應。內 m 為一待因子。因子 e^{-mz} 使 σ_z 隨 z 增高而逐漸降低，視 m 值在相當距離後可被忽計。

其餘應力分量須適當平衡微分方程式 (123) 及邊界條件。此等需要可取以下應力算式予以適應

(註1) 見 S. Timoshenko, *Z. Math. Physik*, vol. 58, p. 361, 1910. 另閱 C. Weber, *Z. Angew. Math.*, vol. 6, p. 85, 1926.

(註2) 見 S. Timoshenko, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 20, p. 389, 1921.

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_y = 0 \\
\tau_{xy} &= -1/8Em^2\theta e^{-mz}(a^2-x^2)(b^2-y^2) \\
\tau_{xz} &= 1/4Em^2\theta e^{-mz}(a^2-x^2)y - 2G\theta y \\
\tau_{yz} &= 1/4Em^2\theta e^{-mz}(b^2-y^2)x \quad (d)
\end{aligned}$$

對大值之 z 此應力分布趨於應力 (a)。在邊界 $x = \pm a$ 及 $y = \pm b$ 應力分量 τ_{xz} 爲零； τ_{xz} 及 τ_{yz} 各對 $x = \pm a$ 及 $y = \pm b$ 時爲零。因此各邊界條件均被適應而桿之側面上不受作用力。

爲求因子 m ，用桿內之應變能並計算使應變爲最小之 m 值。用方程式(131)，得

$$V = \frac{1}{2G} \int_{-l}^l \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + 2(1+\nu)\sigma_z^2 \right] dx dy dz$$

將 (d) 式代入，並知對一長桿在足夠精確下可置

$$\int_0^l e^{-mz} dz = \frac{1}{m}$$

應變能算式爲

$$V = \frac{1}{9} E\theta^2 a^3 b^3 \left\{ -3m + (1+\nu) \left[\frac{2}{25} a^2 b^2 m^5 + \frac{1}{5} (a^2 + b^2) m^3 + \frac{12}{(1+\nu)^2} \frac{l}{a^2} \right] \right\} \quad (e)$$

由最小應變能條件得以下方程式以求 m

$$(1+\nu) \left[\frac{2}{5} a^2 b^2 m^4 + \frac{3}{5} (a^2 + b^2) m^2 \right] = 3$$

對窄矩形斷面，此值接近於

$$m^2 = \frac{5}{(1+\nu)a^2} \quad (f)$$

代此 m 值於 (d) 及 (c)，吾人得桿中斷面保持平面之應力分布。

對扭角 ψ 之計算，吾人使位能 (e) 等於 M_t 所作之功，

$$\frac{M_t \psi}{2} = V$$

由此得扭角爲

$$\psi = \frac{3M_t}{16Gab^3} \left[l - \frac{\sqrt{5(1+\nu)}}{6} a \right] \quad (g)$$

將此結果與 (163) 式較，所得結果為阻止中斷面翹曲時增加桿之扭轉剛度。應力分布局部不規律對 ψ 值之效應與將 l 長減少

$$a \frac{\sqrt{5(1+\nu)}}{6}$$

相同。取 $\nu=0.30$ ， l 減低量為 $0.425a$ 。因此知中斷面拘束對扭角之影響，如 a 對 l 為小值時，甚為微小。

橢圓桿之扭轉可用類比方法予以討論（註1）。受較大影響者為 I 斷面桿中點斷面受拘束時之扭轉，計算扭轉之近似方法，可由考慮扭轉時翼緣之撓曲求得（註2）。

第一一九節 直徑變化圓軸之扭轉

現取旋轉體軸受施於兩端力偶之扭轉（圖178）。軸之中線取為 z 軸並用極坐標 r 及 θ 表示斷面上單元位置。此時應力分量符號為 σ_r ， σ_θ ， σ_z ， τ_{rz} ， $\tau_{r\theta}$ ， $\tau_{\theta z}$ 。位移之徑向及切線方向之分量用 u 及 v 代表， z 向用 w 。如此，用前對二維問題所得公式（見第30節），吾人得以下應變分量公式：

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} & \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} & \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (179)$$

寫出單元平衡方程式（圖178），如前對二維問題所為（見第27節），

（註1）見 A. Föppl, *Sitzber. Bayer. Akad. Wiss., Math-Phys. Klasse*, München, 1920, p. 261.

（註2）見 S. Timoshenko, *Z. Math. Physik.*, vol. 58, p. 361, 1910; or "Strength of Materials," vol. 2, p. 260, 1956. 另參考 W. Flügge (ed.), "Handbook of Engineering Mechanics," McGraw-Hill Book Company, New York, 第4部分，扭轉節。

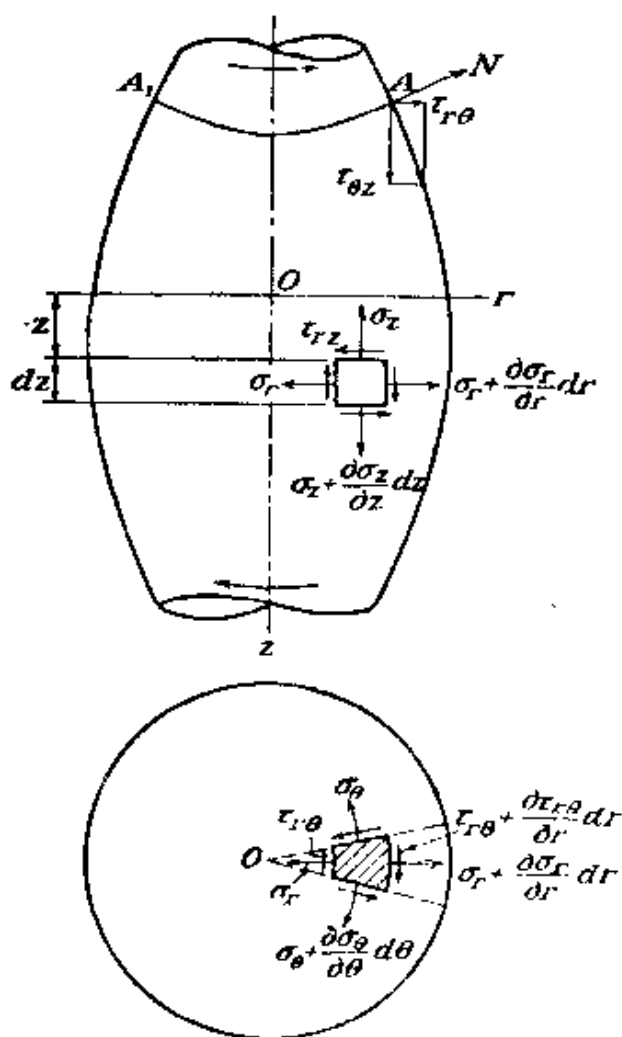


圖 178

並設無體積力，吾人得以下各微分方程式（註1）：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \sigma_r - \sigma_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (180)$$

施用此等方程式於扭轉問題時，吾人採用半反法（閱第 303 頁）並設 u 及 w 為零，亦即扭轉時各點僅沿切線方向移動。此項假設與常

（註1）此等方程式係 Lamé 及 Clapeyron 所得，見 *Crelle's J.*, vol. 7, 1831

數直徑圓軸所不同者為切線方向位移不再與其對軸中線距離成正比，亦即斷面中各半徑扭轉時變為曲線。以下討論中將證示以此為根據所得之解，適應所有彈性方程式，故代表問題之正確解。

在 (179) 式中代 $u = w = 0$ ，並由對稱條件知位移 v 與 θ 角無關，吾人得

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta = \epsilon_z = \gamma_{rz} = 0 \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

因此在所有應力分量中，僅 $\tau_{r\theta}$ 及 $\tau_{\theta z}$ 不為零。方程式 (180) 中前兩式恆適應，第三式變為

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (b)$$

此方程式可寫為

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \tau_{\theta z}) = 0 \quad (c)$$

此可用 r 及 z 之應力函數予以適應，如

$$r^2 \tau_{r\theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad r^2 \tau_{\theta z} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (d)$$

為適應配合條件，必須顧及 $\tau_{r\theta}$ 及 $\tau_{\theta z}$ 為位移 v 之函數之事實。由方程式 (a) 及 (d) 得

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta} = G\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) = Gr \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \tau_{\theta z} &= G\gamma_{\theta z} = G\frac{\partial v}{\partial z} = Gr \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{aligned} \quad (e)$$

由此等方程式知

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0 \quad (f)$$

或
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (g)$$

現考慮對函數 ϕ 之邊界條件。由軸側面無外力作用之邊界條件，吾人知斷面邊界 A 點上 (圖 178) 剪應力和必須沿邊界切線方向而對法線 N 上之投影必為零。因此

$$\tau_{r\theta} \frac{ds}{dz} - \tau_{\theta z} \frac{dr}{ds} = 0$$

內 ds 為沿邊界之線單元。將 (d) 式代入，得

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{ds} = 0 \quad (h)$$

因此知 ϕ 沿軸向斷面邊界上值為常數。

方程式 (g) 連同邊界條件 (h) 可完全決定應力函數 ϕ ，並由其計算各應力分量適應平衡方程式，配合條件，及軸側面上條件 (註)。

取一斷面計算 $\tau_{\theta z}$ 對軸中心力矩可得轉矩值。故

$$M_t = \int_0^a 2\pi r^2 \tau_{\theta z} dr = 2\pi \int_0^a \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = 2\pi [\phi]_0^a \quad (i)$$

內 a 為斷面之外半徑。如吾人知應力函數在外邊界上及斷面中心處值，轉矩立即算出。

討論軸扭轉所發生之位移時，設用 $\psi = \frac{v}{r}$ 代表半徑為 r 斷面上之環單元之轉角，此環可視為軸劃分為多數薄管狀單元之一，如此則 ψ 為一管之扭角。由斷面上各半徑變為曲線之事實，故 ψ 隨 r 變化，各

(註) 此問題之一般解係 J. H. Michell 所得，見 *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, p. 141, 1899. 另參考 A. Föppl, *Sitzber. Bayer. Akad. Wiss.*, München, vol. 35, pp. 249 and 504, 1905. H. Neuber 所著 "Kerbspannungslehre" Springer-Verlag OHG, Berlin, 1958, 書中曾用另一方法解旋轉雙曲線體及橢圓旋轉體空洞問題。有關文獻及評論見 T. Pöschl, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 2, p. 137, 1922, 及 T. J. Higgins, *Exp. Stress Anal.*, vol. 3, no. 1, p. 94, 1945.

單元管之扭角對同一斷面並不相等。方程式 (e) 現可寫為

$$Gr^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad Gr^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

由此得

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (j)$$

此方程式之解 (註) 為以 r 及 z 為函數之扭角。如取

$$\psi = \text{常數} \quad (k)$$

為此式之解，吾人得所有各點扭角均相同之曲面。圖178中， AA_1 代表此一曲面與軸之交線。由對稱條件知 (k) 式之曲面為旋轉面而 AA_1 為經 A 點曲面之經線。扭轉時此等面對 z 軸轉動而無任何畸變，如圓柱軸之平面斷面扭轉時情況完全相同。因此在經線 AA_1 任一點上，垂直面內總應變為一純剪應變，軸向面內對應之剪應力方向垂直於經線。在邊界上此應力切於邊界而經線垂直於軸向面之邊界。如自 $\psi = \text{常數}$ 之面移向鄰近面，沿軸向面邊界 ψ 之變更率為 $d\psi/ds$ ，與圓斷面柱軸情況相同 (見第101節) 吾人得

$$\tau = Gr \frac{d\psi}{ds} \quad (l)$$

$$\text{此處} \quad \tau = \tau_{r\theta} \frac{dr}{ds} + \tau_{\theta z} \frac{dz}{ds}$$

為邊界上剪應力和。此剪應力值可簡易求出如由實驗求得 $d\psi/ds$ 值

(註) 圓柱坐標 r, z 解係 H. Reissner 及 G. J. Wennagel 所得，見 J. *Appl. Mech.*, vol. 17, pp. 275-282, 1950. 球面坐標乘積解見 H. Poritsky, *Proc. Symp. Appl. Math., Am. Math. Soc.*, vol. 3, pp. 163-186, 1951; 及 J. C. Wilhoit, Jr., *Quart. Appl. Math.*, vol. 11, pp. 499-501, 1954.

(註1)。

現取一錐體軸為例 (註2) (圖179)。此時比例

$$\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

沿軸向斷面邊界為常數等於 $\cos \alpha$ 。任何此比例之函數將適應邊界條件 (h)。為使亦能適應 (g) 式，吾人取

$$\phi = c \left\{ \frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}} - \frac{1}{3} \left[\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}} \right]^3 \right\} \quad (m)$$

內 c 為一常數，微分後得

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \frac{crz}{(r^2+z^2)^{5/2}} \quad (n)$$



圖 179

常數 c 可由 (i) 式求出。代 (m) 式此此式，得

$$c = - \frac{M_t}{2\pi(2/3 - \cos \alpha + 1/3 \cos^3 \alpha)}$$

計算扭角時吾人用 (e) 式，由此得 ψ 之算式，適應 (j) 式及邊界

(註1) 此種試驗由 R. Sonntag 作過，見 *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 9, p. 1, 1929.

(註2) 閱 Föppl, *loc. cit.*, n. 1, 第358頁。

條件，為

$$\psi = \frac{c}{3G(r^2+z^2)^{3/2}} \quad (o)$$

故知等扭角面為以原點為中心之球面。

橢圓體、雙曲線體、或拋物線體等旋轉體軸之扭角均可以類比方式討論（註1）。

實際所遭遇之問題性質較為複雜。軸之直徑通常突然改變，如圖(180a)所示。此類問題最初係由費泊爾（A. Föppl）予以研究，郎治（C. Runge）對此等問題建議一近似解（註2），並證明在如 m 及 n 點上，有相當之應力集中，而兩不同直徑 d 及 D 軸（圖180a）之最大應力值視填角半徑 a 及直徑比例 s 與比例 d/D 而定。

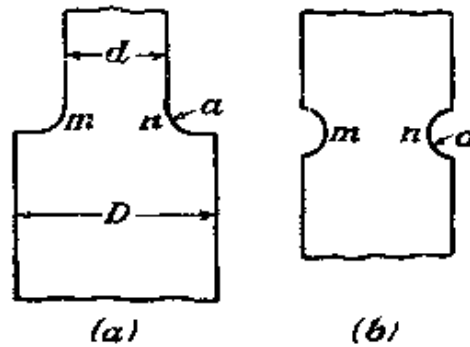


圖 180

（註1）參閱以下論文：E. Melan, *Blätter*, Prag, 1920; A. N. Dinnik, *Bull. Don Polytech. Inst., Novotcherkask*, 1912 W. Arndt, "Die Torsion von Wellen mit achsensymmetrischen Bohrungen und Hohlräumen," dissertation, Göttingen, 1916; A. Timpe, *Math. Ann.*, 1911, p. 480. 其他參考資料見 Higgins, *loc. cit.*, n. 1, p. 344. 設計曲線見 R. E. Peterson, *op. cit.* 圖 177a 軸中 m, n 為銳角，及 177b 軸有矩形槽鍵見 M. Tanimura, *Tech. Repts. Osaka Univ.*, vol. 12, no. 498, pp. 105-122, 1962.

（註2）見 F. A. Willers, *Z. Math. Physik*, vol. 55, p. 225, 1907. 另一近似解見 L. Föppl, *Sitzber. Bayer. Akad. Wiss., München*, vol. 51, p. 61, 1921, 及 R. Sonntag, *Z. Angew. Math. loc. cit.*

在小半徑半圓形槽溝例中，溝底處最大應力 (圖180b) 為無溝圓柱體軸表面處應力兩倍 (註1)。

討論扭轉圓軸填角及槽溝應力集中時，一電流類比法經證為可用。電流在變化厚度之薄均質板中流動一般方程式 (註2)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad (p)$$

內 h 為變化厚度， ψ 為電位函數。

設板之邊界與軸之軸向斷面相同 (圖181)， x 及 y 軸與 r 及 z 重合，而板之厚度與徑向距 r 之立方成正比，故 $h = \alpha r^3$ 。如此則 (p) 式變為

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0$$

此與 (j) 式相同，故板中同位線之方程式與變化直徑軸同扭角線方程式相同。

設板之兩端，對應於軸之兩端，保持某一位差使電流沿 z 軸流動，等位線垂直板之側邊，亦即吾人有與常扭角線相同之邊界條件。

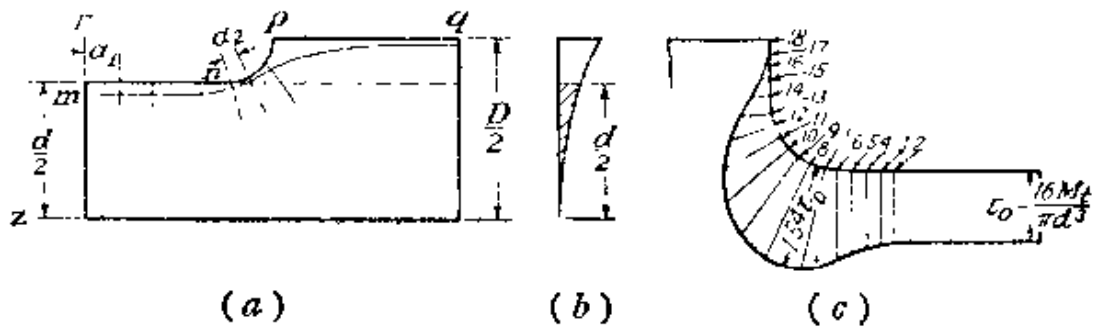


圖 181

(註1) 對大槽溝，見 R. E. Peterson 書，*op. cit.*；另 Flügge, *op. cit.*, p. 26-36.

(註2) 見 L. S. Jacobsen, *Trans. ASME*, vol. 47, p. 619, 1925, 及 T. J. Higgins, *loc. cit.*, n. 1, 第358頁。試驗結果比較，見 A. Weigand, *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 20, p. 207, 1943, 英譯見 *NACA Tech. Mem. 1179*, Sept., 1947.

如微分方程式與邊界條件對此兩種線均相同，則兩種線完全相同。因此，探討板內位之分布，有關扭轉桿內應力分布情況即可獲得。

最大應力係在軸之表面處，其值可由(1)式求得。由此方程式，使用電流類比，知應力與沿板邊位降成正比。

對一長 24 吋較大端 6 吋寬最大厚度 1 吋之鋼模曾作實際之度量 (圖181)。沿 $mnpq$ 邊緣之位降用精確電流計探測，兩端鉤孔連結於 2mm 距離之兩尖針上。使針頭與板接觸，針頭間距離之位降示於電流計上，沿填角移動針頭，可尋出位梯度為最大之位置並量出其值，此最大位梯度值與遠處點 m (圖181a) 位梯度比例提供應力集中因子

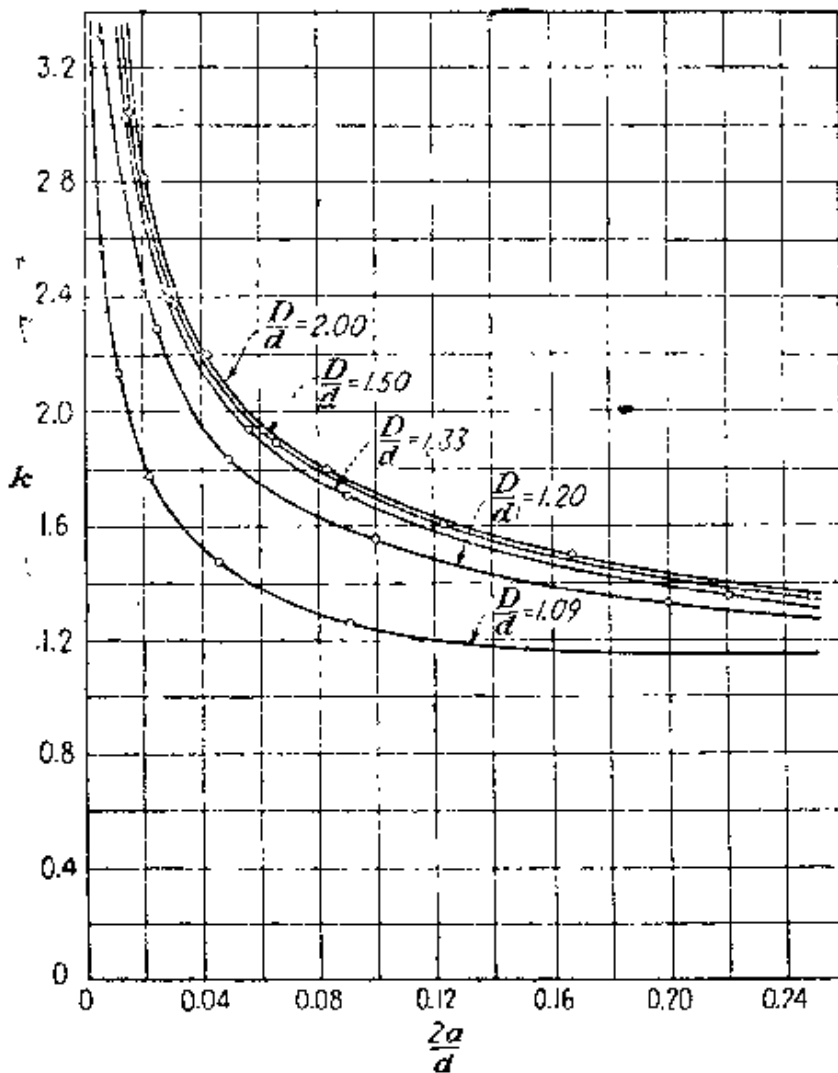


圖 182

k^* 於方程式

$$\tau_{\max} = k \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

此一試驗結果由圖181c代表，其中每點上量得之位降由此點上法線長表示。由圖知應力集中因子為 1.54。各式其他比例軸之應力集中因數見圖 182，內橫坐標代表填角半徑與較小軸半徑比例 $2a/d$ ，豎坐標為對各 D/d 比例之應力集中因子 k 。

習 題

1. 由整個桿之平衡證當除 τ_{xz} 及 τ_{yz} 外所有應力分量均為零時，荷力僅含扭轉力偶〔見第104節 (h) 式〕。
2. 證 $\phi = A(r^2 - a^2)$ 為實圓軸及空圓軸扭轉問題之解。求 A 值，以 $G\theta$ 表示之。用方程式 (149) 及 (153) 求實軸之最大剪應力及扭轉剛性，以 M_t 表示之，並驗所得結果與材料力學教課書中所載者一致。
3. 證對同一扭角，橢圓斷面較其內接圓（半徑等於橢圓短軸 b ）有較大之剪應力，對同一允許應力何者可負較大之轉矩？
4. 用第106節 (g) 式及 (153) 式計算等邊三角形之扭轉剛度，並由此驗證第106節 (l) 式。
5. 用以直角坐標代表之第106節應力函數 (m)，求 $-\tau_{yz}$ 沿圖157中線 Ax 之算式，並驗證沿此線最大值為 (p) 式之值。
6. 求圖 157 所示斷面之扭轉剛性，是否與小槽溝時整個圓斷面之扭轉剛性有顯著之分別？
7. 證對應於108節拋物線形式之薄膜其應力函數 ϕ 為

$$\phi = -G\theta \left(x^2 - \frac{c^2}{4} \right)$$

在一窄三角形如圖 183 所示之斷面中，設任一高度 y 處薄膜為拋物線式，證如三角形高為 b 時扭矩之近似值為

* 半徑 r 之小變化〔方程式 (1)〕此時可忽計。

$$M_t = 1/12 G \theta b c_0^3$$



圖 183

8. 用習題 7 所示方法，求兩拋物線所包含對稱断面如圖 184 所示之扭轉剛性近似算式，其中距中點 y 處寬度 c_0 為下式

$$c = c_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

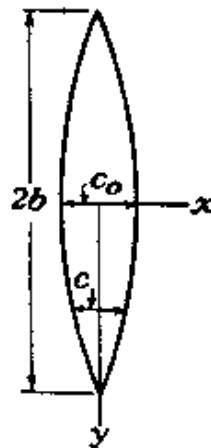


圖 184

9. 證問題 7 所示方法予細橢圓断面近似應力函數

$$\phi = -G \theta b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

橢圓為圖 153 所示，其 b/a 為小數值。證第 105 節之正確解當 b/a 趨小時趨近此解。導近似公式

$$M_t = \pi a b^3 G \theta \quad \tau_{\max} = 2G \theta b = \frac{2M_t}{\pi a b^2}$$

將此與窄矩形断面邊 $2a$ 及 $2b$ 對應公式比較。

10. 用第 110 節末所用方法求問題 8 所示斷面之近似解。

11. 某斷面內有一個洞，應力函數 ϕ 係如此決定在外邊界上為零而在洞邊上為一常值 ϕ_H 。對 (153) 式採第 307 頁算法，證總力矩為 ϕ 面下體積加 ϕ_H 高平覆蓋下體積之兩倍。

12. 一閉薄壁管周長為 l ，均勻厚度為 δ 。縱向割開後得一開口管。證如兩管最大應力相同時

$$\frac{M_t \text{ 閉}}{M_t \text{ 開}} = \frac{l\delta}{6A} \quad \frac{\theta \text{ 開}}{\theta \text{ 閉}} = \frac{2A}{l\delta}$$

而兩扭轉剛度比例為 $l^2\delta^2/12A^2$ ， A 為管洞面積。

計算圓管半徑一吋壁厚 1/10 吋此等比例。

13. 一薄壁管斷面如圖 185 所示，均勻厚度為 δ 。證當管扭轉時中線腹板上無應力。

求 (a) 距離角遠處壁上剪應力，(b) 單位轉角 θ ，用 M_t 表示各公式。

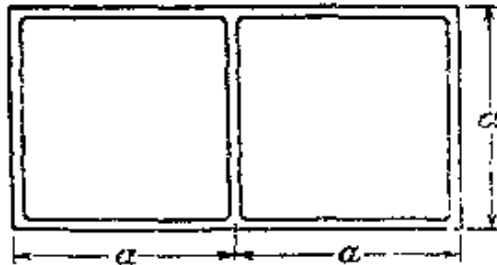


圖 185

14. 求圖 186 所示斷面剪應力公式，壁厚 δ ，均勻。

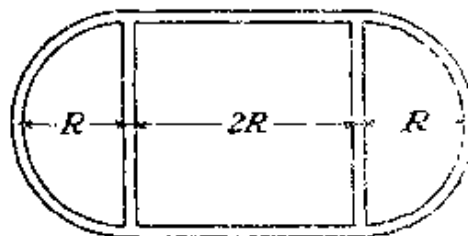


圖 186

15. 討論薄壁封閉管時，係設壁厚度上剪應力不變，此與薄膜經此厚度斜率為常數對應，證此對壁中直線部分不能完全正確 (圖 173a)，對此應力一般

修正為由縱向割開管中剪應力（問題12）。

16. 第 119 節理論包括均勻圓形軸為一特例。對應之函數 ϕ 及 ψ 為如何？證此等函數提供轉矩與單位扭角之正確關係。

17. 證明

$$\phi = \frac{z}{R} + \frac{Az^2}{R^3} \quad R = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

適應第 (119) 節 (g) 式僅當常數為 $A = -1/3$ 時 (方程式 (m))。

18. 在一直徑變化軸向斷面任一點上，任意兩垂直線單元 $ds dn$ 如圖 187 所示，沿此等線剪應力由 τ_s 及 τ_n 代表，試證

$$\tau_s = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \tau_n = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad \tau_s = Gr \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad \tau_n = Gr \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

並求 ψ 所適應之邊界條件。

不用計算證對任何頂角之錐體，第 119 節 (q) 式之函數適應此邊界條件。

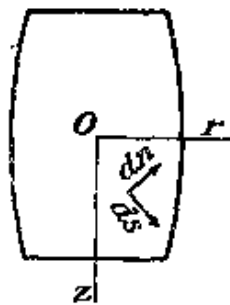


圖 187

19. 驗證第 119 節 (o) 式為對應於 (m) 式函數 ϕ 之函數 ψ 。

20. 如第 119 節之理論經修正為不顧邊界條件 $\phi = \text{常數}$ ，應力將係由邊界上某剪應力環及末端轉矩所造成。取均勻圓形軸，敘述由 $\phi = Czr^4$ 所解之問題，內 $C = \text{常數}$ ， $0 < z < l$ 。

21. 證圖 (188) 所示錐體漸縮軸兩端之相對轉動為

$$\frac{M}{2\pi \left(\frac{1}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right)} \cdot \frac{1}{3G} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right)$$

如 a 及 b 均取為大值， $b - a = l$ ， α 為一小角，以上結果應趨於均勻軸長 l ，半徑 aa ，由 M_t 所致兩端之相對轉動。證此。

368 彈性力學理論 (全一冊)

22. 用第119節 (m) 及 (o) 式之函數，求圖189所示空心錐形軸兩端相對轉動，由 M_t 表示之。兩端為球面半徑為 a 及 b ，中心 O 。

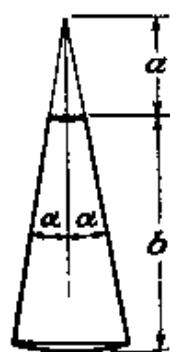


圖 188

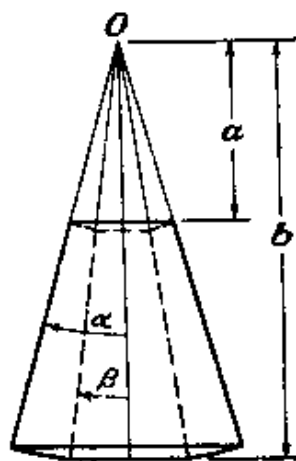


圖 189

第十一章 桿之撓曲

第一二〇節 懸臂梁之撓曲

在純撓曲之討論中（見第 102 節），曾證明如一桿由施於其兩端之兩相等反向力偶撓曲於主面之一時，撓度出現於同一平面中，而六個應力分量中僅與桿軸同向之正交應力為非零值。此應力與距中和軸距離成正比。故正確解此例中與撓曲初等理論相符。討論力施於一端之窄矩形斷面之懸臂梁時（見第 21 節），曾證明除正交應力在每一斷面與撓曲成正比外，另有剪應力與剪力成正比作用於斷面上。

現取一較普遍之撓曲情況，設一任何形式常斷面之懸臂梁，力 P 施於一端平行於斷面主軸之一（圖 190）（註），取固定端之形心為坐標原點。軸 z 與桿之中心線重合， x 與 y 軸與斷面之兩主軸重合，解此問題時吾人用聖維南氏半逆轉法並在開始時對應各應力作某些假設。吾人設在一對固定端 z 距離之斷面上正交應力之分布與純撓曲相同，即：

$$\sigma_z = -\frac{P(l-z)x}{I} \quad (a)$$

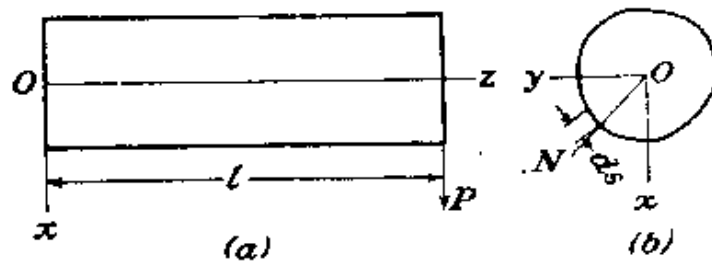


圖 190

吾人設另有剪應力，作用於相同斷面，而在每一點分解為分量 τ_{xz} 及

（註）此問題係 Saint-Venant 所解，見 *J. Mathemat. (Liouville)*, ser. 2, vol. 1, 1856.

τ_{yz} 。吾人設其餘三分應力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 均為零。現將證明用此等假設時吾人可得一適應所有彈性理論各方程式之解，亦即問題之正確解，倘荷力 P 分布於 $z=l$ 端，及反作用力分布於 $z=0$ 處，與解所需者相同。

用此等假設，忽計體力，平衡微分方程式 (123) 變為

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{Px}{I} \quad (c)$$

由 (b) 式知剪應力與 z 無關且在桿之所有斷面均一致。

現考慮邊界條件 (124) 並用於桿之側面上，因側面上無外力作用，前兩個邊界條件方程式恆適應，第三個為

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0$$

由圖190b可知

$$l = \cos(Nx) = \frac{dy}{ds} \quad m = \cos(Ny) = -\frac{dx}{ds}$$

內 ds 為斷面邊界曲線之一單元。故在邊界上條件為

$$\tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0 \quad (d)$$

轉至配合方程式 (126)，知前三個含正交應力分量，及最後一個含 τ_{xy} 之方程式，均恆可適應。系統 (126) 簡化為二方程式

$$\nabla^2 \tau_{yz} = 0 \quad \nabla^2 \tau_{xz} = -\frac{P}{I(1+\nu)} \quad (e)$$

因此稜體懸臂梁之撓曲簡化為尋求為 x 及 y 函數之 τ_{xz} 及 τ_{yz} ，適應平衡方程式 (c)、邊界條件 (d) 及配合方程式 (e)。

第一二一節 應力函數

討論撓曲問題時，吾人將再應用一應力函數 $\phi(x, y)$ 。顯然可見

前節之平衡微分方程式 (b) 及 (c) 可取

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + f(y) \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (181)$$

適應之，內 ϕ 為 x 及 y 之函數， $f(y)$ 則僅為 y 之函數，而將由邊界條件所決定。

代 (181) 於配合方程式 (e)，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} - \frac{d^2 f}{dy^2} \end{aligned}$$

由此等方程式可知

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{df}{dy} + c \quad (a)$$

內 c 為積分常數。此常數有一簡單物理意義。審視懸臂梁斷面內一單元面積之轉量。此轉量 ω_z 係由以下方程式所表示 (閱第83節)

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

此轉量沿 z 軸之轉變率可寫為下式：

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}$$

用虎克定律及 (181) 式之應力分量，可得

$$\frac{\partial}{\partial z} (2\omega_z) = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{df}{dy} \right)$$

代入方程式 (a)，

$$-G \frac{\partial}{\partial z} (2\omega_z) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} + c \quad (b)$$

如 x 軸為斷面之對稱軸，由在此軸線內之 P 力所致之撓曲將使斷面內各單元對稱型之轉量 ω_z (相當於反曲率)，對整個斷面平均值為零。

$\partial\omega_z/\partial z$ 之平均值亦將爲零，而此須使方程式(b)中之 c 取爲零。如斷面爲非對稱時，吾人可予無扭撓曲 $\partial\omega_z/\partial z$ 平均值爲零之定義(註1)，當然仍須 c 值爲零。如此則方程式(b)表示 $\partial\omega_z/\partial z$ 對斷面上在形心處單元消失——此即，沿軸線各單元間無相對轉量，如一斷面固定時其餘即對軸無轉動。取 c 爲零，方程式(a)變爲

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{df}{dy}$$

代(181)於前節中邊界條件(d)得

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial s} = \left[\frac{Px^2}{2I} - f(y) \right] \frac{dy}{ds} \quad (183)$$

由此方程式，如經選定函數 $f(y)$ ，沿斷面邊界函數 ϕ 即可算得。方程式(182)，連同邊界條件(183)，決定應力函數 ϕ 。

以後所將討論各問題中，吾人將對 $f(y)$ 如此選取使方程式(183)右方爲零(註2)。如此則沿邊界 ϕ 爲常數。取此常數爲零，吾人簡化撓曲問題爲解微分方程式(182)附在邊界上 $\phi=0$ 之條件。此問題與薄膜受均勻張力，具與撓曲桿斷面相同邊界，受荷力如方程式(182)右方所示者之位移問題相類比。吾人將示此種類比之應用。

第一二二節 圓形斷面

設斷面邊界方程式爲

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (a)$$

如吾人取

(註1) 參考 J. N. Goodier, *J. Aeron. Sci.*, vol. 11, p. 273, 1944. 另一定義爲 E. Trefftz 所建議，見 *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 15, p. 220, 1935.

(註2) 參閱 S. Timoshenko, *Bull. Inst. Eng. Ways Communication*, St. Petersburg, 1913. 及 *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 20, p. 398, 1922.

$$f(y) = \frac{P}{2I}(r^2 - y^2) \quad (b)$$

邊界條件 (183) 右方變為零。代此於方程式 (182) 中，應力函數即可由方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1+2\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} \quad (c)$$

與在邊界上 $\phi = 0$ 之條件所決定。故應力函數可視為半徑 r 圓邊界薄膜，受均勻張力，密度為與

$$-\frac{1+2\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I}$$

成正比之側向荷重下之位移。

方程式 (c) 及邊界條件顯然可取

$$\phi = m(x^2 + y^2 - r^2)y \quad (d)$$

予以適應，內 m 為一常數因子。此函數在邊界 (a) 上為零且適應方程式 (c)，如吾人取

$$m = \frac{(1+2\nu)P}{8(1+\nu)I}$$

方程式 (d) 即變為

$$\phi = \frac{(1+2\nu)P}{8(1+\nu)I} (x^2 + y^2 - r^2)y \quad (e)$$

現可由方程式 (181) 求出應力分量：

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{(3+2\nu)P}{8(1+\nu)I} \left(r^2 - x^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} y^2 \right) \\ \tau_{yz} &= -\frac{(1+2\nu)Pxy}{4(1+\nu)I} \end{aligned} \quad (184)$$

豎向剪應力分量 τ_{xz} 為 x 及 y 之偶函數，橫向分量 τ_{yz} 為同變數之奇函數。因此應力分布 (184) 之和為沿圓斷面豎向直徑剪力。

沿斷面橫直徑， $x=0$ ；由 (184) 得，

$$\tau_{xz} = \frac{(3+2\nu)P}{8(1+\nu)I} \left(r^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} y^2 \right) \quad \tau_{yz} = 0 \quad (f)$$

最大剪應力係在圓心 ($y=0$)，其值為

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{(3+2\nu)Pr^2}{8(1+\nu)I} \quad (g)$$

橫直徑兩端 ($y = \pm r$) 處之剪應力為

$$(\tau_{xz})_{y=\pm r} = \frac{(1+2\nu)Pr^2}{4(1+\nu)I} \quad (h)$$

現知剪應力值與柏松比之值有關，取 $\nu=0.3$ ，(g) 及 (h) 為

$$(\tau_{xz}) = 1.38 \frac{P}{A} \quad (\tau_{xz})_{y=\pm r} = 1.23 \frac{P}{A} \quad (k)$$

內 A 為斷面面積。初等梁理論，根據剪應力 τ_{xz} 沿橫直徑均勻分布假設，所得之值為

$$\tau_{xz} = \frac{4}{3} \frac{P}{A}$$

對最大剪應力言，最初解之錯誤約為百分之 4。

第一二三節 橢圓斷面

前節方法亦可用於橢圓斷面。設

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a)$$

為斷面之周界。方程式 (183) 右方將消失，如吾人取

$$f(y) = -\frac{P}{2I} \left(\frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) \quad (b)$$

代入 (182) 式得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{Py}{I} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{\nu}{1+\nu} \right) \quad (c)$$

此方程式連同在邊界上 $\phi=0$ 之條件決定應力函數 ϕ 。取

$$\phi = \frac{(1+\nu)a^2 + \nu b^2}{2(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \frac{P}{I} \left(x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) y \quad (d)$$

可適應邊界條件及方程式 (e)。當 $a=b$ 時，此解與前節之解相符。

代 (b) 及 (d) 於 (181) 各式，各應力分量爲

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{2(1+\nu)a^2+b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \frac{P}{2I} \left[a^2 - x^2 - \frac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2+b^2} y^2 \right] \\ \tau_{yz} &= -\frac{(1+\nu)a^2+\nu b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \frac{Pxy}{I}\end{aligned}\quad (185)$$

對橢圓斷面橫軸 ($x=0$)，吾人得

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{2(1+\nu)a^2+b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \frac{P}{2I} \left[a^2 - \frac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2+b^2} y^2 \right] \\ \tau_{yz} &= 0\end{aligned}$$

最大應力係在中心點 ($y=0$)，其值爲

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{Pa^2}{2I} \left[1 - \frac{a^2+\nu b^2/(1+\nu)}{3a^2+b^2} \right]$$

如 b 與 a 較爲極小，吾人可忽計含 b^2/a^2 各項，此時

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{Pa^2}{3I} = \frac{4}{3} \frac{P}{A}$$

與初等梁理論所得解符合。如 b 較 a 爲極大，則

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{2}{1+\nu} \frac{P}{A}$$

在橫直徑兩端 ($y=\pm b$) 處應力爲

$$\tau_{xz} = \frac{4\nu}{1+\nu} \frac{P}{A}$$

此時沿橫直徑應力分布與均勻分布相差甚遠並與柏松比 ν 之值有關。

取 $\nu=0.3$ ，得

$$(\tau_{xz})_{\max} = 1.54 \frac{P}{A} \quad (\tau_{xz})_{x=0, y=b} = 0.92 \frac{P}{A}$$

最大應力約大於初等公式者百分之14。

第一二四節 矩形斷面

圖191所示矩形邊界線之方程式爲

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0 \quad (a)$$

如吾人以常數 $Pa^2/2I$ 代 $f(y)$ 於方程式(183)中，則沿矩形 $x = \pm a$ 兩邊 $Px^2/2I - Pa^2/2I$ 變爲零。沿兩豎邊 $y = \pm b$ 導數 dy/ds 爲零。故(183)式右方沿邊界線爲零，故可取在邊界上 $\phi = 0$ 。微分方程式(182)爲

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} \quad (b)$$

此方程式連同邊界條件可完全決定應力函數。問題簡化爲求均勻拉力下矩形薄膜受連續側向荷力之位移，荷力密度與下式成正比。

$$-\frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I}$$

圖191中曲線 mnp 代表薄膜與 yz 平面交線

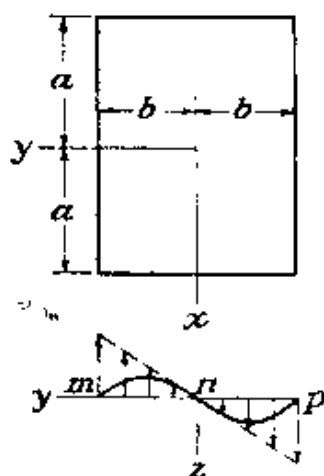


圖 191

由方程式(181)知剪應力可分解爲以下兩系統：

$$\begin{aligned} (1) \quad \tau_{xz}' &= \frac{P}{2I}(a^2 - x^2) & \tau_{yz}' &= 0 \\ (2) \quad \tau_{xz}'' &= \frac{\partial \phi}{\partial y} & \tau_{yz}'' &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (c)$$

第一系統代表通常初等理論所得之拋物線式應力分布。第二系統，與

函數 ϕ 相關，代表對初等理論所需之修正。此等修正值為薄膜斜率所示。沿 y 軸，由對稱， $\partial\phi/\partial x=0$ ，故對初等理論之修正為豎向剪應力，即斜率 $\partial\phi/\partial y$ 所代表者。由圖191， τ_{xz}'' 在 m 及 p 各點為正，在 n 點為負。因此，沿橫對稱軸，應力並非如初等理論所設之均勻分布，而係在兩端 m 及 p 處最大，在中點 n 處為最小。

由薄膜之荷重情況可知 ϕ 為 x 之偶函數而為 y 之奇函數。此項需要及邊界條件可取應力函數 ϕ 下式之傅立葉級數以適應之

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2m+1, n} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (d)$$

代此於方程式 (b) 並用通常計算傅立葉級數係數方法，吾人得以下各式

$$\begin{aligned} & A_{2m+1, n} \pi^2 ab \left[\left(\frac{2m+1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \\ &= - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \int_{-a}^a \int_{-b}^b y \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ A_{2m+1, n} &= - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b(-1)^{m+n-1}}{\pi^4 (2m+1)n [(2m+1)^2/(2a)^2 + (n/b)^2]} \end{aligned}$$

用此應力函數，剪應力各分量可用各方程式 (c) 算得。

現計算初等理論所給沿 y 軸應力所需之修正。由薄膜位移 (圖191) 可知沿此軸修正值為最大，故最大應力在 $y = \pm b$ 兩邊中點上。計算導數 $\partial\phi/\partial y$ 並取 $x=0$ ，得

$$(\tau_{xz}'')_{x=0} = - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} \sin(n\pi y/b)}{(2m+1)[(2m+1)^2(b^2/4a^2) + n^2]}$$

由此式得對斷面中心 ($y=0$) 及矩形豎邊中點之下列各式：

$$\begin{aligned} (\tau_{xz}'')_{x=0, y=0} &= - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^2}{\pi^3} \\ & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1}}{(2m+1)[(2m+1)^2(b^2/4a^2) + n^2]} \end{aligned}$$

$$(\tau_{xz}'')_{x=0, y=b} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m+1)[(2m+1)^2(b^2/4a^2) + n^2]}$$

此等級數求和如用下列已知公式可大為簡化

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)[(2m+1)^2 + k^2]} = \frac{\pi^3}{32} \frac{1 - \operatorname{sech}(k\pi/2)^*}{\frac{1}{2}(k\pi/2)^2}$$

因此

$$(\tau_{xz}'')_{x=0, y=0} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{3P}{2A} \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \cosh(n\pi a/b)} \right] \quad (186)$$

$$(\tau_{xz}'')_{x=0, y=b} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{3P}{2A} \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh(n\pi a/b)} \right]$$

其中 $A = 4ab$ 為斷面面積。此等級數迅速收斂，對任何 a/b 比率修正數目 τ_{xz}'' 之計算並不困難。此等修正須加極初等公式 $3P/2A$ 上。下表

* 此公式可如下求得：設一簡支拉桿長 l 受拉力 s ，在 $x=0$ 端處受力偶 M 撓曲，撓度 y 用傅立葉級數代表為

$$y = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/l)}{n(n^2+k^2)} \quad \text{內 } k^2 = \frac{Sl^2}{EI\pi^2}$$

在 $x=l/2$ 處撓度為

$$\delta = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)[(2m+1)^2+k^2]} \quad (a)$$

相同撓度可得自撓曲線微分方程式之積分，結果為

$$\delta = \frac{Ml^2}{2EI\pi^2 k^2} \left(1 - \operatorname{sech} \frac{k\pi}{2} \right) \quad (b)$$

上列公式可得自 (a) 與 (b) 之比較。

各第一行所列數字為剪應力近似值 $3P/2A$ 修正為正確值所需相乘之因子 (註1)。柏松比在此項計算中係取 $1/4$ 。

點	$\frac{a}{b} =$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$x=0, y=0$	正 確	0.983	0.940	0.856	0.805
	似 近	0.981	0.936	0.856	0.826
$x=0, y=b$	正 確	1.033	1.126	1.396	1.988
	近 似	1.040	1.143	1.426	1.934

由此表可知當 $a/b \geq 2$ 時初等公式對此等剪應力所給之值頗為可靠。對一正方形斷面，初等公式對最大剪應力之差誤約為百分之10。

如矩形兩邊長差別不大時，對應力分布可用下列多項式之應力函數以求近似解

$$\phi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(my + ny^3) \quad (e)$$

由最小能量原理計算係數 m 及 n 得 (註2)

$$m = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{8Ib^2} \frac{1/11 + 8a^2/b^2}{(1/7 + 3a^2/5b^2)(1/11 + 8a^2/b^2) + 1/21 + 9a^2/35b^2}$$

$$n = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{8Ib^4} \frac{1}{(1/7 + 3a^2/5b^2)(1/11 + 8a^2/b^2) + 1/21 + 9a^2/35b^2}$$

各應力分量，由 (e) 式計算，為

$$(\tau_{xz})_{x=0, y=0} = \frac{Pa^2}{2I} + ma^2b^2$$

$$(\tau_{xz})_{x=0, y=b} = \frac{Pa^2}{2I} - 2a^2b^2(m + nb^2) \quad (f)$$

上表中第二行所列之剪應力近似值係根據此等公式計算者。在此等範

(註1) 表中數字與聖維南所得者略有差別。驗算後顯示聖維南之計算有一數字差誤。

(註2) S. Timoshenko; 參閱第372頁註2。

圍之 a/b 比率內，近似公式 (f) 所供之值亦頗正確。

薄膜類比法對計算此等剪應力之計算另提供有用公式。如 a 對 b 比為大值 (圖 191)，吾人可設對距短豎邊遠距離各點上，薄膜面實際為柱形者，如此則方程式 (b) 變為

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I}$$

故得

$$\phi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{6I} (y^3 - b^2 y) \quad (g)$$

代入方程式 (c)，沿 y 軸之應力為

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2I} \left[a^2 + \frac{\nu}{1+\nu} \left(y^2 - \frac{b^2}{3} \right) \right] \quad (h)$$

因此知對一窄矩形斷面初等公式所需之修正，即括弧內第二項所代表者，永為小值。

如 b 對 a 為較大值，在矩形短邊遠處各點上薄膜之位移可取為 y 之直線函數 (註)，由方程式 (b) 得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I}$$

$$\phi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{2I} (x^2 - a^2) \quad (i)$$

代入方程式 (c)，剪應力分量為

$$\tau_{xz} = \frac{1}{1+\nu} \frac{P}{2I} (a^2 - x^2) \quad \tau_{yz} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} xy$$

在斷面形心上 ($x=0, y=0$)，

$$\tau_{xz} = \frac{1}{1+\nu} \frac{Pa^2}{2I} \quad \tau_{yz} = 0$$

(註) 其他細長斷面之近似解，及與微差法所得較正確結果之比較，參閱 W. J. Carter, *J. Appl. Mech.*, vol. 25, pp. 115-121, 1958.

與通常初等解比較在此點上應力減低為比率 $1/(1+\nu)$ 。

但對極寬之矩形 (b 大於 a 多倍) 最大應力值在斷面他處出現且大於初等理論之 $3P/2A$ 甚多。再者，如 b/a 超過 15 時，最大應力不再為在 $x=0, y=\pm b$ ，豎邊中點上之分量 τ_{xz} 。實際為 $x=a, y=\pm\eta$ 在上下兩邊接近轉角處之橫向分量 τ_{yz} 。取 ν 為 $1/4$ 此等值列表如下(註 1)。各 η 值在最後一行以 $(b-\eta)/2a$ 表示之， $b-\eta$ 為最大應力點與角點之距離。

$\frac{b}{a}$	$\frac{(\tau_{xz})_{x=0, y=b}}{3P/2A}$	$\frac{(\tau_{yz})_{x=a, y=\eta}}{3P/2A}$	$\frac{b-\eta}{2a}$
0	1.000	0.000	0.000
2	1.39(4)	0.31(6)	0.31(4)
4	1.988	0.968	0.522
6	2.582	1.695	0.649
8	3.176	2.452	0.739
10	3.770	3.226	0.810
15	5.255	5.202	0.939
20	6.74	7.209	1.030
25	8.225	9.233	1.102
50	15.650	19.466	1.322

第一二五節 其他問題

設一斷面其邊界為兩豎線 $y = \pm a$ (圖 192) 及兩雙曲線 (註 2)

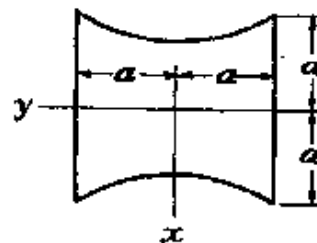


圖 192

(註 1) E. Reissner and G. B. Thomas, *J. Math. Phys.*, vol. 25, p. 241, 1946.

(註 2) F. Grashof, "Elastizität und Festigkeit," p. 246, 1878.

$$(1+\nu)x^2 - \nu y^2 = a^2 \quad (\text{a})$$

顯然此可使方程式 (183) 右方爲零。如吾人取

$$f(y) = \frac{P}{2I} \left(\frac{\nu}{1+\nu} y^2 + \frac{a^2}{1+\nu} \right)$$

代入方程式 (182) 中，得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

此方程式與邊界條件 (183) 均可由取 $\phi=0$ 適應。如此則各剪應力量，由方程式 (181)，爲

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{P}{2I} \left(-x^2 + \frac{\nu}{1+\nu} y^2 + \frac{a^2}{1+\nu} \right) \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

在斷面中每一點上剪應力均爲豎向者。此應力之最大值係在斷面兩豎邊中點上等於

$$\tau_{\max} = \frac{Pa^2}{2I} \quad (\text{b})$$

如斷面邊界爲下列方程式

$$\left(\pm \frac{y}{b} \right)^{1/\nu} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad a > x > -a$$

問題亦易於求解。取 $\nu=1/4$ ，此斷面將如圖193所示。

$$\text{取} \quad f(y) = \frac{Pa^2}{2I} \left[1 - \left(\pm \frac{y}{b} \right)^{1/\nu} \right]$$

邊界條件 (183) 左方爲零，亦即沿邊界 ϕ 須爲常數，方程式 (182) 變爲

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} \pm \frac{Pa^2}{2bI\nu} \left(\pm \frac{y}{b} \right)^{(1-\nu)/\nu}$$

此方程式及邊界條件均可由下式適應

$$\phi = \frac{Pa^2\nu}{2(1+\nu)I} \left[y \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \pm b \left(\pm \frac{y}{b} \right)^{(1+\nu)/\nu} \right]$$

代入方程式 (181)，得

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2(1+\nu)I} (a^2 - x^2) \quad \tau_{yz} = - \frac{P\nu}{(1+\nu)I} xy$$

吾人可用另一方式達相同之結果，討論矩形斷面梁應力時如其寬度較深度為大時，吾人會對一近似解取以下之應力函數（方程式（g）第124節）

$$\phi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{2I} (x^2 - a^2)$$

由此亦可導得（c）式之應力分量，邊界線之方程式現可由在邊界上剪應力方向與邊界切線相合之條件求得。因此

$$\frac{dx}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{\tau_{yz}}$$

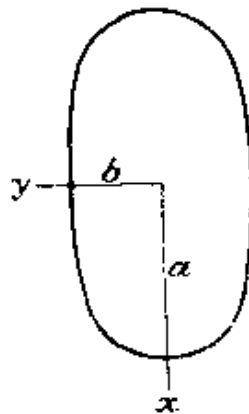


圖 193

代入（c）並積分後，即得邊界線方程式

$$y = b(a^2 - x^2)^{\nu}$$

應用能量法（見第124節）對許多其他問題可獲近似解。例如，取圖194所示

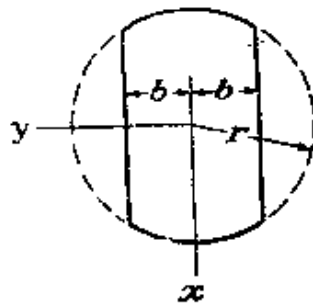


圖 194

之斷面。邊界上兩豎邊之方程式為 $y = \pm b$ ，另兩邊為圓

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

之兩弧線，方程式（183）右方消失，如吾人取

$$f(y) = \frac{P}{2I}(r^2 - y^2)$$

如此則應力函數近似式之一為

$$\phi = (y^2 - b^2)(x^2 + y^2 - r^2)(Ay + By^3 + \dots)$$

內各常數 A , B , \dots 將由最小能量原理之條件算出。

其他形式斷面會由極坐標及各種曲線坐標及複變函數解出。此中包括斷面邊界為兩圓、同心 (註 1) 或非同心 (註 2)、具徑向縫口之圓 (註 3)、一心臟線 (註 4)、一蚶線 (註 5)、一橢圓蚶線 (註 6)、兩共焦橢圓 (註 7)、一橢圓及共焦雙曲線 (註 8)、三角形及多邊形 (註 9) 與帶縫口矩形 (註 10)、

(註 1) A solution is given in A. E. H. Love's "Mathematical Theory of Elasticity," 4th ed., p. 335, and in I. S. Sokolnikoff's "Mathematical Theory of Elasticity," 2d ed., p. 228, 1956.

(註 2) B. R. Seth, *Proc. Indian Acad. Sci.*, vol. 4, sec. A, p. 531, 1936, and vol. 5, p. 23, 1937.

(註 3) W. M. Shepherd, *Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 138, p. 607, 1932; L. A. Wigglesworth, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 47, p. 20, 1940, and *Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 170, p. 365, 1939.

(註 4) W. M. Shepherd, *Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 154, p. 500, 1936.

(註 5) D. L. Holl and D. H. Rock, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 19, p. 141, 1939.

(註 6) A. C. Stevenson, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 45, p. 126, 1939.

(註 7) Love, *op. cit.*, p. 336.

(註 8) B. G. Galerkin, *Bull. Inst. Eng. Ways Communication*, St. Petersburg, vol. 96, 1927. See also S. Ghosh, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, vol. 27, p. 7, 1935.

(註 9) B. R. Seth, *Phil. Mag.*, vol. 22, p. 582, 1936, and vol. 23, p. 745, 1937.

(註 10) D. F. Gunder, *Phys.*, vol. 6, p. 38, 1935.

及扇形環 (註)。

第一二六節 不對稱斷面

第一例取等腰三角形圖 (195)。斷面邊界線為下式所構成

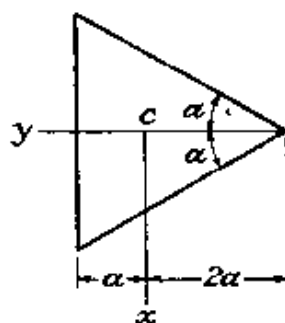


圖 195

$$(y-a)(x + (2a+y)\tan\alpha)(x - (2a+y)\tan\alpha) = 0$$

如右取

$$f(y) = \frac{P}{2I}(2a+y)^2 \tan^2 \alpha$$

方程式 (183) 右方為零。應力函數 ϕ 之方程式 (182) 變為

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{P}{I}(2a+y)\tan^2 \alpha \quad (a)$$

用能量法可得一近似解。設取一特例

$$\tan^2 \alpha = \frac{\nu}{1+\nu} = \frac{1}{3} \quad (b)$$

方程式 (a) 可由取下式之應力函數求得

$$\phi = \frac{P}{6I} \left[x^2 - \frac{1}{3}(2a+y)^2 \right] (y-a)$$

各應力分量由方程式 (181) 為：

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + \frac{P}{6I}(2a+y)^2 = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^2} (-x^2 + a(2a+y)) \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^2} x(a-y) \end{aligned} \quad (c)$$

(註) M. Seegar and K. Pearson, *Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 96, p. 211, 1920.

沿 y 軸線， $x=0$ ，剪應力和為豎向並可由以下線性函數代表之

$$(\tau_{xz})_{x=0} = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^3}(2a+y)$$

此應力之最大值，在斷面豎邊中點上，為

$$\tau_{\max} = \frac{2\sqrt{3}P}{9a^2}$$

用 (c) 式之應力對 z 軸取力矩，可證明此例中剪力和經過斷形形心 C 。

其次取一較普遍情況之斷面如圖 196 所示。此斷面有一橫對稱軸，其上下兩部邊界線為下列方程式

$$x = \psi(y) \quad x > 0$$

$$x = -\psi(y) \quad x < 0$$

如此則函數

$$(x + \psi(y))(x - \psi(y)) = x^2 - (\psi(y))^2$$

在邊界上消失而在應力分量式 (181) 中可取

$$f(y) = \frac{P}{2I}(\psi(y))^2$$

用此假設，應力函數須適應微分方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{P}{I} \psi(y) \cdot \frac{d\psi}{dy}$$

且在邊界上為常數。問題可視為尋求受均勻張力薄膜當荷重密度為上式右方時之撓度。此問題通常可用能量法求一足夠正確解如對矩形斷面所為者 (見第 379 頁)。



圖 196

圖 197 所示之例亦可以類似方法處理。設斷面為一拋物線所含部分而拋物線方程式為

$$x^2 = A(y+a)$$

則吾人可取

$$f(y) = \frac{P}{2I} A(y+a)$$

用此式之 $f(y)$ ，方程式(183)右方第一因子沿邊界拋物線部分消失。因子 dy/ds 沿邊界直線部分消失，因此應力函數沿邊界線為常數問題，亦可用能量法求近似解。

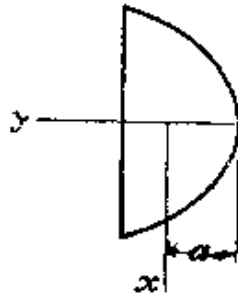


圖 197

第一二七節 剪心

討論懸臂梁問題時吾人選 z 軸為桿之形心軸且取 x 及 y 軸為斷面之主形心軸。另設外力 P 平行於 x 軸距形心之距離為使桿不至發生扭轉者。此距離，在實用計算上甚為重要，當方程式(181)所代表各應力分量為已知時，可立即求出。吾人先求剪應力對形心所發生之力矩。此力矩顯明為

$$M_z = \iint (\tau_{xz}y - \tau_{yz}x) dx dy \quad (a)$$

因分布於末端斷面上之應力與外力 P 為靜力相當，故 P 對斷面形心之距離為

$$d = \frac{|M_z|}{P} \quad (b)$$

對正值之 M_z ，距離 d 須取正 y 之方向。以上討論係設外力平行於 x 軸。

當 P 平行於 y 軸時，可用相似之計算，求 P 之作用線位置，使斷面上形心單元無轉動。兩作用線之交點有顯著重要性。設有一力，垂直於梁軸線，係施於該點，吾人可將其分解為兩分力平行於 x 及 y

軸；而由以上討論知此對斷面形心單元將不發生轉動。此點稱為剪心——有時亦稱為撓心。

如梁之斷面具兩對稱軸，吾人可立刻決定剪心即為斷面之形心。當僅有一個對稱軸時，則形心將在該軸上。取對稱軸為 y 軸，可由方程式 (b) 計算形心之位置。

現舉一例，如圖 198 所示之半圓斷面 (註 1)。求剪應力可利用前對圓斷面梁之解 (閱第 373 頁)。在該例中直徑豎斷面 xz 上無應力作用。吾人可想像 xz 面分此梁為兩半每一部可代表一半圓斷面梁受力 $P/2$ 之撓曲。應力即為方程式 (184) 所給。代入 (a) 式，積分後除以 $P/2$ ，得撓曲力對原點 O 距離值為

$$e = \frac{2M_z}{P} = \frac{8}{15\pi} \frac{3+4\nu}{1+\nu} r$$

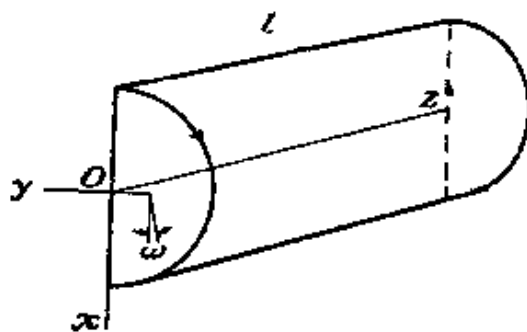


圖 198

此決定力之位置使斷面 O 點處單元無轉動。此時半圓形心上之單元將轉動 [閱方程式 (b) 第 371 頁]。

$$\omega = \frac{\nu P(l-z)}{EI} 0.424r$$

內 $0.424r$ 為自 O 點至半圓形心之距離。為消去此項轉動，必須加施一扭矩如圖 198 所示。此扭矩②值可用第 327 頁之表尋求，對一半圓斷面

(註 1) 閱 S. Timoshenko, *Bull. Inst. Eng. Ways Communication*, op. cit. 此似為研究此項問題之第一篇論文。

單位長扭角爲

$$\theta = \frac{M_t}{0.298 Gr^4}$$

如此則斷面形心單元無轉動條件爲

$$\frac{M_t(l-z)}{0.298 Gr^4} = \frac{\nu P(l-z)}{EI} 0.424r \quad \text{故} \quad M_t = \frac{\nu P(0.298 r^4) 0.424r}{2(1+\nu)I}$$

此扭矩可由向 z 軸移動撓曲力 $P/2$ 一距離

$$\delta = \frac{2M_t}{P} = \frac{8\nu(0.298)0.424r}{2(1+\nu)\pi}$$

此量必需自前所算得距離 e 減去以求剪心至圓心距離。設 $\nu = 0.3$ ，得

$$e - \delta = 0.548r - 0.037r = 0.511r$$

在如圖196所示之斷面中剪應力分量爲

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{P}{2I} [x^2 - \psi^2(y)] \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

因此

$$M_z = \iint \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial x} x \right) dx dy - \frac{P}{2I} \iint [x^2 - \psi^2(y)] y dx dy \quad (c)$$

部分積分並注意在邊界 $x = \pm \psi(y)$ 上 ϕ 爲零，得

$$\iint \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial x} x \right) dx dy = -2 \iint \phi dx dy$$

$$\iint [x^2 - \psi^2(y)] dx = 2/3 \psi^3(y) - 2\psi^3(y) = -4/3 \psi^3(y)$$

$$\iint [x^2 - \psi^2(y)] y dx dy = -4/3 \int y \psi^3(y) dy$$

$$I = \iint x^2 dx dy = 2/3 \int \psi^3(y) dy$$

代入 (c) 並除以 P ，得

$$d = \frac{|M_z|}{P} = \left| -\frac{2}{P} \iint \phi dx dy + \frac{\int y \psi^3(y) dy}{\int \psi^3(y) dy} \right|$$

已知 $\psi(y)$ 並用薄膜類比以求 ϕ ，吾人常可相當正確尋得此等斷

面之剪心 (註 1)。

剪心問題對薄壁開放斷面特具重要性。設剪應力為均勻分布於壁之寬度上且平行於壁之中面，剪心極易求得並有相當之正確度 (註 2)。

剪心之位置僅由斷面形式即可決定。但另一方面，扭心位置 (閱第 317 頁) 則與桿如何支承有關。如選取適當支承方式，扭軸可使與剪心軸重合。當桿如此支承使 $\iint w^2 dx dy$ 對斷面為極小 (註 3)， w 為扭轉翹位移，則此情況出現，在實際情況中，固定通常干擾固定端附近之應力分布一例如，當其完全阻礙末端斷面位移時。在此情況中，如視撓曲力為在剪心上之集中力，產生零轉動，倒轉定理 (見第 282 頁) 證示一扭矩剪心生零撓度。此指扭心與剪心重合 (註 4)。此論據為近似性者，因扭心之存在視其平面上斷面無變形而定，此在近固定端受干擾區不能成立。

第一二八節 撓曲問題之皂膜解法

撓曲問題之正確解僅對少數簡單斷面形式之某些特例為已知。為實用目的對任何指定斷面須有解決方法。為達此目的根據有限差分方程式之數據計算如本書附錄所解釋者，或用皂膜方法實驗 (註 5)，類比於用解扭轉問題者 (閱第 315 頁) 均屬可行。為推究皂膜方法理論

(註 1) 此種計算例題見 L. S. Leibenson, "Variational Methods for Solving Problems of the Theory of Elasticity," Moscow,

(註 2) 參考資料見 S. Timoshenko, "Strength of Materials," 3d ed., vol. 1, p. 240, 1955.

(註 3) R. Kappus, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 19, p. 347, 1939; A. Weinstein, *Quart. Appl. Math.*, vol. 5, p. 79, 1947.

(註 4) 閱 R. V. Southwell, "Introduction to the Theory of Elasticity," p. 29; W. J. Duncan, D. L. Ellis, and C. Scruton, *Phil. Mag.*, vol. 16, p. 201, 1933.

(註 5) 此法首次經 Vening Meinesz, 指出，見 "De Ingenieur," 108 頁 Holland, 1911. 繼續研究見 A. A. Griffith and G. I. Taylor, *Advisory Comm. Aeron. Tech. Rept.*, vol. 3, p. 950, 1917-1918.

此處係根據後者。

吾人用方程式 (181), (182) 及 (183) 取

$$f(y) = \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I}$$

方程式 (182) 之應力函數為

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (a)$$

此與無荷重均勻受拉薄膜方程式相同 (閱第 318 頁)。邊界條件變為

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \left[\frac{Px^2}{2I} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I} \right] \frac{dy}{ds} \quad (b)$$

沿邊界 s 積分可得下式

$$\phi = \frac{P}{I} \int \frac{x^2 dy}{2} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^3}{3I} + \text{常數} \quad (c)$$

在邊界上每一點之 ϕ 值可由此推算。 $\int (x^2/2) dy$ 沿邊界一週之值為零，因其代表斷面對 y 軸之力矩，而此軸經過斷面之形心。因此，由 (c) 所算得之 ϕ ，沿邊界為一閉合曲線所代表。

現設想皂膜拉緊於此曲線上。此膜之曲面將適應方程式 (a) 及邊界條件 (c)。因此，薄膜之豎坐標在斷面所有各點上代表應力函數 ϕ ，尺度為沿邊界 [方程式 (c)] 用以代表 ϕ 者。

圖 199 (註) 之照片解釋用於建立皂膜邊界方法之一。在一輕金屬薄片上割一洞口其形狀為當薄板撓曲後洞口邊緣在水平面上之投影與梁斷面邊界線形式相同。對薄板施以撓曲使洞口邊緣豎坐標在某一尺度下代表 (c) 式之 ϕ 值。

皂膜方程式與撓曲問題方程式之類比僅對小位移之薄膜方正確。薄膜位移豎向坐標以不超過橫向尺度十分之一為宜。如必要，沿邊界

(註) P. A. Cushman. 此種與他種實驗方法均載 M. Hetényi (ed.), "Handbook of Experimental Stress Analysis," chap. 16, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950.

函數範值可用一新函數 ϕ_1 予以降低，此可取

$$\phi = \phi_1 + ax + by \quad (d)$$

內 a 及 b 為任意常數。函數 ϕ_1 亦適應薄膜方程式 (a)。沿邊界函數

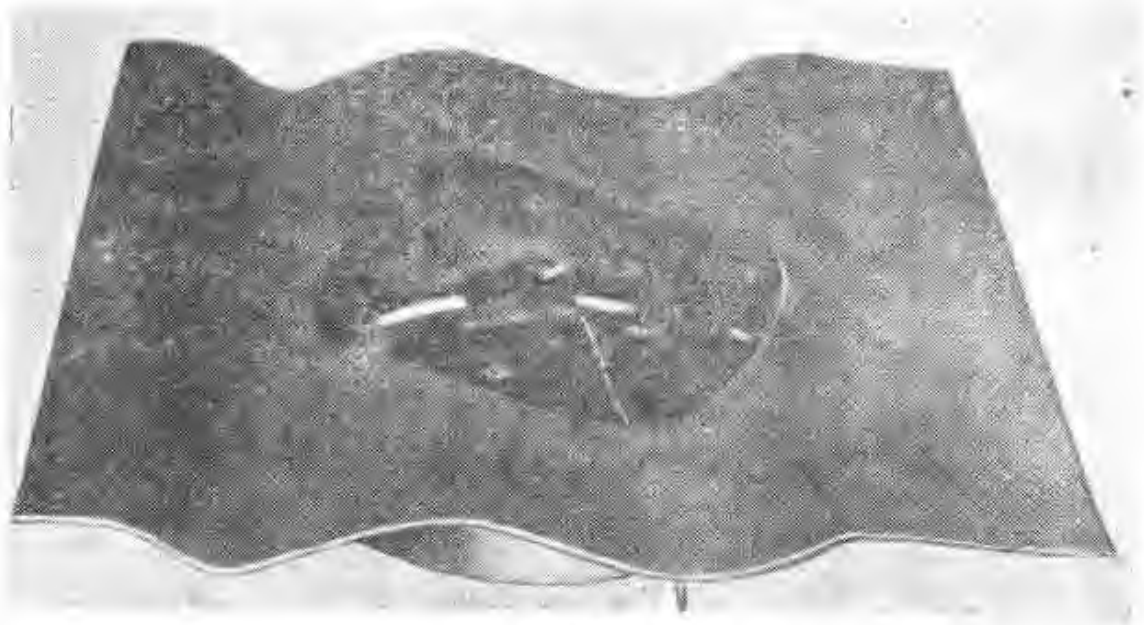


圖 199

ϕ_1 值，由方程式 (c) 及 (d)，為

$$\phi_1 = \frac{P}{I} \int \frac{x^2}{2} dy - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^3}{3I} - ax - by + \text{常數}$$

在邊界上函數 ϕ_1 範值之減低通常可由適當調整常數 a 及 b 達成之。

當 ϕ_1 得自皂膜後，函數 ϕ 可由方程 (d) 算出。然後剪應力分量可得自方程式 (181)，其形式現為

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I} \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (e)$$

倘在一點上導數 $\partial \phi / \partial y$ 及 $\partial \phi / \partial x$ 各值為已知時，此點上應力即極易算出。此等導數為皂膜沿 y 及 x 向斜率，決定斜率時，進行步驟與扭轉問題所用者相同並首先繪出膜面之等高線。由等高圖各斜率可得自繪

平行於坐標軸之直線及建立代表皂膜對應斷面之曲線。如此求得之斜率現須納入 (e) 式以求剪應力分量。此過程之精確度可由計算斷面上所有剪應力之和予以複驗。此合力應等於懸臂梁一端之撓力 P 。

實證證明用皂膜方法求應力可達相當滿意精確結果。對一 I 斷面試驗結果見圖 200 (註)。由此等圖形可見通常初等理論所假設，工字梁腹板承受大部分剪力而剪應力沿腹板厚度不變可予確認。在中和面最大剪應力與由初等理論所計算極為符合。分量 τ_{yz} 在腹板接近為零而在凹角處達最大值。

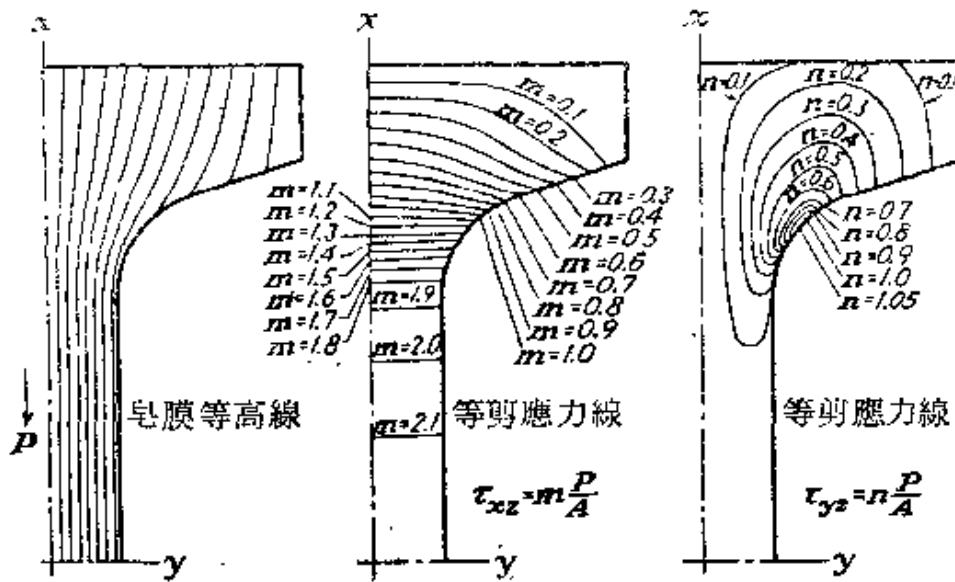


圖 200

此最大值應視凹角處填角之半徑而定。對此例中各部比例，約為中和面上最大應力 τ_{xz} 之一半。等剪應力分量線，以此等應力與平均剪應力 P/A 比例計，示於各圖中。

在凹角處應力集中現象曾對 T 斷面梁予以研究。凹角半徑逐步增加，每次均繪製其等高線。曾經證示在凹角處最大應力當填角半徑約為腹板厚度十六分之一時與腹板中最大應力相等。

(註) 此對稱例中僅須檢討斷面四分之一。

第一二九節 位移

各應力分量求得後，位移分量 u ， v ， w 可如純撓 (見第295頁) 所用之方法計算。現試求懸臂梁之撓曲線。在 xz 及 yz 平面內此線之曲率之足夠精確值在 $x=y=0$ 處可取為 $\partial^2 u / \partial z^2$ 及 $\partial^2 v / \partial z^2$ ，此等量可用以下方程式計算

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = \frac{P(l-z)}{EI} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

由上兩式知懸臂梁中線係在受荷力作用之 xz 平面內撓曲，任一點上曲率與此點之撓矩成正比，與初等撓曲理論所設者相符。對第一個方程式積分，得

$$u = \frac{Plz^2}{2EI} - \frac{Pz^3}{6EI} + cz + d \quad (b)$$

內 c 及 d 為積分常數而須以懸臂梁固定端條件決定之。如中線一端為嵌入者，當 $z=0$ 時， u 及 du/dz 為零，因此 (b) 式中 c 及 d 俱為零。

梁中斷面不保持為平面。因剪應力作用而變為翹歪，翹歪後斷面形心處單元與撓曲中線間斜角為

$$\frac{\pi}{2} - \frac{(\tau_{xz})_{x=0, y=0}}{G}$$

如在形心處剪應力為已知，可將其值算出。

第一三〇節 撓曲問題進一步研究

前數節中吾人對一端固定另一端荷橫向力懸臂梁撓曲問題予以究討。所得之解為撓曲問題正確解，倘末端上外力在斷面之分布同於解出各應力 σ_x ， τ_{xy} ，及 τ_{yz} 所示之形式。如此種條件不能達到，接近梁末端處應力分布將生局部性之紊亂，但以聖維南原理為根據在距末端足夠距離處，即如大於梁斷面尺度距離處，吾人可設解已相度精確。

用相同原理，吾人可引伸以上各解，並應用於他種荷力及支承情況梁中。吾人可以足夠之精確度假設在梁中任一斷面上之應力，對荷力相當距離處，僅與斷面上撓矩及剪力有關並可以前對懸臂梁求得各解用重疊法計算之。

如撓曲力係斜置於梁斷面之主軸，則可沿各主軸分解為兩分量，如此則兩主面中撓曲可分別討論。總應力及位移可由重疊原理求得。

外力作用點鄰近處有不規律之應力分布如前對窄矩形斷面梁所討論之情況（閱第40節）。對其他斷面類似之研究顯示此等不規律情況為局部性者（註1）。

對某數種分布荷力撓曲問題亦經解出（註2）。在此等例中證明梁之中線通常將伸長或縮短如前對窄矩形斷面所得討論者相同（閱第22節）。此時中線曲率不再與撓矩成正比，但需要之修正量甚小，在實用問題中可忽計。例如，在自身重量下圓斷面之撓曲，在固定端處其曲率為（註3）

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \left[1 - \frac{7 + 12\nu + 4\nu^2}{6(1 + \nu)} \frac{a^2}{l^2} \right]$$

內 a 為斷面之面積， l 為懸臂長。括弧第二項代表因荷力分布所造成對曲率之修正。此項結論對其他形式斷面在自身重量下之撓曲亦能應用（註4）。

（註1）參考 L. Pochhammer, "Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes," Kiel, 1879. 另閱 J. Dougall, *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. 49, p. 895 1914.

（註2）J. H. Michell, *Quart. J. Math.*, vol. 32, 1901; also K. Pearson, *Quart. J. Math.*, vol. 24, 1889, and K. Pearson and L. N. G. Filon, *Quart. J. Math.*, vol. 31, 1900.

（註3）此問題 Love 曾予研究 *op. cit.*, p. 362, 1927.

（註4）橢圓斷面懸臂梁討論見 J. M. Klitchieff, *Bull. Polytech. Inst.*, St. Petersburg, p. 441, 1915.

第十二章

旋轉體內軸對稱應力與變形

第一三一節 一般方程式

前數章中曾遇少數軸對稱荷力下旋轉體變形問題。最簡單之例為圓柱受內壓力（見第28節）及旋轉圓盤（見第32節）。此等例為無扭轉軸對稱者。與此對比，吾人有圓柱體之扭轉（見第364頁習題2），該處剪應力僅為圓柱坐標之函數。另外，在變換直徑圓軸之扭轉中（見第119節），非零應力分量 $\tau_{r\theta}$ 及 $\tau_{z\theta}$ 僅為 r 與 z 之函數，與 θ 無關。

本章中（最後兩節，146及147除外）將專討論無扭轉之軸對稱問題。用圓柱坐標 r, θ, z ，與對應位移分量 u, v, w ，分量 v 消失而 u, w 均與 θ 無關。如此則各應力分量亦與 θ 無關，其中 $\tau_{r\theta}$ 及 $\tau_{\theta z}$ 為零。此可由方程式 (179) 得知，該等方程式為圓柱坐標之一般應變位移關係。此可簡化為

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (187)$$

方程式 (180) 對一單元之平衡簡化為

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (188)$$

對許多問題言，用應力函數仍為有效方法。設此應力函數（註）為

（註）Love 氏應力函數。參閱 A. E. H. Love, "Mathematical Theory of Elasticity" 4th ed., p. 274, Cambridge University Press, New York, 1927. 用於應力及位移之各種函數為瞰見 K. Marguerre, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 35 pp 242-263, 1955.

ϕ ，由直接代入可驗證。如吾人取

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]\end{aligned}\quad (189)$$

則方程式 (188) 均可適應，倘應力函數適應方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (190)$$

符號 ∇^2 代表運算

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (a)$$

此對應於拉普拉司運算子在直線坐標之〔參閱第68頁方程式 (h)〕

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

注意應力函數 ϕ 與 θ 無關，故用 ϕ 於 (a) 式時內第三項為零。

對應於 (189) 式之位移 u, v, w 可立即求得。自 (187), (189), 及 (a) 知

$$u = r\epsilon_\theta = \frac{r}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] = -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \quad (190')$$

自 (187) 第三式及第四式可由 w 求 $\partial w / \partial z$ 及 $\partial w / \partial r$ 。因此

$$E \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{\partial}{\partial z} \left[2(1-\nu^2) \nabla^2 \phi - (1+\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]$$

故

$$Ew = (1+\nu) \left[2(1+\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] + f(r) \quad (b)$$

內 $f(r)$ 僅為 r 之函數，但為任意者。用 (190') 於 (187) 之第四式得

$$G \frac{\delta w}{\delta r} = \tau_{rz} \rightarrow G \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]$$

因此，用 $2(1+\nu)G = E$ 代入得

$$Ew = (1+\nu) \left[2(1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] + g(z) \quad (c)$$

內 $g(z)$ 為 z 之任意函數，但因 (b) 與 (c) 必為同一函數， $f(r)$ 與 $g(z)$ 在此區域內各點上均須相等，故

$$f(r) = f(z) = A \quad \text{一常數}$$

此常數，在 (b) 或 (c) 內，相當於一軸向剛體平移，在任何固定條件下均可取為零。因此，位移分量由 (190') 及 (b) 或 (c) 可表達如下

$$2Gu = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \quad 2Gw = 2(1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (190'')$$

如吾人開始用一函數 ϕ 適應微分方程式 (190) 以代表位移，可自此函數導出應變分量 (187) 及應力分量 (189)。此等應變分量並無配合問題，因係由位移分量 (190'') 直接導得者。如吾人可求得此一函數 ϕ 而能適應邊界條件，即得某一問題之解。在以下第133節至第144節中將討論若干此等問題。其他方法將在第 145 節中討論。

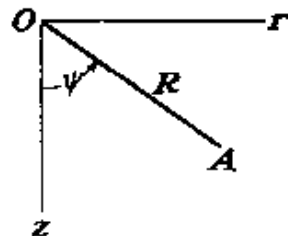


圖 201

在某些情形下用極坐標 R 及 ψ 於方程式 (190) 中較為便利。坐

標旋轉可用第27節中各公式。吾人知

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\text{ctn } \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}$$

代入 (190) 式，得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \text{ctn } \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \text{ctn } \psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} \right) = 0 \quad (191)$$

在以後諸節中，將用此方程式之某些解以研究含軸向對稱各特殊問題。

第一三二節 多項式解

現考慮方程式 (191) 之解，同時亦為拉普拉司方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \text{ctn } \psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} = 0 \quad (192)$$

之解。此後一方程式特解之一可取以下形式

$$\phi_n = R^n \Psi_n \quad (a)$$

此處 Ψ_n 為角 ψ 之函數。代 (a) 式於 (192)，得對 Ψ_n 之微分方程式為

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} \right) + n(n+1) \Psi_n = 0 \quad (b)$$

如用 x 代替 $\cos \psi$ 並視為新獨立變數，(b) 式變為

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} - 2x \frac{d\Psi_n}{dx} + n(n+1) \Psi_n = 0 \quad (193)$$

此為黎金芝方程式 (Legendre's equation) (註)。此方程式之兩基本解通常用 $P_n(x)$ ， $Q_n(x)$ 代表，稱為第一及第二種黎金芝函數。當 $n =$

(註) 參考，例如，F. B. Hildbrand, "Advanced Calculus for Applications", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.

0, 1, 2, 3, 4, 5, …… , 各 $P_n(x)$ 稱為黎金芝多項式

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = 1/2(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = 1/2(5x^3 - 3x) \quad P_4(x) = 1/8(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = 1/8(63x^5 - 70x^3 + 15x) \quad \text{等等}$$

在 (a) 式內對 Ψ_n 用此等函數，吾人得方程式 (192) 之對應解。每一個均可乘以常數 A_n 。用以下關係回至 r 及 z

$$x = \cos \psi \quad Rx = z \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

吾人得 (192) 式下列諸多項式解

$$\phi_0 = A_0$$

$$\phi_1 = A_1 z$$

$$\phi_2 = A_2 [z^2 - 1/3(r^2 + z^2)]$$

$$\phi_3 = A_3 [z^3 - 3/5 z(r^2 + z^2)]$$

$$\phi_4 = A_4 [z^4 - 6/7 z^2(r^2 + z^2) + 3/35(r^2 + z^2)^2]$$

$$\phi_5 = A_5 [z^5 - 10/9 z^3(r^2 + z^2) + 5/21 z(r^2 + z^2)^2] \quad (194)$$

.....

此等多項式亦為方程式 (191) 之解。方程式 (191) 其他解亦可由此推求而不為 (192) 之解。如 $R^n \Psi_n$ 為 (192) 之一解則 $R^{n+2} \Psi_n$ 可證明為 (191) 之一解。完成 (191) 括弧內所示之運算，吾人得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \text{ctn} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) R^{n+2} \Psi_n = (2n+3) R^n \Psi_n \quad (c)$$

重複相同運算，如 (191) 式所示，結果為零，因 (c) 式右方為 (192) 式之一解。因此 $R^{n+2} \Psi_n$ 為 (191) 式之一解。將 (194) 各解乘以 $R^2 = r^2 + z^2$ ，吾人得以下各新解：

$$\phi_2 = B_2 (r^2 + z^2)$$

$$\phi_3 = B_3 z (r^2 + z^2)$$

$$\begin{aligned}\phi_4 &= B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2) \\ \phi_5 &= B_5(2z^3 - 3r^2z)(r^2 + z^2) \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{195}$$

第一三三節 圓板之撓曲

有些具實用上重要性之問題可由以上各解協助解決。其中一類為圓板對稱荷力下之各種撓曲例（圖202）。例如，由（194）及（195）

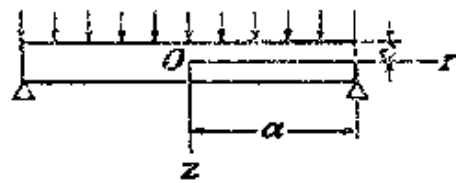


圖 202

中取三次之多項式，吾人得應力函數

$$\phi = a_3(2z^3 - 3r^2z) + b_3(r^2z + z^3)$$

代入（189）式，結果為

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 6a_3 + (10\nu - 2)b_3 & \sigma_\theta &= 6a_3 + (10\nu - 2)b_3 \\ \sigma_z &= -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3 & \tau_{rz} &= 0\end{aligned}$$

故各應力分量在整個板內均為常數。適當調整常數 a_3 及 b_3 值後吾人可代表任何 σ_z 及 τ_{rz} 為已知常數作用於板面上之板內應力。

現由（194）及（195）中取四次多項式，可得

$$\phi = a_4(8z^4 - 24r^2z^2 + 3r^4) + b_4(2z^4 + r^2z^2 - r^4)\tag{b}$$

代入（189）式，得

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 96a_4z + 4b_4(14\nu - 1)z \\ \sigma_z &= -192a_4z + 4b_4(16 - 14\nu)z \\ \tau_{rz} &= 96a_4r - 2b_4(16 - 14\nu)r\end{aligned}\tag{197}$$

取

$$96a_4 - 2b_4(16 - 14\nu) = 0$$

結果為

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \sigma_r = 28(1+\nu)b_4 z \quad (c)$$

如 z 爲對板中面之距離，(c) 解代表由均勻分布於邊界上力矩所造成板之純撓。

欲求均勻布荷力下圓板之解，吾人取六次式之多項式之應力函數。取

$$\phi = 1/3a_6(16z^6 - 120z^4r^2 + 90z^2r^4 - 5r^6) \\ + b_6(8z^6 - 16z^4r^2 - 21z^2r^4 + 3r^6)$$

代於 (179)，得

$$\sigma_r = a_6(320z^3 - 720r^2z) + b_6\{64(2+11\nu)z^3 + [504 - 48(22\nu)]r^2z\} \\ \sigma_z = a_6(-640z^3 + 960r^2z) + b_6\{[-960 + 32(22)(2-\nu)]z^3 \\ + [384 - 48(22)(2-\nu)]r^2z\} \\ \tau_{rz} = a_6(960rz^2 - 240r^3) + b_6\{[-672 + 48(22)\nu]z^2r \\ + [432 - 12(22)\nu]\}r^3$$

在此等應力上再加由 (197) 取 $b_4 = 0$ 之應力

$$\sigma_r = 96a_1z \quad \sigma_z = -192a_1z \quad \tau_{rz} = 96a_1r$$

及一可由 (196) 所得之 z 向均勻拉應力 $\sigma_z = b$ 。吾人所得各應力分量將含四個常數 a_6 ， b_6 ， a_1 ， b 。此等常數調整後可使適應板上下兩面邊界條件 (圖202)。各條件爲

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0 & z &= c \\ \sigma_z &= -q & z &= -c \\ \tau_{rz} &= 0 & z &= c \\ \tau_{rz} &= 0 & z &= -c \end{aligned} \quad (d)$$

此處 q 代表均勻荷力之密度， $2c$ 爲板厚。代入應力分量各算式於此等方程式中，可決定四個常數 a_6 ， b_6 ， a_1 ， b 。用所得值，適應邊界條件 (d) 各應力分量算式爲

$$\begin{aligned}\sigma_r &= q \left[\frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3+\nu)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{z}{c} \right] \\ \sigma_z &= q \left(-\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3}{4} \frac{z}{c} - \frac{1}{2} \right) \\ \tau_{rz} &= -\frac{3qr}{8c^3} (c^2 - z^2) \quad (e)\end{aligned}$$

由以上各式知 σ_z 及 τ_{rz} 之分布均窄矩形斷面均勻荷力梁之應力情況完全相同（見第22節）。徑向應力 σ_r 係由一 z 之奇函數代表，在板之邊界上提供均勻分布之撓矩。如需簡支板之解（圖202），重疊一純撓（c）並調整常數 b_4 使在邊界上（ $r=a$ ），

$$\int_{-c}^c \sigma_r z dz = 0$$

如此則 σ_r 之最後算式為

$$\sigma_r = q \left[\frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3+\nu)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2+\nu}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3+\nu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right] \quad (198)$$

在板之中心為

$$(\sigma_r)_{r=0} = q \left[\frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2+\nu}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3+\nu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right] \quad (f)$$

板撓曲之初等理論，根據垂直於中面（ $z=0$ ）板之線單元撓曲後保持為直線並垂直於板之撓曲面（註），所得在中心處之徑向應力為

$$\sigma_r = \frac{3(3+\nu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} q \quad (g)$$

將此與（f）比較，知正確解所增各項如板之厚度 zc 較半徑 a 為小時其值甚小。

應注意疊加純撓時吾人消去沿板邊界上之撓矩；但在邊界上留有

（註）此項假設與梁撓曲理論中之“平面斷面”假設類比，板撓曲之正確理論係由 J. H. Michell 所發展，見 *Proc. London Math. Soc.* vol. 31 p. 114, 1899, 及 Love, *op. cit.*, p. 465.

徑向應力，如下式

$$(\sigma_r)_{r=a} = q \left(\frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2+\nu}{5} \frac{z}{c} \right) \quad (h)$$

但此等應力沿邊界線每單位長之合力及力矩均為零，因此，由聖維南原理，吾人知此等應力之消除與否對距邊緣遠處之應力分布不發生顯著影響。

取應力函數較六次更高之多項式，吾人可研究非均勻分布荷力圓板之撓曲。同時應用 $Q_n(x)$ 及 $P_n(x)$ 吾人求有中心空洞圓板之解(註1)。僅當撓度對板厚為小值時此等解方稱足夠正確。對較大撓度，板中面之拉長必須予以考慮(註2)。

第一三四節 三維旋轉盤問題

以前討論中(見第32節)曾設沿盤厚度應力不變化。現對同一問題重新考慮僅設應力分布係對旋轉軸為對稱。平衡微分方程式可在(188)式中納入離心力求得。如此則

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (199)$$

內 ρ 為單位體積質量， ω 為盤角轉速度。

配合方程式亦須予以適應。吾人將用85第節(g)三方程式及(h)三方程式。將以下體力

$$X = \rho \omega^2 x \quad Y = \rho \omega^2 y \quad Z = 0 \quad (a)$$

代入此等方程式中，最後三式，含剪應力分量，與(126)體系相同。前三式則為

$$\nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = -\frac{2\rho\omega^2}{1-\nu}$$

(註1) 對稱荷力圓板問題曾由 A. Korobov 所討論，見 *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1913. 類似解見 A. Timpe, *Z. Angew. Math. Mech.* vol. 4, 1924.

(註2) 參考 Kelvin and Tait, “自然哲學” vol. 2, p. 171, 1903.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} &= -\frac{2\rho\omega^2}{1-\nu} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= -\frac{2\nu\rho\omega^2}{1-\nu} \end{aligned} \quad (b)$$

由方程式 (199) 之一適應配合方程式特解開始。在此解上重疊 (194) 及 (195) 多項式之解，並調整多項式各常數，使適應問題之邊界條件。

對特解取下列各式

$$\sigma_r = Br^2 + Dz^2 \quad \sigma_z = Ar^2 \quad \sigma_\theta = Cr^2 + Dz^2 \quad \tau_{rz} = 0 \quad (c)$$

此等式適應平衡方程式中第二個，亦可適應含剪應力之配合方程式，餘為決定各種數 A, B, C, D ，使適應其他四個方程式，即 (199) 中第一個與 (b) 內各式。將 (c) 代於此等方程式中，得

$$A = \frac{\rho\omega^2(1+3\nu)}{6\nu} \quad B = -\frac{\rho\omega^2}{3} \quad C = 0 \quad D = -\frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)}$$

如此則特解為

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\rho\omega^2}{3} r^2 - \frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)} z^2 \\ \sigma_z &= \frac{\rho\omega^2(1+3\nu)}{6\nu} r^2 \\ \sigma_\theta &= -\frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)} z^2 \\ \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \quad (200)$$

此解可用以討論對母線旋轉任何物體之應力。

在厚度一致之圓盤問題中，每人於解 (200) 上重疊一得自五次多項式應力函數之應力分布 ((194) 及 (195))，

$$\phi = a_5(8z^4 - 40r^2z^3 + 15r^4z) + b_5(2z^3 - r^2z^3 - 3r^4z) \quad (d)$$

如此則 (189) 式為

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -a_5(180r^2 - 240z^2) + b_5[(36 - 54\nu)r^2 + (1 + 18\nu)6z^2] \\ \sigma_\theta &= a_5(-60r^2 + 240z^2) + b_5[(6 + 108\nu)z^2 + (12 - 54\nu)r^2] \\ \sigma_z &= -a_5(-240r^2 + 480z^2) + b_5[(96 - 108\nu)z^2 + (-102 + 54\nu)r^2] \\ \tau_{rz} &= 480a_5rz - b_5(96 - 108\nu)rz \end{aligned} \quad (e)$$

將此加於 (200) 並決定 a_3 及 b_5 兩常數使應力 τ_{rz} 及 σ_z 之總合爲零，得

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\rho\omega^2 \left[\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} z^2 + \frac{3+\nu}{8} r^2 \right] \\ \sigma_\theta &= -\rho\omega^2 \left[\frac{(1+3\nu)}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} z^2 \right]\end{aligned}\quad (f)$$

爲消除沿邊緣上徑向壓力，亦即使

$$\left(\int_{-c}^c \sigma_r dz \right)_{r=a} = 0$$

吾人重疊一徑向拉應力值爲

$$\frac{\rho\omega^2}{8} (3+\nu)a^2 + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \frac{c^2}{3}$$

最後應力爲 (註 1)

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \rho\omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} (a^2 - r^2) + \frac{\nu(1+\nu)}{6(1-\nu)} (c^2 - 3z^2) \right] \\ \sigma_\theta &= \rho\omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} a^2 - \frac{1+3\nu}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{6(1-\nu)} (c^2 - 3z^2) \right] \\ \sigma_z &= 0 \quad \tau_{rz} = 0\end{aligned}\quad (201)$$

將此與前解 (54) 比較，知此解多出因數爲 (註 2) $(c^2 - 3z^2)$ 各項。如盤爲薄板對應之應力甚小且在盤厚度上總和爲零。如盤之邊緣無外力作用，(201) 解代表距邊緣遠處應力情況。

形式爲扁平橢圓體旋轉盤之應力分布經爲屈雷 (C. Chree) (註 3) 氏所討論。

(註 1) Love, *op. cit.* pp. 147-148 曾用另一方法導出此式。位移算式，及中心自由孔洞引進各項，亦均求得。

(註 2) 此等項性質與第 98 節各含 z^2 項相同。因 σ_z 及 τ_{rz} 均爲零，故方程式 (201) 代表平面應力情況。體力 (此處離心力)，不存在於第 98 節，當與 z 無關時並不影響一般結論。

(註 3) *Proc. Roy. Soc. (London)*, vol. 58, p. 39, 1895. 對一般橢球體，閱 M. A. Goldberg & M. Sadowsky, *J. Appl. Mech.*, vol. 26, pp. 549-552, 1959.

第一三五節 力作用於無限體內一點上

當坐標原點為力之作用點時，某些或所有應力分量必在該處有異性。適當解可自第399頁 (a) 式尋求視為 (192) 式之一解。視 n 為業經選定，比較 (a) 式與將 n 換為 $-n-1$ 所得之式，則得

$$\phi_{-n-1} = R^{-n-1} \Psi_{-n-1} \tag{a}$$

第 132 節中方程式 (b) 之係數 $n(n+1)$ 變為 $(-n-1)(-n)$ ，故對 Ψ_{-n-1} 及 Ψ_n 有同一值，結果上式亦可寫為

$$\phi_{-n-1} = R^{-n-1} \Psi_n$$

對 Ψ_n 用 $P_n(x)$ 如第399頁，吾人得 (192) 及 (191) 以下之解集，

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A_1 (r^2 + z^2)^{-1/2} \\ \phi_2 &= A_2 z (r^2 + z^2)^{-3/2} \\ \phi_3 &= A_3 [z^2 (r^2 + z^2)^{-5/2} - 1/3 (r^2 + z^2)^{-3/2}] \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{202}$$

將 (202) 各算式乘以 $r^2 + z^2$ (閱第400頁)，吾人得 (191) 之另一解集，即

$$\begin{aligned} \phi_1 &= B_1 (r^2 + z^2)^{1/2} \\ \phi_2 &= B_2 z (r^2 + z^2)^{-1/2} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{203}$$

每一 (202) 及 (203) 中之解，與其任何線性組合，可取為應力函數，對係數 $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ ，作適當之調整，可求得各式問題之解。

對一集中力，吾人取 (203) 中第一算式。去底標後，應力函數可寫為

$$\phi = B (r^2 + z^2)^{1/2}$$

B 為一常數其值以後決定。代入 (189) 式，各應力分量為

$$\sigma_r = B [(1-2\nu)z (r^2 + z^2)^{-3/2} - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-5/2}]$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} &= B(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-3/2} \\ \sigma_z &= -B[(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-3/2} + 3z^3(r^2+z^2)^{-5/2}] \quad (204) \\ \tau_{rz} &= -B[(1-2\nu)r(r^2+z^2)^{-3/2} + 3rz^2(r^2+z^2)^{-5/2}]\end{aligned}$$

此等應力在坐標原點，即集中力作用點上均為異性，因此吾人視原點為一小球體空洞之中心（圖203），並由（204）各式計算作用於洞孔

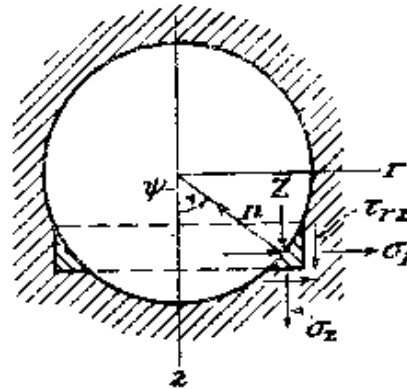


圖 203

球面上之力。此等力之總和可證明為一經原點沿 z 軸線之力。由一環形單元之平衡條件（圖203），表面各力之 Z 向分量為

$$\bar{Z} = -(\tau_{rz} \sin \psi + \sigma_z \cos \psi)$$

用方程式（204）及以下關係

$$\sin \psi = r(r^2+z^2)^{-1/2} \quad \cos \psi = z(r^2+z^2)^{-1/2}$$

吾人得

$$\bar{Z} = B[(1-2\nu)(r^2+z^2)^{-1} + 3z^3(r^2+z^2)^{-3}]$$

此等作用於空洞表面上力之總和為

$$2 \int_0^{\pi/2} \bar{Z} \sqrt{r^2+z^2} d\psi 2\pi r = 8B\pi(1-\nu)$$

因對稱條件，沿徑向表面力之和為零。如 P 為施力值，得

$$P = 8B\pi(1-\nu)$$

代

$$B = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \quad (205)$$

於 (204)，式吾人即得沿 Z 軸施於原點力 P 所生之應力 (註)。此力由作用於一球體或其他邊界外表面力所平衡。此解為前於第42所討論二維問題之三維類比。

代 $z=0$ 於 (204)，知在 $z=0$ 平面上無正交應力作用。同一平面上剪應力為

$$\tau_{rz} = -\frac{B(1-2\nu)}{r^2} = -\frac{P(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)r^2} \quad (c)$$

此應力與對施力點距離平方成反比。

第一三六節 受內外均勻壓力之球體容器

由前節所得解用重疊法可得重要新解。吾人由兩等值反向力，中間隔一小距離，作用於無限彈性體內之問題開始 (圖 204)。在原點上施力 P 所生應力已由 (204) 及 (205) 兩式所決定。因第二力係作用於相反方向並視距離 d 為極小，在 (204) 內任一項 $f(r, z)$ 應由

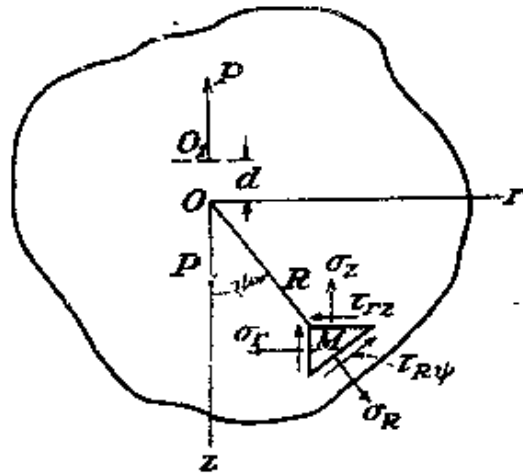


圖 204

(註) 此解為克爾文爵士所得，見 *Cambridge and Dublin Math. J.*, 1848.

另閱其 "Math. and Phys. Papers," vol. 1. p. 37. 由此解知對應於 (204) 之位移為單值者，故為一正確解 (閱第96節)。

$- \left[f + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) d \right]$ 代替之。重疊此兩所產力之應力並用 A 代替乘積 Bd ，得

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-3/2} - 3r^2z(r^2+z^2)^{-5/2}] \\ \sigma_\theta &= -A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-3/2}] \\ \sigma_z &= A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-3/2} + 3z^3(r^2+z^2)^{-5/2}] \\ \tau_{rz} &= A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)r(r^2+z^2)^{-3/2} + 3rz^2(r^2+z^2)^{-5/2}] \quad (206)\end{aligned}$$

現考慮作用於 M 點上垂直於半徑 OM 面積單元之應力分量 σ_R 及 $\tau_{R\psi}$ (圖 204)。由圖中所示小三角形單元之平衡條件，吾人得以下關係 (註)

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \sigma_r \sin^2 \psi + \sigma_z \cos^2 \psi + 2\tau_{rz} \sin \psi \cos \psi \\ \tau_{R\psi} &= (\sigma_r - \sigma_z) \sin \psi \cos \psi - \tau_{rz} (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \quad (a)\end{aligned}$$

用 (206)，並取

$$\sin \psi = r(r^2+z^2)^{-1/2} = \frac{r}{R} \quad \cos \psi = z(r^2+z^2)^{-1/2} = \frac{z}{R}$$

得

$$\begin{aligned}\sigma_R &= -\frac{2(1+\nu)A}{R^3} \left[-\sin^2 \psi + \frac{2(2-\nu)}{1+\nu} \cos^2 \psi \right] \\ \tau_{R\psi} &= -\frac{2(1+\nu)A}{R^3} \sin^2 \psi \cos \psi \quad (b)\end{aligned}$$

此等應力之分布對 z 軸及垂直於 z 軸之坐標面為對稱者。

現想像在原點上，除作用於 z 軸之兩力體系外，一相同之體系沿 r 軸及另一沿垂直於 rz 面之軸。由以上所述之對稱關係，如此吾人得

(註) 另一分量 σ_θ 作用於單元子午面上，有一高階微合力，在平衡方程式中可忽計。

一對稱於原點之應力分布，如吾人在原點上取一球體，將僅有一均勻分布之正交應力作用於此球體表面上。此應力值可由 (b) 式中第一個式算出。考慮在 rz 平面內圓上各點之應力，(b) 之第一式即為由沿 z 軸之雙力 (double force) 所提供部分。由互換 $\sin \psi$ 及 $\cos \psi$ ，吾人得沿同一圓由作用於 r 向之雙力所生之正交應力。由垂直於 rz 面之雙力所生之正交應力可由代 $\psi = \pi/2$ 於同一式中求得。將此三互相垂直雙力作用重疊，吾人得以下正交應力作用於球體表面上：

$$\sigma_R = -\frac{4(1-2\nu)A}{R^3} \quad (c)$$

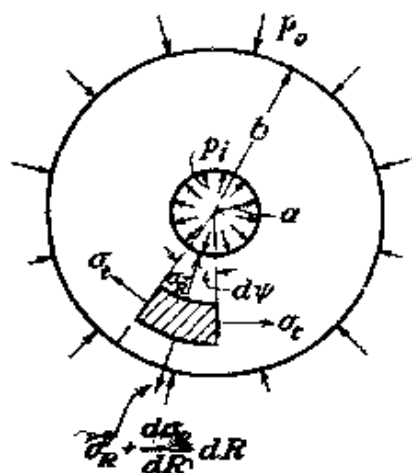


圖 205

此三垂直雙力之組合稱為壓力中心 (center of compression)。由 (c) 知沿徑向之壓應力僅與對壓力中心之距離有關且係與此距離之三次方成反比。此球對稱解可用於尋求受已知內壓及外壓空心球 (註) 體之應力 (圖205)。在 (c) 上疊加一各向均勻拉力或壓力，吾人對徑向正交應力取一普遍形式

$$\sigma_R = \frac{C}{R^3} + D \quad (d)$$

C 及 D 為常數，其值將由容器內外表面上條件決定。如設 p_i 為內壓

(註) 此問題可直接用徑向位移 u_R 解出。

力， p_o 爲壓力，則

$$\frac{C}{a^3} + D = -p_i \quad \frac{C}{b^3} + D = -p_o$$

因此

$$C = \frac{(p_i - p_o)a^3b^3}{a^3 - b^3}$$

$$D = \frac{p_o b^3 - p_i a^3}{a^3 - b^3}$$

$$\sigma_R = \frac{p_o b^3 (R^3 - a^3)}{R^3 (a^3 - b^3)} + \frac{p_i a^3 (b^3 - R^3)}{R^3 (a^3 - b^3)} \quad (207)$$

壓力 p_i 及 p_o 在球體內亦生切線方向之正交應力，內值可由自球體內由兩心球面半徑爲 R 及 $R + dR$ 及一圓錐所割取單元之平衡條件求出 (圖205)。平衡方程式爲

$$\sigma_t \frac{\pi R}{2} dR (d\psi)^2 = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{\pi R^2}{4} dR (d\psi)^2 + \sigma_R \frac{\pi R}{2} dR (d\psi)^2$$

整理後得

$$\sigma_t = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{R}{2} + \sigma_R \quad (e)$$

用 (207) 式之 σ_R 代入此式，得

$$\sigma_t = \frac{p_o b^3 (2R^3 + a^3)}{2R^3 (a^3 - b^3)} - \frac{p_i a^3 (2R^3 + b^3)}{2R^3 (a^3 - b^3)} \quad (208)$$

如 $p_o = 0$ ，則

$$\sigma_t = \frac{p_i a^3}{2R^3} \frac{(2R^3 + b^3)}{b^3 - a^3}$$

現知最大值之切線拉應力此例中係發生於內面上，其值爲

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{p_i}{2} \frac{2a^3 + b^3}{b^3 - a^3}$$

所有以上結果均係藍梅 (Lamé) 氏所求得 (註)。

(註) 見 "Lecons sur la Théorie de l'Elasticité," Paris, 1852.

第一三七節 球孔附近局部應力

第二例取一桿受均勻拉力 S (圖206) 內一小球孔附近之應力分布 (註1)。
一實體桿受拉力時，正交及剪應力分量作用於一球體表面為

$$\sigma_R = S \cos^2 \psi \quad \tau_{R\psi} = -S \sin \psi \cos \psi \quad (a)$$

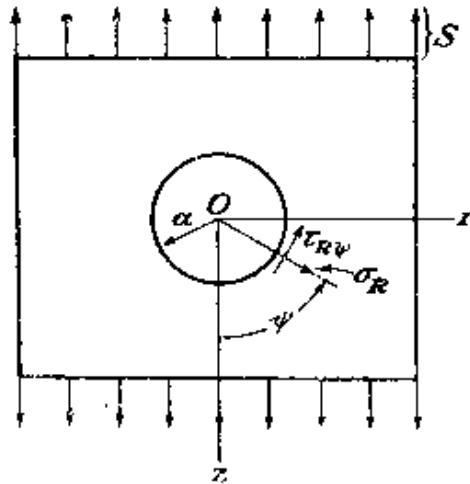


圖 206

為求一半徑為 a 小球孔所造成之應力分布，吾人須於簡拉上疊加一應力體系其在球面上各分量與 (a) 所示者等值反向而在遠處消失。

取前節之應力體系 (b)，即由 z 向雙力所產生者，及應力體系 (c)，由壓力中心所致，則在半徑為 a 之球面上之應力可由以下各式代表之：

$$\sigma_R' = -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \left(-1 + \frac{5-\nu}{1+\nu} \cos^2 \psi \right)$$

$$\tau_{R\psi}' = -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \sin \psi \cos \psi \quad (b)$$

$$\sigma_R'' = \frac{B}{a^3} \quad \tau_{R\psi}'' = 0 \quad (c)$$

A 及 B 為兩常數其值待定。將 (b) 及 (c) 組合後，不能使簡拉所致之應力 (a) 完全消失，故必須另加一應力體系。

(註1) 此體之解係 R. V. Southwell 所得，見哲學雜誌 (*Phil. Mag.*, 1926)。對含不同材料參考 N. Goodier, *Trans. ASME* vol. 55, p. 39, 1933。橢圓體孔為 E. Sternberg 及 M. Sadowsky 所解，見 *J. Appl. Mech.*, vol. 16, p. 149, 1949。

由 (202) 式各解中，取應力函數

$$\phi = Cz(r^2 + z^2)^{-3/2}$$

對應之應力分量，由 (189) 式，為

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3C}{R^5}(-4 + 35 \sin^2 \psi \cos^2 \psi) \\ \sigma_z &= \frac{3C}{R^5}(3 - 30 \cos^2 \psi + 35 \cos^4 \psi) \\ \sigma_\theta &= \frac{3C}{R^5}(1 - 5 \cos^2 \psi) \\ \tau_{rz} &= \frac{15C}{R^5}(-3 \sin \psi \cos \psi + 7 \sin \psi \cos^3 \psi)\end{aligned}\quad (d)$$

用上節中方程式 (a) 式，作用於半徑為 a 球面上各應力分量為

$$\sigma_R''' = \frac{12C}{a^5}(-1 + 3 \cos^2 \psi) \quad \tau_{R\psi}''' = \frac{24C}{a^5} \sin \psi \cos \psi \quad (e)$$

將 (b)，(c)，(e) 各系統組合，得

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \frac{2(1+\nu)A}{a^3} - 2(5-\nu)\frac{A}{a^3}\cos^2 \psi + \frac{B}{a^3} - \frac{12C}{a^5} + \frac{36C}{a^5}\cos^2 \psi \\ \tau_{R\psi} &= -\frac{2(1+\nu)A}{a^3}\sin \psi \cos \psi + \frac{24C}{a^5}\sin \psi \cos \psi\end{aligned}\quad (f)$$

將此等應力重疊於應力 (a) 上，孔洞之球體表面所有應力均可消失，如吾人適應以下各條件

$$\begin{aligned}\frac{2(1+\nu)A}{a^3} + \frac{B}{a^3} - \frac{12C}{a^5} &= 0 \\ -2(5-\nu)\frac{A}{a^3} + \frac{36C}{a^5} &= -S \\ -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} + \frac{24C}{a^5} &= S\end{aligned}\quad (g)$$

由此可得

$$\frac{A}{a^3} = \frac{5S}{2(7-5\nu)} \quad \frac{B}{a^3} = \frac{S(1-5\nu)}{7-5\nu} \quad \frac{C}{a^5} = \frac{S}{2(7-5\nu)} \quad (h)$$

在任一點上整個應力現可由 (d) 式所示之應力，(206) 式所示之雙力應力，及前節中壓力中心系統 (c) 與 (e) 重疊於筒拉 S 上求得之。

設欲求在平面 $z=0$ 上之應力。由對稱條件知此平面上無剪應力存在，代 $\psi = \pi/2$ 及 $R=r$ 於 (d) 式，得

$$\sigma_z' = \frac{9C}{r^5} = \frac{9Sa^5}{2(7-5\nu)r^5} \quad (i)$$

由 (206) 式，當 $z=0$ 時，

$$\sigma_z'' = \frac{A(1-2\nu)}{r^3} = \frac{5(1-2\nu)S}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} \quad (j)$$

由前節 (e) 式，

$$\sigma_z''' = (\sigma_t)_{z=0} = -\frac{B}{2r^3} = -\frac{S(1-5\nu)}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} \quad (k)$$

作用於 $z=0$ 平面上總應力為

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' + \sigma_z''' + S = S \left[1 + \frac{4-5\nu}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2(7-5\nu)} \frac{a^5}{r^5} \right] \quad (l)$$

在 $r=a$ 處

$$(\sigma_z)_{\max} = \frac{27-15\nu}{2(7-5\nu)} S \quad (m)$$

取 $\nu=0.3$ ，

$$(\sigma_z)_{\max} = 45/22 S$$

故最大應力較作用於桿之均勻拉應力約為兩倍餘。此種應力增加為高度局部性者。當 r 增加時，應力 (l) 快速趨於 S 值。例如，取 $r=2a$ ， $\nu=0.3$ ， $\sigma_z = 1.054 S$ 。

另一分量，在 $z=0$ 平面上，

$$(\sigma_\psi)_{z=0} = \frac{3C}{r^5} - \frac{A(1-2\nu)}{r^3} - \frac{B}{2r^3}$$

自 (h) 式代入各常數值並取 $r=a$ ，得沿球孔赤道線上 ($\psi = \pi/2$)

$$(\sigma_\psi)_{z=0, r=a} = \frac{15\nu-32}{(7-5\nu)} S$$

在洞孔極點上 ($\psi=0$ 或 $\psi=\pi$) 為

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{2(1-2\nu)A}{a^3} - \frac{12C}{a^5} - \frac{B}{2a^3} = -\frac{3+15\nu}{2(7-5\nu)} S$$

故縱向拉力 S 應在此處產生壓應力。

一方向之拉應力 S 與另一垂直方向組合後可得一球孔附近由純剪所致之應力

分布 (註 1) 。最大應力可證爲

$$\tau_{\max} = \frac{15(1-\nu)}{7-5\nu} S \quad (n)$$

此節所得結果可用於討論受週期應力時小孔對材料忍耐限度之影響 (註 2) 。

第一三八節 力作用於半無限體邊界上

設平面 $z=0$ 爲半無限體之邊界，力 P 沿 z 軸作用於此平面上 (圖 207) (註 3) 。前於第 (135) 節中知方程式 (204) 及 (205) 所代表之

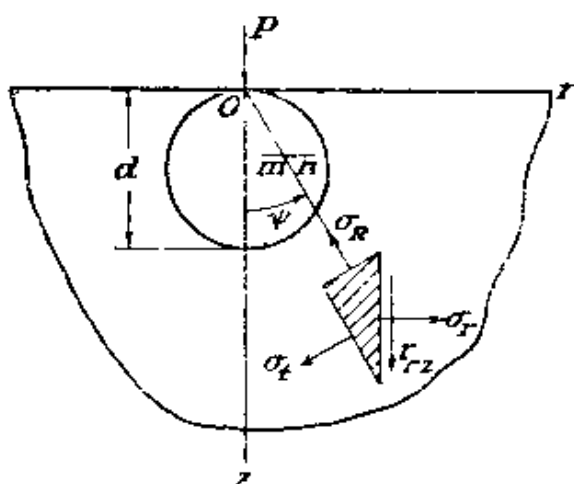


圖 207

(註 1) 此問題曾由 J. Larmor 討論，見 *Phil Mag.*, Ser. 5, vol. 33, 1892. 另閱 Love, *op. cit.*, p. 252. 同書第 11 章中含球坐標更廣泛問題，軸向對稱空球體問題討論見 E. Sternberg. R. A. Eubanks, M. A. Sadowsky, 1st. *U. S. Congress Appl. Mech.*, pp 209-215,

(註 2) 例如，參考 R. V. Southwell and H. J. Gough, *Phil. Mag.*, vol. 1, p. 71, 1926.

(註 3) 此問題爲 J. Boussinesq 所解，見“*Application des Potentials a l' Etude et du Mouvement des Solids Elastiques*,” Gauthier-Villars, Paris, 1885 對切向力，及面上其他邊界條件，參考 Love 書，*op. cit.* 第 167 節，力作用於半無限體內部一點上係 R. D. Mindlin 所得，見 *Phys.*, vol. 7, p. 195, 1936; 另 *Proc. 1st Midwestern Conf Solid Mech.*, pp. 56-59, 1953. 對固定平面邊界，閱 L. Rongved, *J. App. Mech.*, vol. 22, pp. 545-546, 1955.

應力分布可由在原點上一集中力及在邊界平面 $z=0$ 分布之剪應力

$$\tau_{rz} = -\frac{B(1-2\nu)}{r^2} \quad (\text{a})$$

所造成。為消去剪應力分布並達成圖 207 所示問題之解，吾人取用對應於壓力中心之應力分布。用極坐標時此應力分布為

$$\sigma_R = \frac{A}{R^3} \quad \sigma_t = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{R}{2} + \sigma_R = -\frac{1}{2} \frac{A}{R^3}$$

內 A 為一常數。用圓柱坐標（圖207）各應力分量應如以下諸式：

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_R \sin^2 \psi + \sigma_t \cos^2 \psi = A(r^2 - 1/2z^2)(r^2 + z^2)^{-5/2} \\ \sigma_z &= \sigma_R \cos^2 \psi + \sigma_t \sin^2 \psi = A(z^2 - 1/2r^2)(r^2 + z^2)^{-5/2} \\ \tau_{rz} &= 1/2(\sigma_R - \sigma_t) \sin 2\psi = 3/2Arz(r^2 + z^2)^{-5/2} \\ \sigma_\theta &= \sigma_t = -\frac{1}{2} \frac{A}{R^3} = -\frac{1}{2} A(r^2 + z^2)^{-3/2} \end{aligned} \quad (209)$$

現設壓力中心沿 z 軸自 $z=0$ 至 $0=-\infty$ 均勻分布。由重疊原理，在一無限體內所產生之應力分布，得自方程式（209）為

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A_1 \int_z^\infty (r^2 - 1/2z^2)(r^2 + z^2)^{-5/2} dz \\ &= \frac{A_1}{2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2}(r^2 + z^2)^{-1/2} - z(r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \\ \sigma_z &= A_1 \int_z^\infty \left(z^2 - \frac{1}{2}r^2 \right) (r^2 + z^2)^{-5/2} dz = \frac{A_1}{2} z(r^2 + z^2)^{-3/2} \\ \tau_{rz} &= \frac{3}{2} A_1 \int_z^\infty rz(r^2 + z^2)^{-5/2} dz = \frac{A_1}{2} r(r^2 + z^2)^{-3/2} \\ \sigma_\theta &= -\frac{1}{2} A_1 \int_z^\infty (r^2 + z^2)^{-3/2} dz = -\frac{A_1}{2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2}(r^2 + z^2)^{-1/2} \right] \end{aligned} \quad (210)$$

在 $z=0$ 平面上正交應力為零，而剪應力為

$$(\tau_{rz})_{z=0} = \frac{1}{2} \frac{A_1}{r^2} \quad (\text{b})$$

現知將 (204) 及 (210) 組合後，對常數 A_1 及 B 作適當之調整，可得一應力分布使 $z=0$ 平面上無應力存在及一集中力 P 作用於原點上，由 (a) 及 (b) 知如取

$$-B(1-2\nu) + \frac{A_1}{2} = 0$$

或

$$A_1 = 2B(1-2\nu)$$

可消去邊界面上剪應力。代入 (210) 式並將 (204) 及 (210) 各應力相加，得

$$\begin{aligned} \sigma_r &= B \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2+z^2)^{-1/2} \right] - 3r^2 z (r^2+z^2)^{-5/2} \right\} \\ \sigma_z &= -3Bz^3 (r^2+z^2)^{-5/2} \\ \sigma_\theta &= B(1-2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2+z^2)^{-1/2} + z(r^2+z^2)^{-3/2} \right] \\ \tau_{rz} &= -3Brz^2 (r^2+z^2)^{-5/2} \end{aligned} \quad (c)$$

此應力分布適應邊界條件，因 $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$ ， $z=0$ 。現只需決定 B 值使中心為原點半球面上分布之力與作用於 z 軸之力 P 為靜力相當者。考慮圖203所示單元之平衡，作用於半球面各力之 z 向分量為

$$\bar{Z} = -(\tau_{rz} \sin \psi + \sigma_z \cos \psi) = 3Bz^3 (r^2+z^2)^{-5/2}$$

為求 B 值吾人用方程式

$$P = 2\pi \int_0^{\pi/2} \bar{Z} r (r^2+z^2)^{1/2} d\psi = 6\pi B \int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi \sin \psi d\psi = 2\pi B$$

由此得

$$B = \frac{P}{2\pi}$$

最後，將常數 B 代入 (c) 式後得以下各式，為作用一半無限體平面邊界上一垂直力 P 所生之各應力分量

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2+z^2)^{-1/2} \right] - 3r^2 z (r^2+z^2)^{-3/2} \right\} \\
 \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} z^3 (r^2+z^2)^{-5/2} \\
 \sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left\{ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2+z^2)^{-1/2} + z (r^2+z^2)^{-3/2} \right\} \\
 \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} r z^2 (r^2+z^2)^{-3/2} \quad (211)
 \end{aligned}$$

此解為第36節所示半無限平面解之三維類比解。

如吾人取一垂直於 z 軸之面積單元 mm (圖207)，正交與剪應力分量比例為，由方程式 (211)

$$\frac{\sigma_z}{\tau_{rz}} = -\frac{z}{r} \quad (d)$$

因此應力和之方向經過原點 O 。此應力和之值為

$$S = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{rz}^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2}{(r^2+z^2)^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{\cos^2 \psi}{(r^2+z^2)} \quad (212)$$

故應力與對外力 P 作用點距離正成反比。設想一直徑為 d 之球面，在原點上切於平面 $z=0$ 。對應此面上每一點

$$r^2 + z^2 = d^2 \cos^2 \psi \quad (e)$$

代入 (212) 式，對在球面上各點水平面上應力和得一結論，即皆為 $3P/2\pi d^2$ 之常數。

現考察外力 P 對半無限體所發生之位移。由方程式 (187) 知對應變分量

$$u = \epsilon_\theta r = \frac{r}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]$$

將方程式 (211) 之應力分量代入上式後，得

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi E r} \\
 &\quad \left[z(r^2+z^2)^{-1/2} - 1 + \frac{1}{1-2\nu} r^2 z (r^2+z^2)^{-3/2} \right] \quad (213)
 \end{aligned}$$

對決定豎向位移 w ，由方程式 (187)，知

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)\tau_{rz}}{E} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

代入各應力分量，及以上所得之位移 u ，吾人得

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P}{2\pi E} \{3(1+\nu)r^2 z (r^2 + z^2)^{-3/2} - [3 + \nu(1-2\nu)]z (r^2 + z^2)^{-3/2}\}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{P(1+\nu)}{2\pi E} [2(1-\nu)r (r^2 + z^2)^{-3/2} + 3rz^2 (r^2 + z^2)^{-5/2}]$$

對上兩式積分，不計一任意常數，得

$$w = \frac{P}{2\pi E} [(1+\nu)z^2 (r^2 + z^2)^{-3/2} + 2(1-\nu^2)(r^2 + z^2)^{-1/2}] \quad (214)$$

對邊界平面 ($z=0$) 位移為

$$(w)_{z=0} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi E r} \quad (w)_{z=0} = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E r} \quad (215)$$

此示在邊界上 w/r 為一常數。因此由邊界平面原點處所畫各半徑，變形後為以 O_r 及 O_z 為漸近線之雙曲線組。故吾人必須設想原點附近材料由一小半徑之半球面割離，而集中力 P 則由分布於此面上之靜力相當力系且為此解所需者代替。

第一三九節 荷力分布於半無限體部分邊界上

已知作用於半無限體邊界上集中力之解，吾人可由重疊原理求分布力所產生之位移之應力。取一簡單例，設均勻外力分布於半徑 a 之圓面積上 (圖208)，並考慮一點 M 沿荷力方向之位移。此點在邊界面上距荷力中心為 r 。取荷方面積中一單元如圖所示，在夾角為 $d\psi$ 之兩徑向及半徑為 s 及 ds 兩弧間，均自 M 畫起，此單元上荷力為 $qs d\psi ds$ 。 M 點之位移，由方程式 (215)，為

$$\frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \frac{s d\psi ds}{s} = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} d\psi ds$$

總位移可由以下重積分求出

$$w = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \int \int d\psi ds$$

先對 s 積分並弦 mn 長為 $2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \theta}$ 之事實，吾人得

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \int_0^{\psi_1} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} d\psi \quad (a)$$

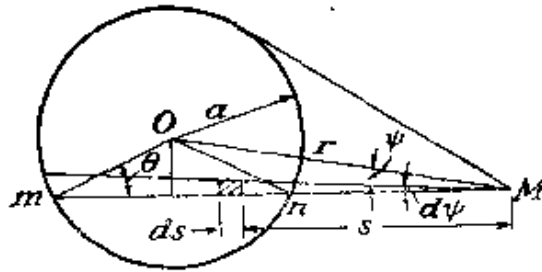


圖 208

此中 ψ_1 為 ψ 之最大值，亦即 r 與圓切線間之夾角。積分 (a) 之計算可由引進變數 θ ，代替變數 ψ 予以簡化，由圖 208 知

$$a \sin \theta = r \sin \psi$$

因得

$$d\psi = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \cos \psi} = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \sqrt{1 - (a^2/r^2) \sin^2 \theta}}$$

代入 (a) 式並取 θ 自 0 變至 $\pi/2$ ，得

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \cos^3 \theta d\theta}{r \sqrt{1 - (a^2/r^2) \sin^2 \theta}} = \frac{4(1-\nu^2)qr}{\pi E} \left[\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (a^2/r^2) \sin^2 \theta} d\theta - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (a^2/r^2) \sin^2 \theta}} \right] \quad (216)$$

此方程式內之積分稱為完全橢圓積分，其值對任何 a/r 可自表中取得

(註)。

為求荷力圓邊界上之位移，於 (216) 式中取 $r=a$ ，得

$$(w)_{r=a} = \frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E} \quad (217)$$

如 M 係在受力面積內 (圖 209a)，吾人仍取由陰影受力部分之面積單元之位移。則總位移仍為

$$w = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \iint ds d\psi$$

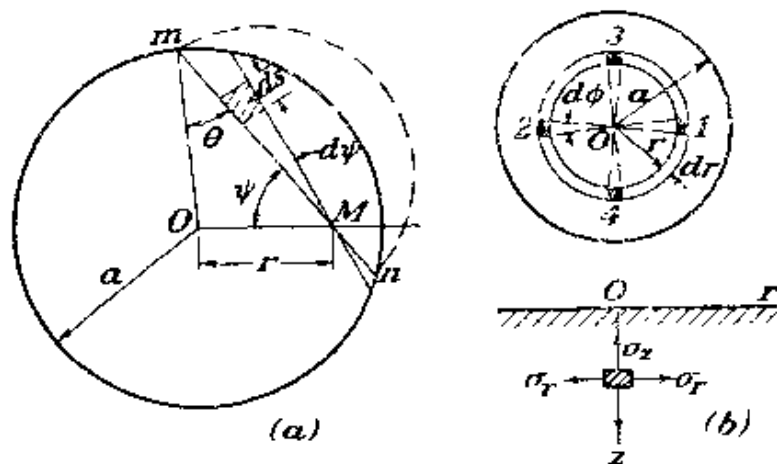


圖 209

弦 mn 長為 $2a \cos \theta$ ， ψ 為自零至 2π ，故

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \int_0^{\pi/2} a \cos \theta d\psi$$

或，因 $a \sin \theta = r \sin \psi$ ，吾人得

$$w = \frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (r^2/a^2) \sin^2 \psi} d\psi \quad (218)$$

因此用橢圓積分表對任何 r/a 比值位移即易於算出。最大位移當然發生於圓心處。代 $r=0$ 於方程式 (218) 中，得

(註) 參考 E. Jahnke, F. Emde, 及 F. Lösch, "Tables of Higher Functions", McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

$$(w)_{\max} = \frac{2(1-\nu^2)qa}{E} \quad (219)$$

將此結果與圓邊界上位移相較知後者為最大位移乘以因數 $2/\pi$ (註1)。對一已知密度之荷力 q 最大位移為常數，而係隨受力圓半徑之增加而遞增(註2)。

用重疊法亦可計算應力，例如，求在 z 軸上一點之應力(圖209b)。由半徑為 r 及 $(r+dr)$ 受力環在此點上所生之應力可於(211)式之第二式中以 $2\pi r dr q$ 代替 P 求得。如此則分布於全圓上均勻荷力之應力 σ_z 為

$$\begin{aligned} \sigma_z &= - \int_0^a 3qr dr z^3 (r^2 + z^2)^{-5/2} = qz^3 \left[(r^2 + z^2)^{-3/2} \right]_0^a \\ &= q \left[-1 + \frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (b) \end{aligned}$$

在邊界面上此應力等於 $-q$ 而距離 z 增加時則逐漸減小。於同一點上計算 σ_r 及 σ_θ ，取兩受力單元1及2(圖209b)，其受力為 $qr d\phi dr$ 。在 z 軸上一點因此兩單元力所生之應力，由方程式(211)之第二及第三式，為

$$\begin{aligned} d\sigma_r' &= \frac{qr d\phi dr}{\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right\} \\ d\sigma_\theta' &= \frac{qr d\phi dr}{\pi} (1-2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} + z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \quad (c) \end{aligned}$$

(註1) 此問題解為Boussinesq所得，*loc. cit.* 參閱 Lamb, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 34, p. 276, 1902; K. Terazawa, *J. Coll. Sci., Univ. Tokyo*, vol. 37, 1916; F. Schleicher, *Bauingenieur*, vol. 7, 1926, 及 *Bauingenieur*, vol. 14, p. 242, 1933. 完整之研究，見 A. E. H. Love, *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 228, 1929. 另閱 S. Way, *J. Appl. Mech.*, vol. 7, p. A-147, 1940.

(註2) 此結論，及對非圓荷力區之引伸，均可由問題之簡單維度分析求得。

在同一平面上由單元荷力 3 及 4 所發生之正交應力爲

$$\begin{aligned} d\sigma_r'' &= \frac{qr}{\pi} \frac{d\phi}{dr} (1-2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2+z^2)^{-1/2} + z(r^2+z^2)^{-3/2} \right] \\ d\sigma_\theta'' &= \frac{qr}{\pi} \frac{d\phi}{dr} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2+z^2)^{-1/2} \right] - 3r^2 z (r^2+z^2)^{-5/2} \right\} \end{aligned} \quad (d)$$

將 (c) 與 (d) 相加，四單元上荷力所生應力爲

$$\begin{aligned} d\sigma_r = d\sigma_\theta &= \frac{qr}{\pi} \frac{d\phi}{dr} \left[(1-2\nu) z (r^2+z^2)^{-3/2} - 3r^2 z (r^2+z^2)^{-5/2} \right] \\ &= \frac{qr}{\pi} \frac{d\phi}{dr} \left[-2(1+\nu) z (r^2+z^2)^{-3/2} + 3z^3 (r^2+z^2)^{-5/2} \right] \end{aligned} \quad (e)$$

爲求半徑爲 a 圓上全荷力所生之應力，將 (e) 式對 ϕ 在零及 $\pi/2$ 限內及對 r 由零至 a 限內積分，結果爲

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= \frac{q}{2} \int_0^a \left[-2(1+\nu) z (r^2+z^2)^{-3/2} + 3z^3 (r^2+z^2)^{-5/2} \right] r dr \\ &= \frac{q}{2} \left[-(1+2\nu) + \frac{2(1+\nu)z}{\sqrt{a^2+z^2}} - \left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (f)$$

對荷力圓中心 O 點，由 (b) 及 (f) 式，得

$$\sigma_z = -q \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{q(1+2\nu)}{2}$$

取 $\nu = 0.3$ ，知 $\sigma_r = \sigma_\theta = 0.8q$ 。最大剪應力在 O 點處，與 z 軸成 45° 之平面上，等於 $0.1q$ ，設材料之屈服係由最大剪應力所決定，可證明上述 O 點並非在 z 上之最弱點。在 z 軸上任意一點之最大剪應力 (圖 209b)，由 (b) 及 (f) 式，爲

$$\frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_z) = \frac{q}{2} \left[\frac{1-2\nu}{2} + (1+\nu) \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right)^3 \right] \quad (g)$$

此式當適應以下條件時

$$\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{2(1+\nu)}$$

變為極大值，解 z 得

$$z = a \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{7-2\nu}} \quad (\text{h})$$

代於 (g) 式得

$$\tau_{\max} = \frac{q}{2} \left[\frac{1-2\nu}{2} + \frac{2}{9} (1+\nu) \sqrt{2(1+\nu)} \right] \quad (\text{k})$$

設 $\mu=0.3$ ，得由 (h) 及 (k) 式

$$z = 0.638a \quad \tau_{\max} = 0.33q$$

此示在 z 軸上最大剪應力之點係在約三分之二荷力圓半徑之深度處，其最大值約為均勻壓力 q 之三分之一。

對一受均勻壓力分布之正方形每邊長 $2a$ ，中心處最大位移為

$$w_{\max} = \frac{8}{\pi} \ln(\sqrt{2}+1) \frac{qa(1-\nu^2)}{E} = 2.24 \frac{qa(1-\nu^2)}{E} \quad (220)$$

正方形四角上位移僅為中心處之一半，位移之平均值為

$$w_{\text{av}} = 1.90 \frac{qa(1-\nu^2)}{E} \quad (221)$$

對均勻分布壓力於各式長寬比 $\alpha = a/b$ 之矩形上，類似之計算亦曾作出。所有結果均可以 (註1)

$$w_{\text{av}} = m \frac{P(1-\nu^2)}{E \sqrt{A}} \quad (222)$$

代表之。式內 m 為與 α 有關之因子， A 為受均勻壓力面積， P 為總荷力。因子 m 值列如下表中。對已知荷力 P 及面積 A 位移常周界與荷力面積比例減小時增加。方程式 (202)

(註) 參考 Schleicher, *loc. cit.*

方程式 (222) 中因子 m 值

	圓	正方	各式矩形 $\alpha = \frac{a}{b}$					
			1.5	2	3	5	10	100
$m =$	0.96	0.95	0.94	0.92	0.88	0.82	0.71	0.37

有時用於討論工程結構基礎之下沉 (註1)。爲使結構各部分有相等之下沉，基礎上平均壓力須與荷力面形式及大小有某一關係。

在以上討論中設荷力爲已知而求其所生之位移。現檢討當位移爲已知而需求在邊界面上對應之壓力分布。例如，取一圓柱形絕對剛體壓模對半無限彈性體邊界平面施以壓力。此時在模之圓形底面下位移爲一常數。壓力分布則並非均勻，其密度爲下式所示 (註2)

$$q = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (223)$$

內 P 爲模上之總壓力， a 爲模之半徑， r 爲對壓力圓中心距離。此壓力之分布明顯爲非均勻者其最小值係在荷力中心處 ($r=0$)，故

$$q_{\max} = \frac{P}{2\pi a^2}$$

亦即等圓形接觸面平均壓力值之一半。在同一面積之邊界線上 ($r=a$) 壓力變爲無限大，實際情況爲沿邊上材料必先屈服。但此屈服係屬局部性者，並不太影響距圓邊稍遠各點上之應力分布 (223)。

模之位移爲下式

$$w = \frac{P(1-\nu^2)}{2aE} \quad (224)$$

由此式知對邊界平面上已知之單位平面壓力，位移非常數而係與模之

(註1) 同425頁註。

(註2) 此解係 Boussinesq 所得，*loc. cit.*

半徑 (註1) 以同比率增加。

爲比較計，吾人予以下均勻分布壓力之平均位移〔方程式(218)〕：

$$w_{av} = \frac{\int_0^a w 2\pi r dr}{\pi a^2} = \frac{16}{3\pi^2} \frac{P(1-\nu^2)}{aE} = 0.54 \frac{P(1-\nu^2)}{aE} \quad (225)$$

此平均位移與 (224) 式絕對剛體模之位移差距並不太大。各式非圓模之解均已知 (註2)，含運動模若干動力學問題在內。

第一四〇節 兩球面體間接觸壓力

前節之結果可用爲以討論兩物體接觸時之壓力分布 (註3)。吾人設接觸點處兩物體均爲半徑 R_1 及 R_2 之球面 (圖210)。如兩物體間無壓力存在，則只在一點上接觸。自 O 點切面與點 M 及 N 之距離，設 r (註4) 爲小值，可由下列公式代表之。

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1} \quad z_2 = \frac{r^2}{2R_2} \quad (a)$$

兩點 M 及 N 間之距離爲

$$z_1 + z_2 = r^2 \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) = \frac{r^2(R_1 + R_2)}{2R_1R_2} \quad (b)$$

(註1) 第423頁註2 此處亦可應用。

(註2) J. N. Goodier 及 P. G. Hodge, "Elasticity and Plasticity", New York, 1958, 有此問題大綱，採自蘇聯書 "Contact Problems of the Theory of Elasticity" L. A. Galin. 此書之英譯本 Mrs. H. Moss 所譯由 Department of Math. & Engineering Research, North Carolina State College, Raleigh, N. C. 出版 1961.

(註3) 此問題爲 H. Hertz 所解，*J. Math. (Crelle's J.)* vol. 2, 1881. 另見 Hertz, "Gesammelte Werke", vol. 155, Leipzig, 1895. 其關有關參考資料見 "Handbook of Engineering Mechanics" W. Flügge (ed.)

(註4) r 較 R_1 及 R_2 爲小值。

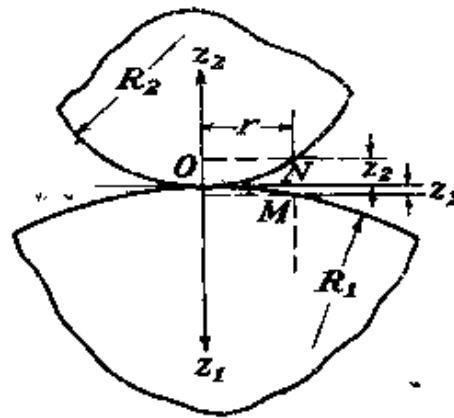


圖 210

如係一球體與一平面接觸 (圖211a), $1/R_1$ 為零, 方程式 (b) 變為

$$\frac{r^2}{2R_2} \quad (c)$$

如一球與一球面座間作如 (圖211b) 之接觸, 方程式 (b) 中 R_1 為負,

$$z_2 - z_1 = \frac{r^2(R_1 - R_2)}{2R_1R_2} \quad (c')$$

如兩物體由在 O 點處沿法線一力 P 壓緊, 在接觸附近將生局部變形使接觸處變為一小圓面稱為接觸面。設兩曲半徑 R_1 及 R_2 與接觸面半徑 r 比較為極大, 在討論局部變形時, 可引用前對半無限體所得結果。如 w_1 代表底球 (圖210) 表面上 M 點沿 z_1 向因局部變形所生之位移, w_2 為頂球 N 點沿 z_2 向之位移。局部壓縮時 O 點之切面保持不動, 在 z_1 及 z_2 軸上任何與 O 遠距離 (註) 之兩點將互相趨近某一 α

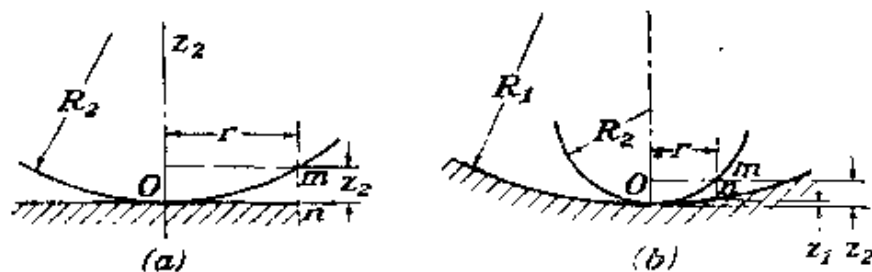


圖 211

(註) 此等距離之值為可使此等點上因壓縮變形為可忽計者。

值， M 與 N 兩點間將減低 $\alpha - (w_1 + w_2)$ 。如最後 M 及 N 落於接觸面內，吾人得

$$\alpha - (w_1 + w_2) = z_1 + z_2 = \beta r^2 \quad (d)$$

內 β 爲一常數視半徑 R_1 及 R_2 而定，可由 (b)，(c) 或 (c') 式求得。因此由幾何觀點知對接觸面上任一點

$$w_1 + w_2 = \alpha - \beta r^2 \quad (e)$$

現考察局部變形。由對稱條件知物體接觸面間壓力密度 q 及對應之變形對接觸面上 O 點對稱。取圖 209a 代表接觸面， M 爲底球接觸面上一點，此點之位移 w_1 ，由前節爲

$$w_1 = \frac{(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1} \iint q \, ds \, d\psi \quad (f)$$

其中 ν_1 及 E_1 爲底球彈性常數，積分爲對全接觸面者，對頂球亦可得類比之式。如此則

$$w_1 + w_2 = (k_1 + k_2) \iint q \, ds \, d\psi \quad (g)$$

內

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad (226)$$

由 (e) 及 (g) 式，

$$(k_1 + k_2) \iint q \, ds \, d\psi = \alpha - \beta r^2 \quad (h)$$

因此吾人必須尋一 q 式以適應方程式 (h)。現可證示此項需要可由設壓力 q 在接觸面上之分布爲半徑 a 半球體豎坐標所代表。此半球體係築於接觸面上，如 q_0 爲接觸面中心處之壓力，則

$$q_0 = ka$$

$k = q_0/a$ 爲一常因數爲代表壓力分布尺度。沿弦 mn 壓力 q 變化，如同 209 中所示之虛線半圓。沿此弦積分，得

$$\int q \, ds = \frac{q_0}{a} A$$

式內 A 爲虛線所示半圓之面積等於 $1/2\pi(a^2 - r^2 \sin^2 \psi)$ 。代於方程式 (h)，結果爲

$$\frac{\pi(k_1 + k_2)q_0}{a} \int_0^{\pi/2} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) d\psi = \alpha - \beta r^2$$

或

$$(k_1 + k_2) \cdot \frac{q_0 \pi^2}{4a} (2a^2 - r^2) = \alpha - \beta r^2$$

此方程式將對任何 r 值適應，因此假設之壓力分布爲正確者，如以下對位移 α 與接觸面半徑之關係存在：

$$\begin{aligned} \alpha &= (k_1 + k_2) q_0 \frac{\pi^2 a}{2} \\ a &= (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4\beta} \end{aligned} \quad (227)$$

最大壓力 q_0 值可由使接觸面上壓力總和與 P 相等求得。對半球面式之壓力分布此爲

$$\frac{q_0}{a} \frac{2}{3} \pi a^3 = P$$

由此可得

$$q_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (228)$$

亦即最大壓力爲接觸面上平均壓力之一倍半。代入方程式 (227) 並此 (b) 式取

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}$$

對兩球接觸 (圖207) 得

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{P(k_1 + k_2)R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \\ \alpha &= \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} \frac{P^2(k_1 + k_2)^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}} \end{aligned} \quad (229)$$

設兩球有相同之彈性性質並取 $\nu = 0.3$ ，此等算式變為

$$\begin{aligned} a &= 1.109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \\ \alpha &= 1.23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} \end{aligned} \quad (230)$$

相應之最大壓力為

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2} = 0.388 \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}} \quad (231)$$

對壓入水平面圓球，設兩物體彈性常數相同，代 $1/R_1 = 0$ 於方程式 (230) 及 (231) 中，得

$$a = 1.109 \sqrt[3]{\frac{PR_2}{E}} \quad \alpha = 1.23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 R_2}} \quad q_0 = 0.388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{R_2^2}} \quad (232)$$

取 R_1 為負值，吾人亦可得一球體在一球面座 (圖211b) 中之方程式。

已知接觸面之大小及所受壓力，用前節所示之方法亦可計算各應力 (註)。此等計算結果對沿 Oz ，及 Oz_2 各軸見圖212。在接觸面中心

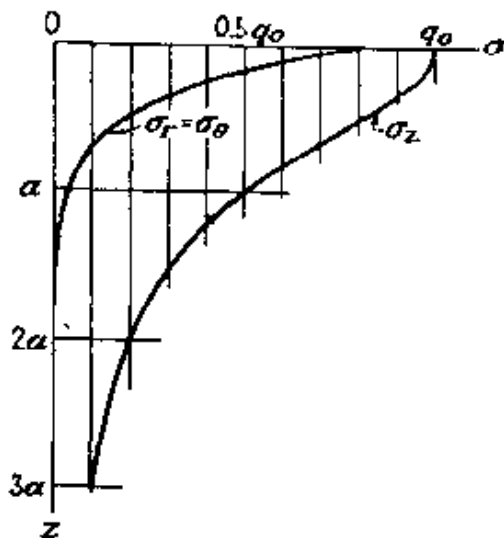


圖 212

(註) 此等計算係 A. N. Dinnik 所完成，見 *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1909. 另參考 M. T. Huber, *Ann Physik*, vol. 14, 1904, p. 153; S. Fuchs, *Physik. Z.*, vol. 14, p. 1282, 1913; M. C. Huber 及 S. Fuchs, *Physik. Z.*, vol. 15, p. 298, 1914; W. B. Morton 及 L. J. Close, *Phil. Mag.*, vol. 43, p. 320, 1922.

處最大壓力 q_0 取為應力之一個單位。對沿 z 軸之距離，接觸面半徑 a 取為一單位。最大應力為在接觸面中心之壓應力 σ_z ，其他同一點上兩主應力為 $\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{1}{2}(1+2\nu)\sigma_z$ 。因此最大剪應力，即常用材料如鋼等屈服現象所依據者，在此點上其值較小。最大剪應力係在 z 軸上深度約接觸面一半處。如為鋼料此點應視為最脆弱之點。此點上最大剪應力值（取 $\nu=0.3$ ）約為 $0.31q_0$ 。

如為脆性材料損壞將由最大拉應力產生，此應力出現於接觸面圓周上。其作用為徑向值為

$$\sigma_r = -\frac{(1-2\nu)}{3} q_0$$

另一主應力作用於圓周切線方向，數值與徑向應力同但符號相反。因此，沿接觸面邊界線上，因面上正交壓力為零，吾人有一純剪系統其值為 $q_0(1-2\nu)/3$ 。取 ν 為 0.3 ，此剪應力為 $0.133q_0$ 。此值遠較以上所計算之最大剪應力為小，但大於接觸面中心處之剪應力，該處正交壓力為最大者。

對適應虎克定律在彈性應力限度內曾作過甚多實驗，均證實赫茲 (Hertz) 之理論 (註1)。

第一四一節 兩物體間接觸壓力、較廣泛例 (註2)

兩一般彈性物體間接觸壓力問題可用前節對兩球體同一方式予以討論。取接觸點 O 上切線平面為 xy 面 (圖 210)。接近於接觸點兩物體之面，忽計高階微量，可由以下方程式代表之 (註3)

(註1) 有關參考文獻見 G. Berndt 論文, *Z. Tech. Physik*, vol. 3, p. 14, 1922. 另閱 "Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik," vol. 3, p. 120.

(註2) 此理論為赫茲所發展, *loc. cit.*

(註3) 此係設接觸點附近曲面可視為二次曲面。

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 y^2 \\ z_2 &= B_1 x^2 + B_2 xy + B_3 y^2 \end{aligned} \quad (\text{a})$$

兩點 M 及 N 間距離為

$$z_1 + z_2 = (A_1 + B_1)x^2 + (A_2 + B_2)xy + (A_3 + B_3)y^2 \quad (\text{b})$$

吾人常可選取 x 及 y 方向使含乘積 xy 項消失。如此則

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 \quad (\text{c})$$

內 A 及 B 為常數，其值視兩接觸面之主曲率及兩主曲率平面間之夾角而定。如 R_1 及 R_1' 為在接觸點上一物體之曲半徑， R_2 及 R_2' 為另一物體者（註）， ψ 為含曲率 $1/R_1$ 及 $1/R_2$ 法面間之夾角，則 A 及 B 可由以下兩方程式決定之

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \right) \\ B - A &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \cos 2\psi \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{d})$$

方程式 (c) 中 A 及 B 均為正，因 $z_1 + z_2$ 必須為正，故所有各點有 $z_1 + z_2$ 同一距離者在一橢圓上。因此，如吾人壓擠物體沿 O 點處切面之法線方向，接觸面將有一橢圓邊界。

設 α ， w_1 ， w_2 具與前節相同意義，則對接觸面上各點，吾人得

$$w_1 + w_2 + z_1 + z_2 = \alpha$$

或
$$w_1 + w_2 = \alpha - Ax^2 - By^2 \quad (\text{e})$$

此可由幾何考慮求得。現考察接觸面上之局部變形。設此面為極小並用 (215) 式，得自半無限體，接觸面上各點位移 w_1 及 w_2 之和為

（註 1）曲率視為正，如在點上曲半徑進入物體中。圖 210 兩曲率均為正。圖 211 球座曲率為負。

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint \frac{q dA}{r} \quad (f)$$

內 $q dA$ 為作用於接觸面上無限小單元上壓力， r 為此單元與點間距離，積分係對全接觸面。用 (226) 式符號，由 (e) 及 (f)，得

$$(k_1 + k_2) \iint \frac{q dA}{r} = \alpha - Ax^2 - By^2 \quad (g)$$

問題現為尋一壓力分布以適應 (g) 式。赫茲證明此項需要可由設接觸面上壓力為由此面上所建之橢圓體豎向坐標所代表者適應之。最大壓力則明顯係在接觸面中心點上。用 q_0 表示之，並用 a 及 b 代表接觸面橢圓邊界兩半軸長度，最大壓力值可由下式求得

$$P = \iint q dA = 2/3 \pi ab q_0$$

由此得

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \quad (233)$$

因知最大壓力為接觸面上平均壓力之一倍半。欲得此壓力之數值必須知兩半軸 a 及 b 之長度。由類比於對球體之分析，吾人得

$$\begin{aligned} a &= m \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{P(k_1 + k_2)}{(A + B)}} \\ b &= n \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{P(k_1 + k_2)}{(A + B)}} \end{aligned} \quad (234)$$

內 $A + B$ 可由方程式 (d) 求得，係數 m 及 n 為與比例 $(B - A) : (A + B)$ 所關之常數，用以下符號

$$\cos \theta = \frac{B - A}{A + B} \quad (h)$$

各 θ 值之 m 及 n 列於下表 (註)。

(註) 此表取自 H. L. Wittemore 及 S. N. Petrenko 論文，*Natl. Bur. Std. Tech. Paper* 201, 1921.

$\theta =$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
$m =$	2.731	2.397	2.136	1.926	1.754	1.611	1.486	1.378	1.284	1.202	1.128	1.061	1.000
$n =$	0.493	0.530	0.567	0.604	0.641	0.678	0.717	0.759	0.802	0.846	0.893	0.944	1.000

例如，設一輪其緣半徑為 $R_1 = 1.58$ 吋，鋼軌頭半徑 $R_2 = 12$ 吋，代 $1/R_1' = 1/R_2' = 0$ 及 $\psi = \pi/2$ 於方程式 (d)，得

$$A + B = 0.0733 \quad B - A = 0.0099 \quad \cos \theta = 0.135 \quad \theta = 82^\circ 15'$$

用內差法，由上表知

$$m = 1.098 \quad n = 0.918$$

代入方程式 (234) 並取 $E = 30.16^5$ 磅/平方吋及 $\nu = 0.25$ (註 1)，得

$$a = 0.00946 \sqrt[3]{P} \quad b = 0.00792 \sqrt[3]{P}$$

對一力 $P = 1,000$ 磅，

$$a = 0.0946 \text{ 吋} \quad b = 0.0792 \text{ 吋} \quad \text{接觸面 } \pi ab = 0.0236 \text{ 平方吋}$$

在中心點之最大壓應力為

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} = 63,600 \text{ 磅/平方吋}$$

壓力分布為已知後，任何一點上應力即可計算 (註 2)。最大剪應力點係在 z 軸一小深度 z_1 處，視兩半軸 a 及 b 之值而定。例如：當

(註 1) 如 ν 由 0.25 增至 0.80 (234) 式各半軸長約降低百分之一，最大壓力 q_0 約增百分之二。

(註 2) N. M. Belajef 曾作此研究；見 *Bull. Inst. Eng. Ways Communication*, St. Petersburg, 1917, 及 "Memoirs on Theory of Structures", St. Petersburg, 1924; 另閱 H. R. Thomas and V. A. Hoersch, *Univ. Ill. Eng. Exptl. Bull.* 212, 1930, 及 G Lundberg & F. K. G. Odqvist, *Proc. Ingeniörs Vetenskaps Akad.*, no. 116 Stockholm, 1932. 公式與曲線彙編見 C. Lipson 及 R. C. Juvinall, "Handbook of Stress and Strength," chap. 7, The Macmillan Company, New York, 1963.

$b/a=1$, $z_1=0.47a$, 當 $b/a=0.34$, $z_1=0.24a$ 。對應之剪應力最大值 ($\nu=0.3$) 爲 $\tau_{\text{max}}=0.31q$ 及 $\tau_{\text{max}}=0.32q$ 。

取 x 及 y 軸沿接觸面橢圓半軸 a 及 b 之方向，在接觸面中點上之主應力爲

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -2\nu q_0 - (1-2\nu)q_0 \frac{b}{a+b} \\ \sigma_y &= -2\nu q_0 - (1-2\nu)q_0 \frac{a}{a+b} \\ \sigma_z &= -q_0\end{aligned}\quad (i)$$

在橢圓半軸末端上得 $\sigma_x = -\sigma_y$ 及 $\tau_{xy} = 0$ 。徑向之拉應力等於周向壓應力。故此等點上爲純剪情況。在長軸兩端上此剪應力值 ($x = \pm a$, $y = 0$) 爲

$$\tau = (1-2\nu)q_0 \frac{\beta^3}{e^2} \left(\frac{1}{e} \operatorname{arctanh} e - 1 \right) \quad (j)$$

在短軸兩端上 ($x = 0$, $y = \pm b$) 爲

$$\tau = (1-2\nu)q_0 \frac{\beta^3}{e^2} \left(1 - \frac{\beta}{e} \arctan \frac{e}{\beta} \right) \quad (k)$$

式中 $\beta = b/a$, $e = (1/a)\sqrt{a^2 - b^2}$ 。當 b 趨近於 a 時，接觸面邊界線趨近於圓形，應力 (i), (j) 及 (k) 趨於前節所討論球體間互壓所得之結果。

對接觸上所有各點上應更詳細之研究顯示 (註1) 當 $e < 0.89$ 時最大剪應力爲 (j) 式所給者。當 $e > 0.89$ 時最大剪應力在橢圓中心，其值可由 (i) 式計算之。

增加比例 a/b 值，得逐漸窄長之接觸橢圓，當達極限 $a/b = \infty$ 時得兩平行軸體接觸之情況 (註2)。此時接觸面爲一窄長窄形。沿接觸面

(註1) 閱 Belajef, *loc. cit.*

(註2) 直接引導，並考慮接觸面上切力，見 H. Poritsky, *J. Appl. Mech.*, vol. 17, p. 191, 1950.

寬度壓力 q 之分布爲半橢圓形 (圖213)。如 x 軸垂直於圖之平面， b 爲接觸面之半寬，吾人得由此半橢圓式之壓力分布

$$P' = 1/2\pi b q_0$$

因此知

$$q_0 = \frac{2P'}{\pi b} \quad (235)$$

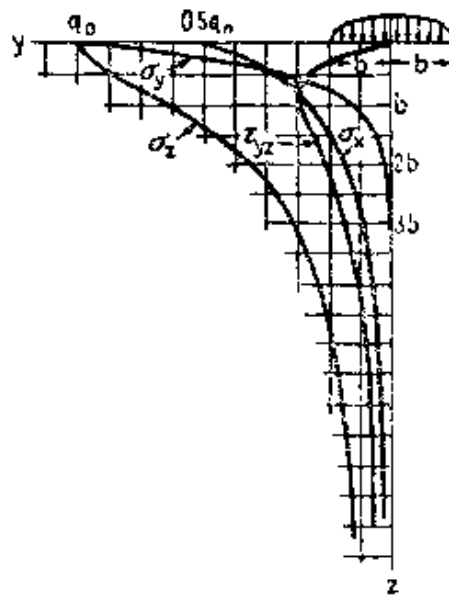


圖 213

對局部變形之研究得下式之 b

$$b = \sqrt{\frac{4P'(k_1+k_2)R_1R_2}{R_1+R_2}} \quad (236)$$

內 R_1 及 R_2 爲兩圓柱體之半徑， k_1 及 k_2 爲方程式 (226) 所規定之常數。如兩圓材料相同並取 $\nu = 0.3$ ，則

$$b = 1.52 \sqrt{\frac{P'R_1R_2}{E(R_1+R_2)}} \quad (237)$$

兩半徑相等時， $R_1 = R_2 = R$ ，

$$b = 1.08 \sqrt{\frac{P'R}{E}} \quad (238)$$

當一圓柱與一平面接觸時，

$$b = 1.52\sqrt{\frac{P'R}{E}} \quad (239)$$

將 (236) 式之 b 代入 (235)，吾人得

$$q_0 = \sqrt{\frac{P'(R_1 + R_2)}{\pi^2(k_1 + k_2)R_1R_2}} \quad (240)$$

如兩圓柱材料相同並取 $\nu = 0.3$ ，

$$q_0 = 0.418\sqrt{\frac{P'E(R_1 + R_2)}{R_1R_2}} \quad (241)$$

當一圓柱與一平面接觸時，

$$q_0 = 0.418\sqrt{\frac{P'E}{R}} \quad (242)$$

已知 q_0 及 b ，任何處應力即可計算。此等計算顯示 (註 1) 剪應力最大值在 z 軸某高度上。在高度上應力之變化，對 $\nu = 0.3$ ，見圖 (213)。最大剪應力在 $z_1 = 0.78b$ 處其值 (註 2) 為 $0.304q_0$ 。

第一三二節 球體之衝擊

以上兩節所得之結果可用於探討兩彈性球體之衝擊，取圖 (214) 所示兩球，此兩球沿連球心之線運動並互衝。當兩以相反方向運動在 O 點接觸時，壓力 P 開始作用並改變兩球之速度。如 v_1 及 v_2 為球速，在衝擊時其變更率為下式所規定

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -P \quad m_2 \frac{dv_2}{dt} = -P \quad (a)$$

內 m_1 及 m_2 為兩球質量，設 α 為在 O 點處由局部壓縮兩球趨近之距離，則此趨近速度為

$$\dot{\alpha} = v_1 - v_2$$

由 (a) 式得

(註 1) 見 Belajef, *loc. cit.*

(註 2) 赫茲氏接觸理論具廣泛之實際應用。計算所得之接觸壓力曾達 10^8 磅/平方吋。參閱 J. B. Bidwell 所編“滾動接觸現象”，Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1952, pp. 430 及 430.

$$\ddot{\alpha} = -P \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad (b)$$

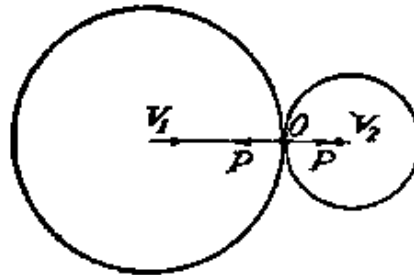


圖 214

如兩球體積與性質差別不太大時，衝擊時間，即兩球保持接觸之時間，較兩球最低振型之週期為極長久者(註)。因此振動可以忽計，並可設方程式 (229)，雖係為靜力情況所建立，在衝擊時仍可應用。用下列符號

$$n = \sqrt{\frac{16}{9\pi^2} \frac{R_1 R_2}{(k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}} \quad m_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad (c)$$

由 (229) 式得

$$P = n\alpha^{3/2} \quad (d)$$

方程式 (b) 變為

$$\ddot{\alpha} = -nm_1\alpha^{3/2} \quad (e)$$

將此式兩邊乘以 $\dot{\alpha}$ ，

$$1/2(\dot{\alpha}^2 - v^2) = -2/5nm_1\alpha^{5/2}$$

積分之，得

$$1/2d(\dot{\alpha})^2 = -nm_1\alpha^{5/2}d\alpha \quad (f)$$

內 v 為衝擊開始時兩球之趨近速度。如在此式內取 $\dot{\alpha} = 0$ ，吾人得最大壓力時兩球之趨近距離， α_1 ，其值為

$$\alpha_1 = \left(\frac{5}{4} \frac{v^2}{nm_1} \right)^{2/5} \quad (g)$$

(註) 參考 Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, ser. 6 vol. 11 p. 283, 1906. 如兩球差別甚大，特當其中之一可視為無限體時，時間極長或無限，則此項說明不能用，但量得之時間與此類似靜力理論之結果極為符合。參考 J. N. Goodier, W. E. Jahsman, E. A. Ripperger, *J. App. Mech.*, vol. 26, p. 3, 1959.

用此值吾人可由 (229) 式計算衝擊中兩球間最大壓力 P ，及對應之接觸面半徑 a 。

爲計算衝擊所用時間，將 (f) 寫爲以下形式：

$$dt = \frac{d\alpha}{\sqrt{v^2 - 4!5nn_1\alpha^{5/2}}}$$

用 $\alpha/\alpha_1 = x$ 及 (g) 式，得

$$dt = \frac{\alpha_1}{v} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x)^{5/2}}}$$

積分後衝擊時間爲

$$t = \frac{2\alpha_1}{v} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x)^{5/2}}} = 2.94 \frac{\alpha_1}{v} \quad (243)$$

如兩球材料及半徑 R 均相同，由 (g) 式得

$$\alpha_1 = \left(\frac{5\sqrt{2}\pi\rho}{4} \frac{1-\nu^2}{E} v^2 \right)^{2/5} R$$

$$t = 2.94 \left(\frac{5\sqrt{2}\pi\rho}{4} \frac{1-\nu^2}{E} \right)^{2/5} \frac{R}{(v)^{1/5}} \quad (244)$$

內 ρ 代表球體單位體積質量。

由此式知衝擊時間與球半徑成正比，與 $(v)^{1/5}$ 成反比。此結果曾由試驗證明 (註 1)。如爲兩球狀之長桿，振動基本振型週期可與衝擊時間爲同階值，在討論接觸點上之局部壓縮時，應對此種振動予以考慮 (註 2)。

第一四三節 柱體之對稱變形

設一圓柱體，受施於側面並與柱軸線對稱分布力之作用。吾人引用一圓柱坐

(註 1) 參閱 M. Hamburger, *Wied. Ann.*, vol. 28, p. 653, 1886; A. Dinnik, *J. Russ. Phys-Chem. Soc.*, vol. 38, p. 242, 1906, 及 vol. 41, p. 57, 1909. 本問題其他參考文獻見 "Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik," vol. 3, p. 448, 1927.

(註 2) 閱第 529 頁。球端桿之縱向衝擊曾由 J. E. Sears 予以討論，見 *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 14, p. 257, 1908, 及 *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 21, p. 49, 1912. 桿之側面衝擊及其局部壓縮曾由本冊作者討論，見 *Z. Math. Physik*, vol. 62, p. 198, 1914.

標之應力函數 ϕ ，及方程式 (190)。(註 1)。如取 ϕ 為方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (a)$$

之一解而為以下之形式

$$\phi = f(r) \sin kz \quad (b)$$

則 (190) 可被適應。代 (b) 於 (a) 式，得一常微分方程式以決定 $f(r)$ ：

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - k^2 f = 0 \quad (c)$$

此為修正柏塞爾函數（第一及第二類）變元為 kr ，零階所適應之方程式，對圓柱體適合之解，可直接得自以下級數

$$f(r) = a_0 + a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6 + \dots \quad (d)$$

代此級數於方程式 (c)，吾人得下列兩連接系數間之關係：

$$(2n)^2 a_n - k^2 a_{n-1} = 0$$

由此得

$$a_1 = \frac{k^2}{2^2} a_0 \quad a_2 = \frac{k^4}{4^2} a_1 = \frac{k^4}{2^2(4^2)} a_0 \dots$$

代入級數 (d) 中，得

$$f(r) = a_0 \left[1 + \frac{k^2 r^2}{2^2} + \frac{k^4 r^4}{2^2(4^2)} + \frac{k^6 r^6}{2^2(4^2)6^2} + \dots \right] \quad (e)$$

上式括弧中級數為零階虛變元 ikr 之柏塞爾函數，通常用 $I_0(kr)$ 表示之。以下吾人將採用 $J_0(ikr)$ 以代表此函數並以

$$\phi_1 = a_0 J_0(ikr) \sin kz \quad (f)$$

代表應力函數 (b)。

方程式 (190) 中另含不同於方程式 (a) 之解。其中之一可自得自上述函數 $J_0(ikr)$ 。

(註 1) 表面上受力圓柱體變形問題首先為 L. Pochhammer 所討論，見 *Crelle's J.*, 卷 81, 1876。圓柱對稱變形數種問題曾由 C. Chree 予以討論，見劍橋哲學社彙報，14卷，第250頁，1889。另參考 L.N.G. Filon, 皇家學社報告 (倫敦) A 集，198卷，1902，內含具實用價值之圓柱對稱變形問題解法數種。

由微分知

$$\frac{dJ_0(ikr)}{d(ikr)} = -\frac{ikr}{2} \left[1 + \frac{k^2 r^2}{2(4)} + \frac{k^4 r^4}{2(4^2)6} + \frac{k^6 r^6}{2(4^2)6^2(8)} + \dots \right] \quad (g)$$

此導數之負值稱爲一階柏塞爾函數並由 $J_1(ikr)$ 表示之，現考察下列函數

$$f_1(r) = r \frac{d}{dr} J_0(ikr) = -ikr J_1(ikr) = \frac{k^2 r^2}{2} \left[1 + \frac{k^2 r^2}{2(4)} + \frac{k^4 r^4}{2(4^2)6} + \dots \right] \quad (h)$$

由微分可證示

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) f_1(r) = 2k^2 J_0(ikr)$$

因 $J_0(ikr)$ 爲方程式 (c) 之一解，故 $f_1(r)$ 爲方程式

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) \left(\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d f_1}{dr} - k^2 f_1 \right) = 0$$

一解。因此方程式 (190) 一解可寫爲

$$\phi_z = a_1 \sin kz(ikr) J_1(ikr) \quad (i)$$

將 (f) 及 (i) 兩解相加，可將應力函數取爲下式

$$\phi = \sin kz(a_0 J_0(ikr) + a_1(ikr) J_1(ikr)) \quad (j)$$

代此應力函數於 (189) 式中，得以下應力分量算式：

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \cos kz(a_0 F_1(r) + a_1 F_2(r)) \\ \tau_{rz} &= \sin kz(a_0 F_3(r) + a_1 F_4(r)) \end{aligned} \quad (k)$$

內 $F_1(r), \dots, F_4(r)$ 爲含 $J_0(ikr)$ 及 $J_1(ikr)$ 之某些 r 函數。用柏塞爾函數表， $F_1(r), \dots, F_4(r)$ ，對任何 r 值可以算出。

設 a 爲圓柱之外半徑，作用於圓柱面上之外力，由方程式 (k)，爲下列應力分量所表示之值：

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \cos kz(a_0 F_1(a) + a_1 F_2(a)) \\ \tau_{rz} &= \sin kz(a_0 F_3(a) + a_1 F_4(a)) \end{aligned} \quad (1)$$

予各常數 k, a_0, a_1 ，適當之調整，可代表圓柱各式對稱荷力。用 l 代表柱長並取

$$k = \frac{n\pi}{l}$$

$$a_0 F_1(a) + a_1 F_2(a) = -A_n$$

$$a_0 F_3(a) + a_1 F_4(a) = 0$$

吾人得柱體側面上垂直壓力 $A_n \cos(n\pi z/l)$ 作用下常數 a_0 及 a_1 值，圖215代表 $n=1$ 之情況。以類似方式吾人可得切線力 $B_n \sin(n\pi z/l)$ 作用於柱體表面問題之解。

取 $n=1, 2, 3, \dots$ 並用重疊原理，可解圓柱體受垂直壓力可由以下級數

$$A_1 \cos \frac{\pi z}{l} + A_2 \cos \frac{2\pi z}{l} + A_3 \cos \frac{3\pi z}{l} + \dots \quad (m)$$

代表，及剪力由

$$B_1 \sin \frac{\pi z}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + B_3 \sin \frac{3\pi z}{l} + \dots \quad (n)$$

所代表各問題之解。

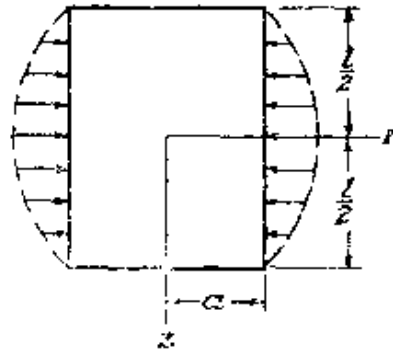


圖 215

如吾人取另一式之應力函數

$$\phi = f(r) \cos kz$$

並作類如以上之分析，得一相當如 (j) 式之應力函數

$$\phi = \cos kz [b_0 J_0(ikr) + b_1(ikr) J_1(ikr)] \quad (o)$$

對各常數 k, b_0, b_1 作適當調整，吾人得垂直壓力作用於柱體由正弦級數代表及剪力由餘弦級數代表問題之解。因此，將兩解 (j) 及 (o) 組合，吾人可得任何垂直壓力及剪力軸對稱分布於圓柱面上。同時在柱之兩端面上亦可有分布力存在，重疊一筒拉或壓力於兩端面上可使此等力之總和為零，而在距兩端遠處，由聖維南原理其影響可被忽計。費郎氏 (L. N. Filon) 曾對圓柱軸對稱荷力問題有所討論 (註)。現將其對圖 (216) 解之最後結果附於下表。圓柱長為 πa ，

(註) *Loc. cit.* 另閱 G. Pickett, 應用力學雜誌; 卷11, 第176頁, 1944。

受均勻分配之剪力如圖所示。此剪力對柱中間部分斷面言，其作用與拉力相似。

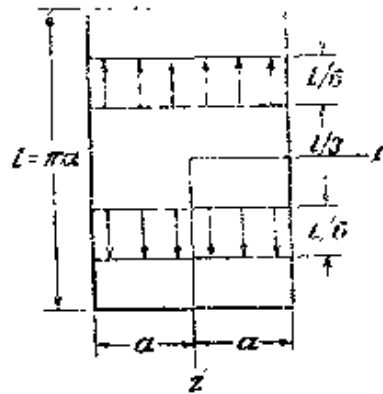


圖 216

z	$r = 0$	$r = 0.2a$	$r = 0.4a$	$r = 0.6a$	$r = a$
0	0.689	0.719	0.810	0.962	1.117
0.05l	0.673	0.700	0.786	0.937	1.163
0.10l	0.631	0.652	0.720	0.859	1.344
0.15l	0.582	0.594	0.637	0.737	2.022
0.20l	0.539	0.545	0.565	0.617	1.368

吾人所感興趣者為斷面上正交應力 σ_z 之分布，上表中為此應力與平均拉應力比例。由此表知接近荷力部分之局部應力隨距離速快遞減並趨於平均值。

納地氏 (A. Nádai) 曾用柏塞爾函數解集中力作用於圓板中心之撓曲問題 (圖217) (註 1)。此亦為本問題普通解應用之一。史耐登氏 (I. N. Sneddon) 曾用亨克爾轉換法 (Hankel transforms) 於厚板問題、半無限體、接觸及圓形裂縫等問題中 (註 2)。



圖 217

(註 1) "Elastische Platten", 第315頁, 1925.

(註 2) "傅立葉轉換", McGraw Hill Book Company, New York, 1951.

第一四四節 圓柱體受帶壓力 (註1)

當一短軸環套緊於一較其長度高出甚多之軸上時，用於環與軸等長之簡單縮配公式即不夠精確。較佳之近似解可由取圖 218 所示之長軸，受均勻分布垂直壓力 p 於 ABCD 帶中之問題求得 (註 2)。

所需之解明顯可得自重疊兩種壓力效應如圖 218 b 所示者達成。因此問題為壓力 $p/2$ 作用於柱體表面下部及一 $p/2$ 作用於上部，並視柱為無限長以求其解。

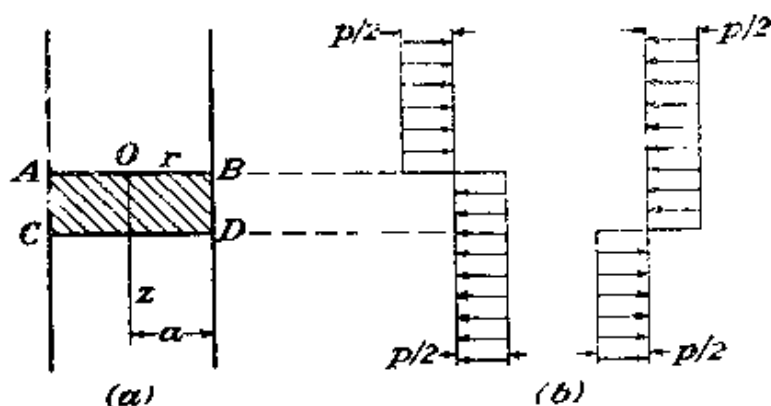


圖 218

吾人開始取第143節方程式 (o) 之應力函數， $J_0(ikr)$ 寫為 $I_0(kr)$ 及 $J_1(ikr)$ 寫為 $iI_1(kr)$ ，另寫 $b_0 = pb_1$ ，如此則

$$\phi = (oI_0(kr) - krI_1(kr))b_1 \cos kz \tag{a}$$

(註 1) 閱 M. V. Barton, *J. Applied Mech.*, vol. 8, p. A. A-97, 1941. A. W. Rankin, *ibid.*, vol. 11, p. A-77, 1944. C. J. Tranter and J. W. Griggs, *Phil. Mag.*, vol. 36, p. 241, 1945.

(註 2) H. Okubo 曾對彈性軸環套於長彈性軸，設無摩擦力，予以分析，見 *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 32, pp. 178-186, 1952. H. D. Conway 及 K.A. Farnham 曾對剛性套筒間之非均勻壓力，有摩擦及無摩擦力，予以計算，見 *Inter. J. Eng. Sci.*, vol. 5, pp. 541-554, 1967；另見 W.F. Yau, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 15, pp. 219-227, 1967.

使光角為圓頭可減低異性應力為一局部峯值，J. N. Goodier 及 C. B. Loutzenheiser 曾提出計算公式，見 *J. Appl. Mech.*, vol. 32, pp. 462-463, 1965.

此式適應 (190)。不論 k 值如何，如吾人視 k 取一值範即可使 b_1 視 k 值而定及增值 dk 寫為

$$b_1 = f(k) dk$$

將此置於 (a) 式並總和所有此等應力函數，吾人得一較普遍形式之應力函數

$$\phi = \int_0^{\infty} (\rho I_0(kr) - kr I_1(kr)) f(k) \cos kz dk \quad (b)$$

吾人現將考察如何選擇函數 $f(k)$ 而使此應力函數為問題之解。

由方程 (189) 所得剪應力為

$$\tau_{rz} = \int_0^{\infty} (\rho k I_0'(kr) - k^2 r I_1' - k I_1(kr) - 2k(1-\nu) I_0'(kr)) k^2 f(k) \cos kz dk \quad (c)$$

微分係對 kr ，此在表面上 $r=a$ 必須為零。取 $r=a$ ，使括弧內式為零，得以下 ρ 之方程式

$$\rho = 2(1-\nu) \div ka \frac{J_0(ka)}{I_1(ka)} \quad (d)$$

其餘邊界方程式為

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} & r=a, z>0 \\ \sigma_r &= -\frac{p}{2} & r=a, z<0 \end{aligned} \quad (e)$$

由方程式 (189) 及 (b) 得 σ_r 值為

$$\sigma_r = - \int_0^{\infty} \left[(1-2\nu-\rho) I_0(kr) + \left(kr + \frac{\rho}{kr} \right) I_1(kr) \right] k^3 f(k) \sin kz dk \quad (f)$$

現取已知公式 (註 1)

$$\frac{p}{\pi} \int_0^z \frac{\sin kz}{k} dk = \begin{cases} \frac{p}{2} & z>0 \\ 0 & z=0 \\ -\frac{p}{2} & z<0 \end{cases} \quad (g)$$

(註 1) 參考 I. S. Sokolnikoff, "Advanced Calculus," 1st ed., p. 362, McGraw-Hill Book company, New York, 1939.

如對此乘以 ρ/π ，得

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin kz}{k} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & z < 0 \end{cases} \quad (h)$$

式內右方對應 (e) 式對 σ_r 之邊界值。因此，如使方程式 (f) 右方，當 $\tau=a$ 時與方程式 (h) 左方相同，(e) 式之邊界條件即被適應。此需

$$-\left[(1-2\nu-\rho)I_0(ka) + \left(ka + \frac{\rho}{ka} \right) I_1(ka) \right] k^3 f(k) = \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{k} \quad (i)$$

故此式決定 $f(k)$ 。各應力分量可由公式 (189) 自應力函數 (b) 求出，並將與 σ_r 之 (f) 式為相同性質之積分式。由數值積分所得結果見第444頁藍琴 (Rankin) 論文中。圖 219 所示之曲線表示各種徑向距離點上軸向應力變化，及表面位移。

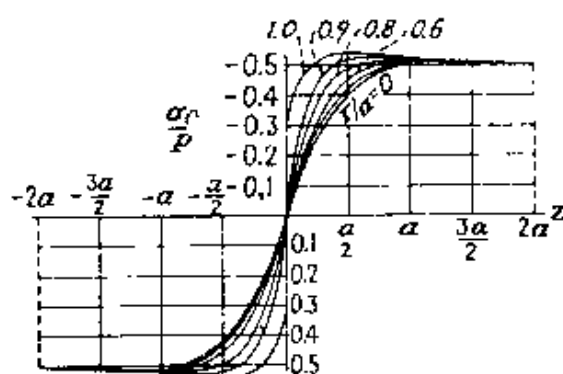


圖 219

此係取自第445頁(註)巴頓 (Barton) 氏之論文，為用傅立葉級數之另一方法求得者。由此等曲線，用重疊法可獲 218 圖所示問題之結果。各種寬度壓力帶應力及位移曲線均見於附註所列各論文中。當寬與軸半徑相等時，在壓力帶中點表面上切線應力分量 σ_θ 達一較所施壓力約高10%之值，為一壓應力，在表面內鄰接壓力帶處軸向 σ_z 為一拉應力，其值約為所施壓力45%。剪應力達其最大值，等於所施壓力31.8%，係在圖218壓力帶 AB 及 CD 邊緣面下鄰接處。

當壓力係分布於柱體全部曲面上時，不論長度如何，吾人僅有壓應力 σ_r 及 σ_θ 等於所施壓力， σ_z 及 τ_{rz} 為零。

對一無限體內洞孔受帶壓力例 (註 1) 及帶壓力施於柱體近一端時均已獲有解答 (註 2)。

第一四五節 兩調和函數之包新尼斯克 (Boussinesq's solution) 解

對無扭轉軸向對稱問題解法至此僅用勒夫 (Love) 氏單一雙調和函數 ϕ 。一較早期普遍解，由兩調和函數所表達，曾由包新尼斯克氏提出 (註 3)。對較繁雜問題曾被廣泛採用，例如橢圓體及旋轉雙曲線體受軸向拉力之紐勃 (Neuber) 解等。此為第 251 頁所提及解法中之一 (餘為非軸對稱)，與由四個調和函數表示位移之潑浦克維契紐勃式 (Papcovich-Neuber) 有關者。此處吾人由此等較普遍形式以導包新尼斯克式。由第 88 節內四個調和函數 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ，吾人取 (用 $4\alpha = 1/(1-\nu)$)

$$\varphi_0 = -\frac{1}{\alpha} \Phi(r, z) \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \varphi_3 = -\alpha \Psi(r, z) \quad (a)$$

內 Φ 及 Ψ 與 θ 無關並為調和函數，亦即，

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \nabla^2 \Psi = 0 \quad (b)$$

內拉普拉可運算了 ∇^2 如第 397 頁方程式 (a)。

方程式 (a) 中之位移可由 φ_1 及 φ_3 分擔之。由 φ_1 所得者為一向量 $-\alpha \text{grad } \varphi_0$ 其圓柱分量為

$$(u_1, v_1, w_1) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}, 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (c)$$

由 φ_3 所提供之位移為

$$(u_2, v_2, w_2) = \left(\frac{z \partial \Psi}{\partial r}, 0, \frac{z \partial \Psi}{\partial z} \right) - (3-4\nu)(0, 0, \Psi)$$

(註 1) C. J. Tranter, *Quart Appl. Math.*, vol. 4, p. 283, 1946; O. L. Bowie, *ibid.*, vol. 5, p. 100, 1947.

(註 2) C. J. Tranter 及 J. W. Craggs, *Phil. Mag.*, vol. 38, p. 214, 1947.

(註 3) 見 J. Boussinesq, "Applications des Potentiels à l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques," Gauthier-Villars, Paris 1855.

位移

$$(u, v, w) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2) \quad (e)$$

為包新尼斯克式。

第一四六節 拉力下之螺旋彈簧

在若干基本實用之重要問題中，應力為軸對稱但位移場則非。如未變形邊界為一旋轉體表面，變形後則不一定如此。

例如，取一由 P 力拉長之螺旋彈簧。任何一段簧圈均係在兩等值反向軸向力 P 下平衡，如圖 200 所示。任意斷面上剪應力成一軸向力 P ，對所有斷面均屬相同。當斷面半徑 P_0 與線圈半徑 R_0 相較並非甚小時，初等材料力學中常用之理論不夠正確。該理論視鄰接兩斷面間一段線圈為一受扭矩 PR_0 作用之直線柱體。對應剪應力，用柱體坐標，有非零分量 $\tau_{r\theta}$ 及 $\tau_{\theta z}$ ，而此等應力與 θ 無關。螺旋中線節距亦全被忽視。

為求普遍方程式一解，將線圈曲率 $1/R_0$ 計入，並先由聖維南半逆方法簡化問題。吾人取下式之位移

$$u = 0 \quad v = r\Psi(r, z) \quad w = c\theta \quad (a)$$

內 c 為一常數，以後與 P 值有關。由此位移用 (179) 式知各應變分量 $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{r\theta}$ 為零及

$$\frac{\tau_{r\theta}}{G} = r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \frac{\tau_{\theta z}}{G} = r \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{c}{r} \quad (b)$$

因此 $\tau_{r\theta}$ 及 $\tau_{\theta z}$ 為僅有之非零應力分量。因對 θ 無關故各斷面皆相同。三平衡方

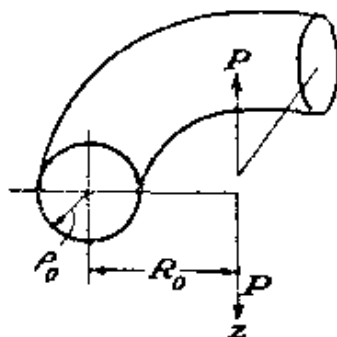


圖 220

程式簡化為第119節內 (c) 式，故有一應力函數 $\varphi(r, z)$ 如第119節 (d) 式，為

$$r^2\tau_{r\theta} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad r^2\tau_{\theta z} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad (c)$$

由 (b) 及 (c) 知 φ 及 Ψ 所適應之微分方程式為

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -2Gc \quad (d)$$

及

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (e)$$

用拉普拉司運算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (f)$$

方程式 (d) 及 (e) 可寫為

$$\left(\nabla^2 - \frac{4}{r^2}\right)\varphi = -2Gc \frac{1}{r^2} \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)r\Psi = 0 \quad (g)$$

與第119節較 (a) 式位移僅多引進 w 分量 (註1) $c\theta$ 。因此現所得各式 (b)、(c)、(d)、(e) 當取 $c=0$ 時均化為第119節所得之式。

因方程式 (c) 與 (119) 中方程式 (d) 相同，旋轉面之自由界面條件與 119 節中方程式 (e) 相同，即

$$\varphi = \text{常數} \quad (h)$$

當節距壓緊時，一轉之圓斷面彈簧線變為一環，由一圓形對 z 軸旋轉所成。一轉之兩端並未連成。兩端均荷剪應力分布，其總合均為 P 作用線在 z 軸上。兩力之距離為由相對應之可位移，由式 (a)，

$$c(\varphi)_{\theta=2\pi} - (w)_{\theta=0} = c2\pi \quad (i)$$

此問題需一函數 $\varphi(r, z)$ 在圖 221 所示之圓內適應 (d) 式而在圓邊上為常數，佛萊柏格氏 (W. Flügge) (註2) 曾提出一級數解，用圓環坐標 (toroidal

(註1) 第117節之位移亦有此一分量，事實上代表取 $\Psi(r, z)$ 為 Az 於 (a) 式之特解。

(註2) “非全等之均勻扭轉”，*Australian J. Sci., ser. A*, vol. 2, pp. 354-357, 1961。其他參考文獻，連同矩形斷面螺線，閱 R. Schmidt 之討論，*J. Appl. Mech.*, vol. 31, p. 154, 1964。

coordinates)。此系統之坐標面為對 z 軸旋轉圖120之平面雙極系統所成，轉動整個圖形使此軸豎向，以對應於圖221中 z 軸（第三組為各子午面 $\theta = \text{常數}$ ）。此項分析，必然相當繁複，此處未予摘錄。主要結果（註）示於下表及圖 222 中。

R_0/ρ_0	3	4	6	6	8	10
δ	1.025	1.017	1.007	1.006	1.004	1.001

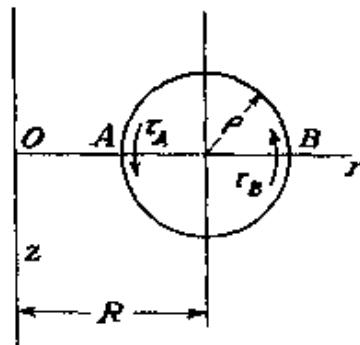


圖 221

此表所示為方程式 (i) 之相對軸向位移 $2\pi c$ （相當於一轉一拉長）與拉力關係。 P 為一轉一軸向拉力或多轉“極小節距螺旋彈簧”之拉力。吾人可寫

$$\delta = \frac{(P/\pi\rho_0^2)}{G(2\pi c/\rho_0)} 4\pi \left(\frac{R_0}{\rho_0}\right)^3 \quad (j)$$

為含 P 及 $2\pi c$ 之無尺度比例。各值 R_0/ρ_0 之 δ 列於表中。如 R_0/ρ_0 及 δ 為已知，由 (j) 式得

$$\frac{P/\pi\rho_0^2}{G(2\pi c/\rho_0)}$$

之比例值，而對已知之 ρ_0 及 G 則可知比例 $P/2\pi c$ 之每圈彈簧剛度。初等理論相當於 $\delta=1$ ，表中之值當 $R_0/\rho_0=1$ 時極接近於 1。即令 $R_0/\rho_0=3$ （粗線）與 1 之差距亦僅為 0.025。

斷面形邊界上剪應力必為沿圓周者，最大值係在圖 221 上 A 點。最小值則在 B 點。各實際值可由下式

$$\tau = K \frac{2R_0}{\pi\rho_0^3} P$$

（註）摘自 Freiberger 論文，*ibid.*

中常數 K 決定之。 K 對 R_0/ρ_0 之變化，對 A 及 B 點均示於圖 222 中。初等理論對細線（大值之 R_0/ρ_0 ）言將為 $K=1$ 。由圖 222 知此中有相當之差距，特別當 R_0/ρ_0 為小值（粗線）時為然。

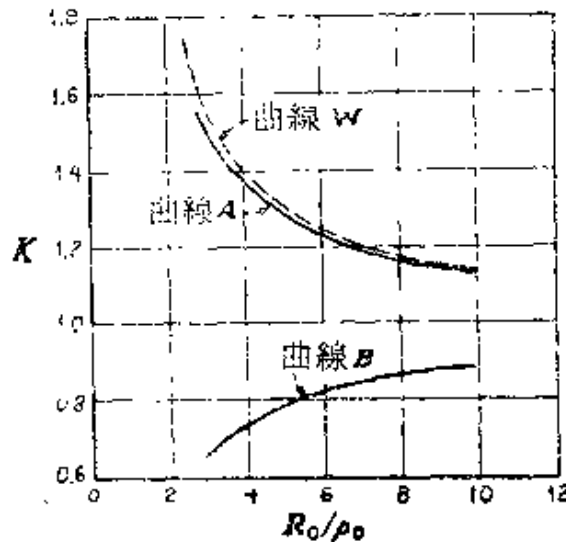


圖 222

圖 222 (註 1) 所示曲線 W 係由初等理論修正曲率 $1/R_0$ 及剪力 P (初等理論應力僅代表扭矩 PR_0) 後所繪。對螺旋彈簧設計，節距之修正可能亦為重要者 (註 2)。

第一四七節 不完整環之純繞

問題為圖 223 所示。當撓矩 M 施於末端為適應之正交應力分配 σ 時，相同之應力分配出現於任意經 z 軸之平面所截之斷面上，而此等應力亦為軸稱者。其接近值可由材料力學中窄梁論及溫克勒 (Winkler) 氏厚曲桿理論求得。接近值亦曾由高赫納 (Göhner) 氏用普遍軸向對稱方程式解出，用窄梁理論之逐步修正，

(註 1) 閱 A. M. Wahl, *J. Appl. Mech.*, vol. 2, pp. A-35~A-37, 1935.

(註 2) 自普遍方程式中修正項有系統之探討，對曲率及節距均考慮，見 C. J. Ancker 及 J. N. Goodier, *J. Appl. Mech.*, vol. 25, 1958: (1) “螺旋彈簧節距與曲率修正”；(2) “節距與曲率修正理論—I 拉力”，pp. 471-483；(3) “節距與曲率修正—II (扭轉)” pp. 484-495. 另閱 A. M. Wahl 之討論，*J. Appl. Mech.*, vol. 26, pp. 312-313, 1959.

以下表中顯示此等接近算法與索道斯基 (Sadowsky) 及斯坦佰 (Sternberg) 以普遍方程級數所得結果之比較。此係取自兩氏論文 (註)。此論文提及問題之歷史及第146節之問題，並附參考資料。

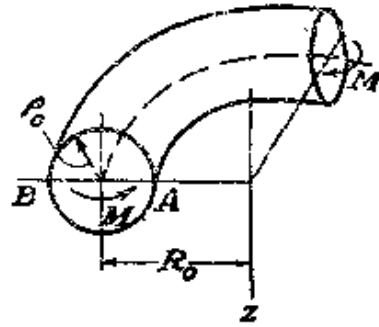


圖 223

表中所提供者為在 A 及 B 點處 (圖223) $\pi\rho_0^3\sigma/4M$ 之值，設 $R_0/\rho_0=5$ ， $\nu=0.3$ 。

	索道斯基—斯坦佰	古 那	溫 克 勒	窄梁理論
A	-1.273	-1.200	-1.175	-1
B	0.891	0.851	0.867	1

(註) M. A. Sadowsky 及 E. Sternberg, *J. Appl. Mech.*, vol. 20, pp. 215-226, 1953.

第十三章 熱應力

第一四八節 熱應力分布最簡單例

應變阻遏法

非均勻受熱為物體內發生應力原因之一。溫度昇高時物體各部分均膨脹。此膨脹在連續體內通常不能自由進行，如此則生熱應力。

玻璃表面迅速加熱時所生破損可歸咎於此種應力；疲勞損壞可能為溫度變化之結果。此種熱應力之後果對若干工程設計均極重要，如渦輪、噴射機、原子反應器等。

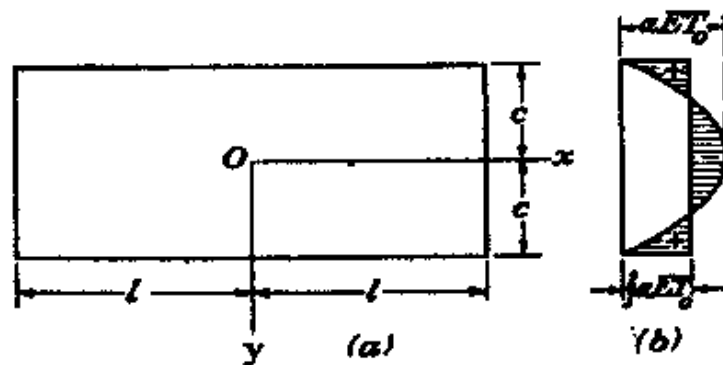


圖 224

較單純之熱應力問題可化為前經討論邊界力問題類型。第一例設取一均勻厚度矩形薄板溫度 T 為 y 之偶函數 (圖 224) 並與 x 及 z 無關。

縱向熱膨脹 αT 可由施於板上縱向應力

$$\sigma_x' = -\alpha T E \quad (a)$$

完全阻遏，當 T 為正值時為壓應力。因板為側向自由膨脹，施用應力 (a) 對側向將不生應力。為保持板內應力 (a)，僅需兩端分布 (a) 值之壓應力。此等壓應力將完全阻止板在 x 向因溫度昇高之膨

脹。並求板內之熱應力，設板未受外力作用，須於應力 (a) 上重疊一分布於兩端上密度為 αTE 之拉力，此力之總和為

$$\int_{-c}^{+c} \alpha TE dy$$

在對兩端足夠距離處，此力將造成接近平均分布之拉應力，其值為

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha TE dy$$

因此兩端自由平板內之熱應力，在距兩端相當遠距離處，將為

$$\sigma_x = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha TE dy - \alpha TE \quad (b)$$

例如，設溫度為拋物線式分布，由下式代表

$$T = T_0 \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

由方程式 (b) 知

$$\sigma_x = \frac{2}{3} \alpha T_0 E - \alpha T_0 E \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \quad (c)$$

此應力分布示於圖224b。接近兩端處由拉力所造成之應力分布並非均勻，必須用適於末端效應方法算出，如第28節及第93節所解釋者。

如溫度對 x 軸不對稱，吾人仍由阻遏 ϵ_x 之壓應力 (a) 開始。在不對稱例中，此項應力不僅提供一總力 $-\int_{-c}^{+c} \alpha ET dy$ ，另亦造成一

力偶 $-\int_{-c}^{+c} dETy dy$ ；而為適應平衡條件，吾人必須於壓應力 (a)

上重疊一均勻拉應力，如前所決定者，及一撓曲應力 $\sigma_x'' = \sigma y/c$ ，由斷面上分布力力矩為零之條件算出。如此則

$$\int_{-c}^{+c} \frac{\sigma y^2 dy}{c} - \int_{-c}^{+c} \alpha ETy dy = 0$$

故得

$$\frac{\sigma}{c} = \frac{3}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy \quad \sigma_x'' = \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy$$

因此總應力為

$$\sigma_x = -\alpha ET + \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha ET dy + \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy \quad (d)$$

在此項討論中係設平板沿 z 方向為小數。現若 z 向為相當大值，厚度為 $2c$ ， xz 平面為其中面。設溫度 T 如前，與 x 及 z 無關，而僅為 y 之函數。

板內單元沿 x 及 z 向之自由熱膨脹將完全被施用方程式 (3) 所示之 σ_x ， σ_z 所遏止，取 $\epsilon_x = \epsilon_z = -\alpha T$ ， $\sigma_y = 0$ 。因此得

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha ET}{1-\nu} \quad (e)$$

施 (e) 式之壓力於板邊可維持各單於此情況中。板內在無外力作用下之熱應力可重疊等值反向應力於 (e) 上求得。如 T 為 y 之偶函數，使板厚度上平均值為零，沿邊每單位長總力為零，由聖維南原理 (見第19節)，知除在邊附近外不生應力。

如 T 平均值不為零， x 及 z 向之均勻拉力相當於邊上之總力者必須重疊於壓應力 (e) 上。如另外溫度對 xz 平面不對稱時，吾人須再加撓曲應力。最後所得方程式為

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_z = & -\frac{\alpha TE}{1-\nu} + \frac{1}{2c(1-\nu)} \int_{-c}^{+c} \alpha TE dy \\ & + \frac{3y}{2c^3(1-\nu)} \int_{-c}^{+c} \alpha TE y dy \end{aligned} \quad (f)$$

此與方程式 (d) 類比，由 (f) 式可算出板內應力分布，如板厚度上溫度 T 之分布為已知。

例如，取一板初時具均勻溫度 T ，然後在保持 $y = \pm c$ 兩面上常溫 T_1 情況

下冷卻（註1）。由傅立葉溫度分布理論，任何瞬間 t 時，為

$$T = T_1 + \frac{4}{\pi} (T_0 - T_1) \left(e^{-p_1 t} \cos \frac{\pi y}{2c} - \frac{1}{3} e^{-p_3 t} \cos \frac{3\pi y}{2c} + \dots \right) \quad (g)$$

內 $p_1, p_3 = 3^2 p_1, \dots, p_n = n^2 p_1, \dots$ 為某些常數值。代於 (f) 式中，得

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E (T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} \left[e^{-p_1 t} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} \right) + \frac{1}{3} e^{-p_3 t} \left(\frac{2}{3\pi} + \cos \frac{3\pi y}{2c} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{5} e^{-p_5 t} \left(\frac{2}{5\pi} - \cos \frac{5\pi y}{2c} \right) + \dots \right] \quad (h) \end{aligned}$$

短時間後，第一項變為顯著，並可設

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E (T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} e^{-p_1 t} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} \right)$$

對 $y = \pm c$ 得拉應力

$$\sigma_z = \sigma_x = \frac{4\alpha E (T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} e^{-p_1 t} \frac{2}{\pi}$$

中間 $y = 0$ 上得壓應力

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{4\alpha E (T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} e^{-p_1 t} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$$

零應力各點由以下方程式求出

$$\frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} = 0$$

由此式得

$$y = 0.560c$$

如兩表面 $y = \pm c$ 上溫度保持為不同值之 T_1 及 T_2 ，相當時間後即建立一穩定狀態之熱流動，溫度變化即為下式之線型函數

$$T = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) + \frac{1}{2} (T_1 - T_2) \frac{y}{c} \quad (i)$$

代於 (f) 式，知如平板不受拘束時，熱應力為零（註2）。如各

(註1) 此問題為 Lord Rayleigh 所研究，見 *Phil. Mag.*, Ser. 6, vol. p. 169, 1901.

(註2) 一般情況下，當 T 為 x, y, z 線性函數時，對應於熱膨脹之應變

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = dT \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

適應配合條件 (125)，將無熱應力（閱第283頁問題2）。

邊對膨脹及轉動受完全控制時，由熱所發生應力即為 (e) 式所示。

例如，如 $T_2 = -T_1$ ，由 (i) 式知

$$T = T_1 \frac{y}{c} \quad (j)$$

由 (e) 式得

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha E}{1-\nu} T_1 \frac{y}{c} \quad (k)$$

最大應力為

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_z)_{\max} = \frac{\alpha E T_1}{1-\nu} \quad (l)$$

板之厚度不在此式內，但較厚板中兩表面上溫度差通常較大。故脆性厚板較薄板為易於受熱應力破壞。

在許多實際應用中，如板之一面與熱氣體溫度作週期性變化者相接觸，溫度 T 在板中亦將為對應之循環變化，並重疊於一穩定熱流動上。板表材料表面上溫度變化幅度通常較熱氣體者為小。另外，板中幅度在距表面遠處迅速遞減 (註1)。例如 (註2)，在 3.5 公分厚鋼板中，每分鐘 110 循環時，板溫度幅度表面上為 10°C ，而表面下 0.5 公分處為 0.33°C ，氣體溫度幅度為 640°C 。此種情況下，(f) 式第二及第三項對第一項變為極小，第一項值為 ± 5360 磅/平方吋，如 $T = \pm 10^\circ\text{C}$ ， $\alpha = 1.25 \times 10^{-5}$ 。

另一簡單例，取一半徑甚大之球體，設在大球中心處一半徑為 a 之小球體單元內溫度升高為 T 。因此單元不能自由膨脹，單元表面上將產生一壓力 p 。在球球體內 $r > a$ 點上由此壓力所生之徑向及周向應

(註1) 此等溫度問題見討論熱傳遞問題書中。例如，H. S. Carslaw 及 J. C. Jaeger, "Heat Conduction in Solids," 2d. ed., Oxford University Press, Fair Lawn, N.J., 1959.

(註2) G. Eichelberg, *Fors chungsarbeiten*, no. 263, 1923.

力可由公式 (207) 及 (208) 算出。設球之外半徑較 a 為極大，由此等公式知

$$\sigma_r = -\frac{pa^3}{r^3} \quad \sigma_t = \frac{pa^3}{2r^3} \quad (m)$$

在半徑 $r=a$ 處得

$$\sigma_r = -p \quad \sigma_t = 1/2p$$

由壓力 p ，此半徑之增長為

$$\Delta r = (ae_t)_{r=a} = \frac{a}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_t)]_{r=a} = \frac{pa}{2E} (1 + \nu)$$

此項增長必須與由溫度增高及壓力作用球體單元之半徑增長相等。因此得方程式

$$\alpha T a - \frac{pa}{E} (1 - 2\nu) = \frac{pa}{2E} (1 + \nu)$$

故知

$$p = \frac{2}{3} \frac{\alpha T E}{1 - \nu} \quad (n)$$

代於 (m) 式內，得加熱單元外部應力公式為

$$\sigma_r = -\frac{2}{3} \frac{\alpha T E a^3}{(1 - \nu) r^3} \quad \sigma_t = \frac{1}{3} \frac{\alpha T E a^3}{(1 - \nu) r^3} \quad (o)$$

習 題

1. 導 (d) 式時曾設 E 為常數，板之厚度 (z 向) 一致。

現設 E 對 y 向可變化，連續或斷續 (如複合板)，及厚度 h 隨 y 變更。證

(d) 式現為

$$\sigma_x = E(-\alpha T + \epsilon + \beta y)$$

內

$$\epsilon = \frac{\int_{-c}^{+c} E\alpha T h dy}{\int_{-c}^{+c} E h dy} \quad \beta = \frac{\int_{-c}^{+c} E\alpha T h y dy}{\int_{-c}^{+c} E h y^2 dy}$$

驗證當 E 及 h 爲常數時，此與 (d) 式相符。

2. 求中心區域加熱至均勻溫度 T ，類比於方程式 (n) 及 (o) 之結果，
 (a) 在一大薄板內及 (b) 平面應變之大板內。當 $T=0$ 時， ϵ_z 初時值爲零。加熱後由 $z=$ 常數各面上所施適當之 σ_z 維持各處 $\epsilon_z=0$ 。加熱區爲

$$r^2 < a^2 \quad r^2 = x^2 + y^2$$

加熱區外溫度爲零。

第一四九節 板條內縱向溫度變化

設一薄板條 (圖 225) 經非均勻加熱使溫度 T 爲 x 之函數，而在任何斷面上則一致。如板割爲細條如 AB (圖 225)，此等細條將爲不同之豎向膨脹。因相互牽制關係，將產生應力，因事實上各條均爲板之一部。

取獨立之細條，如豎向膨脹被阻遏時將受壓應力

$$\sigma_y = -\alpha ET \quad (a)$$

施於每細條兩端 A 及 B 處。除側向膨脹外，各條間配合爲一體與未經加熱板相同。爲求熱應力，必須於 (a) 上疊加由等值反向力，即拉力 αET 施於 $y = \pm c$ 所生應力。

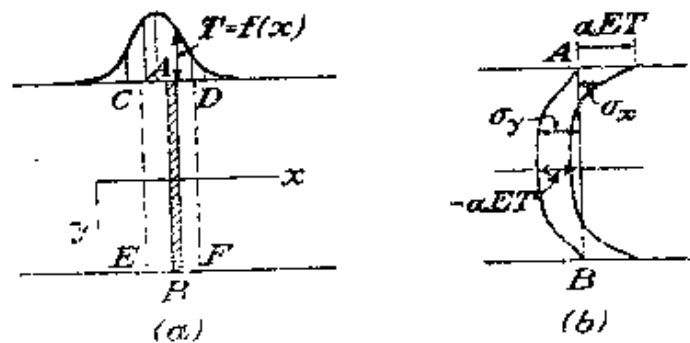


圖 225

如加熱範圍限於較寬度 $2c$ 爲小之一段長內，如圖 225 所示之 $CDFE$ ，拉力 αET 之影響僅對上邊 CD 附近及下邊 EF 附近有顯著作用。此等附近區域可視爲 37 節所述問題類型。前於第 111 頁曾指出

直線邊界上正交應力在該處產生與邊界平行相同之應力。因此拉應力 αET 將產生 x 向之拉應力 αET ，對邊界遠距離處兩應力均消失。將此等應力疊加於 y 向壓應力 (a)，得板中最高溫度處 AB 沿線 σ_x 及 σ_y 曲線如圖 225b 所示 (註 1)。接近邊緣處應力 σ_x 較重要，值為 αET ， T 為正時為拉應力；接近中部處 σ_y 較大， T 為正時為壓應力 αET 。最大應力值為 αET_{\max} 。

如溫度 T 為 x 之週期函數，施於邊緣之拉力 αET 代表第 24 節所述問題類型。如

$$T = T_0 \sin \alpha x \quad (b)$$

由第 24 節 (k) 式，取 $A = B = -\alpha ET_0$ ，得

$$\sigma_x = -2\alpha ET_0 \frac{(\alpha c \cosh \alpha c - \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \sin \alpha x$$

$$\sigma_y = 2\alpha ET_0 \frac{(\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \sin \alpha x$$

$$\tau_{xy} = 2\alpha ET_0 \frac{\alpha c \cosh \alpha c \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cos \alpha x$$

連同 (a) 式之壓應力 $\sigma_y = -\alpha ET$ ，即得板中熱應力 (註 2) 如圖 225c 示各式波長沿最高溫度各線上應力 σ_x 分布情況。由圖知最大應力當波長變短時增值，趨於 αET_0 。已知正弦式溫度分布解，亦可討論其他對 x 為週期函數之溫度。結論為有限長度板中最大應力與無限長條內所得之 αET 僅有少許差別。

本節及以上諸節中，吾人曾於每一問題中 (見第 45 節及本節問題除外) 施以外力以阻遏由熱膨脹所造成之應變。此應變阻遏法可不統應用以阻遏由膨脹所生所有三個應變分量，三維問題之一般方程式將

(註 1) J. N. Goodier, *Phys.*, vol. 7, p. 156, 1936.

(註 2) 此問題曾經 J. P. Den Hartog 討論, *J. Franklin Inst.*, vol. 222, p. 149, 1936, 及與鑄接程序中熱應力有關問題。

以此觀點及解釋導出於第153節。

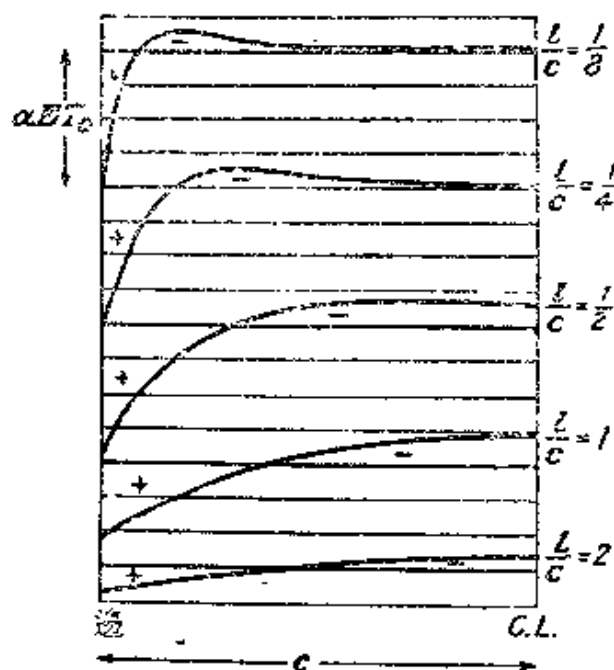


圖 226

熱應力問題自始即可採另一獨立途徑進行討論。附加荷力或變形可視為較普遍例之非均勻溫度及附加荷力（或變形）同時作用問題之特例。以下三節將以此法分別討論圓盤、圓柱及球體問題。

第一五〇節 薄圓盤：溫度對中心對稱

當溫度 T 沿盤厚度無變化時，吾人可設由加熱所生之應力及位移亦不在厚度上變更。應力 σ_r 及 σ_θ 適應平衡方程式

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (a)$$

剪應力因變形對稱條件為零。

常用之應力-應變關係，(51)式，對平面應力，需加修正，因此時應變部分係由熱膨脹，另一部分由應力所生。如 ϵ_r 代表實際徑向應變， $\epsilon_r - \alpha T$ 代表應力所生部分，則得

$$\epsilon_r - \alpha T = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad (b)$$

類此

$$\epsilon_{\theta} - \alpha T = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta} - \nu\sigma_r) \quad (c)$$

解 (b) 及 (c) 式，得

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_r + \nu\epsilon_{\theta} - (1+\nu)\alpha T]$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_{\theta} + \nu\epsilon_r - (1+\nu)\alpha T] \quad (d)$$

用此等結果方程式 (a) 爲

$$r \frac{d}{dr} (\epsilon_r + \nu\epsilon_{\theta}) + (1-\nu)(\epsilon_r - \epsilon_{\theta}) = (1+\nu)\alpha r \frac{dT}{dr} \quad (e)$$

設 u 代表徑向位移，由第30節知

$$\epsilon_r = \frac{u}{r} \frac{d}{dr} r, \quad \epsilon_{\theta} = \frac{u}{r} \quad (f)$$

代於 (e) 式，得

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr}$$

此可另寫爲

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right] = (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr} \quad (g)$$

將此式積分得

$$u = (1+\nu)\alpha \frac{1}{r} \int_a^r T r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (h)$$

積分之下限 a 可任意選擇，如盤中帶孔時可取爲內半徑。對一實體盤可取爲零。

應力分量可用 (h) 解於 (f) 式然後代於 (d) 式求得。如此則

$$\sigma_r = -\alpha E \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr + \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right] \quad (i)$$

$$\sigma_{\theta} = \alpha E \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr - \alpha E T + \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right] \quad (j)$$

常數 C_1 及 C_2 由邊界條件決定。

對一實體圓盤，取 a 為零，因知

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^r T r dr = 0$$

由 (h) 式知 C_2 項必須除外以使中心處 u 為零。盤邊 $r=b$ 處 $\sigma_r=0$ ，故由 (i) 式得

$$C_1 = (1-\nu) \frac{\alpha}{b^2} \int_0^b T r dr$$

應力分量最後之算式為

$$\sigma_r = \alpha E \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b T r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr \right) \quad (245)$$

$$\sigma_{\theta} = \alpha E \left(-T + \frac{1}{b^2} \int_0^b T r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr \right) \quad (246)$$

在盤中心處可得有限值因

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr = \frac{1}{2} T_0$$

T_0 為中心處溫度。

第一五一節 長圓柱體

溫度設為軸對稱並與軸向坐標 z 無關 (註1)。另先設 w ，軸向位移，每處均為零，對自由端問題解最後予以修正。

平面應變 此時有三應力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ，所有剪應力及剪應變均為零，此係因軸對稱及軸向均勻關係。應力與應變關係為

(註1) 此問題第一次係由 J. M. C. Duhamel 解出，見 "Memoires... par Divers Savants", vol. 5, p. 440, Paris, 1838.

$$\begin{aligned}\epsilon_r - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \epsilon_\theta - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \epsilon_z - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]\end{aligned}\quad (247)$$

因 $w = 0$ ，故 $\epsilon_z = 0$ ，(247) 第三式爲

$$\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha ET \quad (a)$$

代於 (247) 前兩式，此等方程式變爲

$$\begin{aligned}\epsilon_r - (1 + \nu)\alpha T &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_\theta \right) \\ \epsilon_\theta - (1 + \nu)\alpha T &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_r \right)\end{aligned}\quad (b)$$

此等方程式可由對應之平面應力方程式，即前節所用之 (b) 及 (c) 式求得，僅須以 $E/(1 - \nu^2)$ 代 E ， $\nu/(1 - \nu)$ 代 ν ， $(1 + \nu)\alpha$ 代 α 即可。

前節中 (a) 及 (f) 兩式仍可應用。對 u ， σ_r ，及 σ_θ 解法完全以同一方式進行。因此吾人可代以上各值於 (h)，(i) 及 (j) 各式中。故對本問題

$$u = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \frac{1}{r} \int_a^r T r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (c)$$

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{1 - \nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr + \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{C_1}{1 - 2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (d)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr - \frac{\alpha ET}{1 - \nu} + \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{C_1}{1 - 2\nu} + \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (e)$$

由 (a) 式得

$$\sigma_z = -\frac{\alpha ET}{1 - \nu} + \frac{2\nu EC_1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (f)$$

爲使任何處 w 爲零，(f) 式所示之正交力必須分布於柱兩端上。但吾人現可重疊一均勻軸向力 $\sigma_z = C_3$ ，選 C_3 使兩端上合力爲零。此自乘平衡系統，作用於柱之兩端，由聖維南原理，將僅有局部效應。

應力分量 σ_r ， σ_θ 將仍爲 (d) 及 (e) 式所示者。但位移 u 則受軸應力 C_3 之影響。一項 $-\nu C_3 r/E$ 須加於 (c) 式右方。此軸向位移係對應於均勻應力 C_3 者。

實心柱體 此例中吾人可取 α ，即積分式 (c)，(d)，及 (e) 之限爲零。當 $r=0$ 時位移 u 必須爲零。因此必須捨棄含 C_2 各項。

常數 C_2 由曲面 $r=b$ 上無外力作用，故 $(\sigma_r)_{r=b}=0$ 之條件求出。由 (d) 式，使 $C_2=0$ ， $a=0$ 得

$$\frac{C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\alpha}{1-\nu} \frac{1}{b^2} \int_0^b T r \, dr \quad (g)$$

軸向應力 (f) 之合力爲

$$\int_0^r J_0\left(\beta_n \frac{r}{b}\right) r \, dr = \frac{br}{\beta_n} J_1\left(\beta_n \frac{r}{b}\right)$$

均勻軸向應力 C_3 之合力爲 $C_3 \pi b^2$ 。使軸向力總合爲零之 C_3 值因此爲

$$C_3 \pi b^2 = \frac{2\pi\alpha E}{1-\nu} \int_0^b T r \, dr - \frac{2\nu E C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \pi b^2 \quad (h)$$

對零值軸向應變 ($\epsilon_z=0$)，由 (c)，(d)，(e)，(f)，(g)，及 (h)， u ， σ_r ， σ_θ ， σ_z 之最後算式爲

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \left[(1-2\nu) \frac{r}{b^2} \int_0^b T r \, dr + \frac{1}{r} \int_0^r T r \, dr \right] \quad (248)$$

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b T r \, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T r \, dr \right) \quad (249)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b T r \, dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T r \, dr - T \right) \quad (250)$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2\nu}{b^2} \int_0^b T r \, dr - T \right) \quad (251)$$

對零軸向力 ($F_z=0$)， σ_r 及 σ_θ 爲 (249) 及 (250) 式所示，但 u 及 σ_z 爲

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \left(\frac{1-3\nu}{1+\nu} \frac{r}{b^2} \int_0^b T r \, dr + \frac{1}{r} \int_0^r T r \, dr \right) \quad (252)$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2}{b^2} \int_0^b T r \, dr - T \right) \quad (253)$$

例如取一起起始溫度爲常數之長柱體。自開始瞬間 $t=0$ 起，柱之側面即維持溫度爲零 (註 1)，任何瞬間 t 溫度分布爲下式之級數 (註 2)

$$T = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\beta_n \frac{r}{b} \right) e^{-p_n t} \quad (i)$$

內 $J_0(\beta_n r/b)$ 爲零階柏塞爾函數， β 爲方程式 $J_0(\beta)=0$ 之根。級數 (j) 中各係數爲

$$A_n = \frac{2}{\beta_n J_1(\beta_n)}$$

常數 p_n 爲

$$p_n = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{\beta_n^2}{b^2} \quad (j)$$

內 k 爲傳熱係數， c 爲材料之比熱， ρ 爲密度。代級數 (i) 於 (249) 式，並用下式 (註 3)

$$\int_0^r J_0 \left(\beta_n \frac{r}{b} \right) r \, dr = \frac{br}{\beta_n} J_1 \left(\beta_n \frac{r}{b} \right)$$

(註 1) 此係設柱體表面溫度突變爲零。如柱體表面溫度爲 T_1 ，則各方程式中 T_0 項須換爲 $T_0 - T_1$ 。

(註 2) 參考 Berly, "Fourier Series und Spherical Harmonics", p. 229. 此例中熱應力之計算見 A. Dinnik, "Applications of Bessel's Function to Elasticity Problems," p. 2, p. 95, Ekaterinoslav, 1915. 另閱 C. H. Lees, *Proc. Roy. Soc. (London)*, vol. 101, p. 411, 1922.

(註 3) 參考 E. Jahnke, F. Emde, & F. Lösch, "Tables of Higher Functions," McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

得

$$\sigma_r = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n t} \left\{ \frac{1}{\beta_n^2} - \frac{1}{\beta_n^2} \frac{b}{r} \frac{J_1(\beta_n(r/b))}{J_1(\beta_n)} \right\} \quad (k)$$

類此，代級數 (i) 於 (250) 式，得

$$\sigma_\theta = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n t} \left\{ \frac{1}{\beta_n^2} + \frac{1}{\beta_n^2} \frac{b}{r} \frac{J_1(\beta_n(r/b))}{J_1(\beta_n)} - \frac{J_0(\beta_n(r/b))}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right\} \quad (l)$$

代級數 (i) 於 (253) 式，得

$$\sigma_z = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n t} \left\{ -\frac{2}{\beta_n^2} - \frac{J_0(\beta_n(r/b))}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right\} \quad (m)$$

公式 (k)，(l)，及 (m) 代表問題之完全解。若干數字例題見第 467 頁註 2 狄尼克 (A. Dinnik) 及李氏 (C. H. Lee) 論文中。

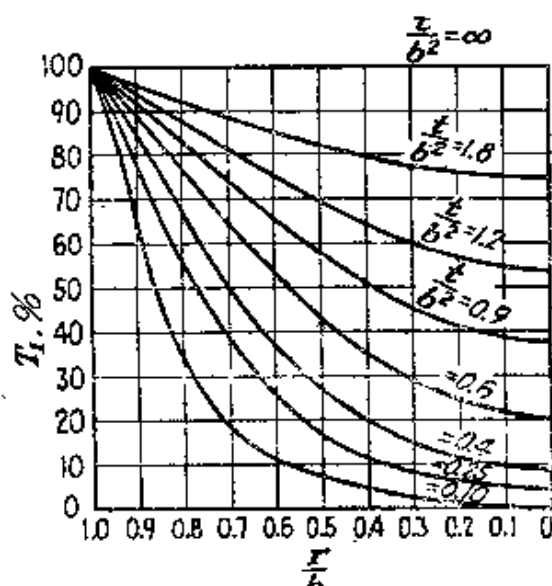


圖 227

圖 227 代表 (註) 鋼柱體內之溫度分布。設柱體起始為均勻溫度零度，由瞬間 $t=0$ 開始，柱之表面保持溫度 T_1 ，沿半徑溫度分布，對各 t/b^2 值 (t 以秒計， b 以公分計)，由各曲線表示之。由方程式 (i) 及 (j) 知對各不同半徑柱體，如加熱時間 t 與直徑平方成正比時，溫度分布情況相同。由上圖，整柱體內平均溫度及半徑 r 內部分柱體

(註) 此圖取自 A. Stodola, "Dampf-und Gasturbinen," 6th. ed., p. 961.

平均溫度可以算出。已知此等溫度時，熱應力可由方程式 (249)，(250) 及 (253) 求得。如取一極小值之 t ，上述之平均溫度為零，在表面上

$$\sigma_r = 0 \quad \sigma_\theta = \sigma_z = -\frac{\alpha E T_1}{1-\nu}$$

此為柱體內由加熱所生熱應力之最大數值。此等於全面阻遏表面內（但非正交於表面）熱膨脹所需應力。加熱時此為壓力，冷卻時為拉力。為減低最大應力，通常對軸及轉輪以較最後溫度 T_1 為低之溫度開始加熱，並以與直徑平方成正比增加加熱時間。

具同心圓孔之圓柱 (註) 孔之半徑為 a ，柱之外半徑為 b ，(c)，(d) 及 (e) 式常數 C_1 及 C_2 由 σ_r 在此兩半徑上為零之條件求出，如此則

$$\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{a^2} = 0$$

$$-\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^2} \int_a^b T r \, dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{a^2} \right) = 0$$

故得

$$\frac{E C_2}{1+\nu} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr$$

$$\frac{E C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr$$

將此等值代於 (d)，(e)，及 (f)，並在 (f) 式加軸應力 C_3 使軸向合力為零，得以下各公式

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^r T r \, dr - \int_a^r T r \, dr \right) \quad (254)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^r T r \, dr + \int_a^r T r \, dr - T r^2 \right) \quad (255)$$

(註) H. Lorenz, *Z. Ver. Deutsch. Ing.*, vol. 51, p. 743, 1907.

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2}{b^2-a^2} \int_a^r T r \, dr - T \right) \quad (256)$$

舉一穩定熱流動例。如 T_i 為柱體內部表面上溫度，外面表面溫度為零，對中心 r 距離處溫度為下式所表示

$$T = \frac{T_i}{\log(b/a)} \log \frac{b}{r} \quad (n)$$

代於方程式 (254)，(255)，及 (256) 中，得下列之熱應力各算式 (註)。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left[-\log \frac{b}{r} - \frac{a^2}{(b^2-a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \log \frac{b}{a} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left[1 - \log \frac{b}{r} - \frac{a^2}{(b^2-a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \log \frac{b}{a} \right] \\ \sigma_z &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left[1 - 2 \log \frac{b}{r} - \frac{2a^2}{(b^2-a^2)} \log \frac{b}{a} \right] \end{aligned} \quad (257)$$

如 T_i 為正，所有各點上徑向應力均為壓力，而在內外表面上均為零。應力分量 σ_θ 及 σ_z 在柱內外表面上均為其最大數值。取 $r=a$ ，得

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left(1 - \frac{2b^2}{b^2-a^2} \log \frac{b}{a} \right) \quad (258)$$

取 $r=b$ ，得

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left(1 - \frac{2a^2}{b^2-a^2} \log \frac{b}{a} \right) \quad (259)$$

圖228示當 $a/b=0.3$ 時熱應力分布於柱壁厚度上情況。如 T_i 為正，內面上為壓應力，外面上為拉應力。設材料為石、磚、或混凝土，均對拉力為弱，在上述條件下將在外表面上開始發生裂痕。

(註) 方程式 (257) 應力速快計算圖表見 L. Barker, *Eng.* vol. 124, p. 443, 1927.

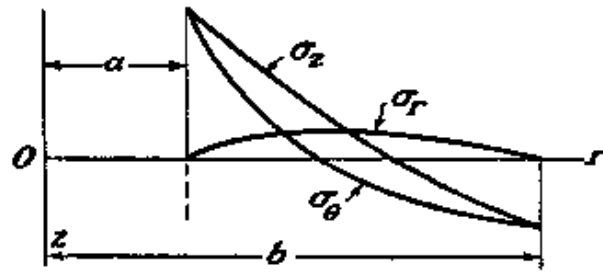


圖 228

如壁厚與柱體外半徑比較為小值，(258) 及 (259) 式可由下式予以簡化

$$\frac{b}{a} = 1 + m \quad \log \frac{b}{a} = m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \dots$$

m 為一微量。如此則

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = -\frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \left(1 + \frac{m}{3}\right) \quad (258')$$

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \left(1 - \frac{m}{3}\right) \quad (259')$$

如柱體外表面上溫度不為零，可代內外溫度差 $T_i - T$ 。於以上各式以替代 T_i ，各式仍可應用。

壁厚為極薄之情況下可作更進一步之簡化，於 (258') 及 (259') 式中忽計 $m/3$ 項，得

$$\begin{aligned} (\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} &= -\frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \\ (\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} &= \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \end{aligned} \quad (260)$$

此時壁厚度上熱應力分布與厚度為 $2c = b - a$ 平板上所有者相同，如溫度為下式 (圖224)

$$T = \frac{T_i y}{(b-a)}$$

各邊均箝入，使非均勻加熱所生板之撓曲可被阻止 [閱第 148 節 (k)]

式)。

如一高頻率熱度變換疊加於一穩定熱流動上，由變化所生之熱應力可用對平板所解釋之算法處理之 (閱第148節)。

以上討論中係設柱體極長，而對距兩端遠處考慮其應力。在兩端附近處，由局部不規律關係，熱應力分布問題顯較困難。現考慮薄壁柱之此種問題。解

(260) 需圖 (229a) 所示之正交力分布於柱兩端上。當自求端柱內應力時，吾人需疊加一等值反向力系統於圖 (229a) 所示之系統上。在一薄壁厚度為 h 之柱

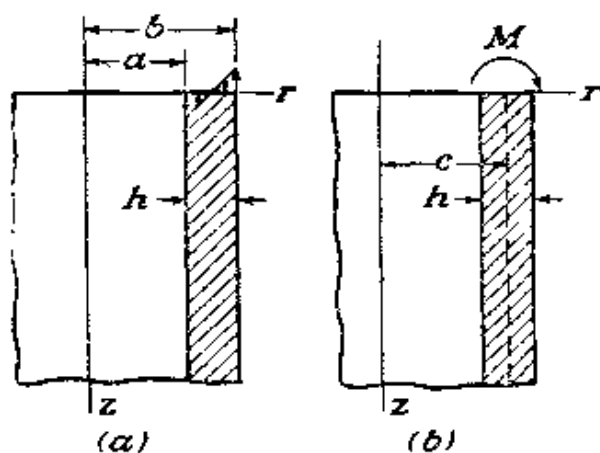


圖 229

端上，此力系統可化為撓矩 M ，如圖 229b 所示，均勻分布於柱近緣值為

$$M = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \frac{h^2}{6}$$

每單位長。為估計此撓矩所造成之應力，取一縱向長條，寬為一單位，割自此圓柱壳。此一長條可視為彈性基礎上之桿。此條之撓曲線為下式 (註)

$$u = \frac{M e^{-\beta z}}{2\beta^2 D} (\cos \beta z - \sin \beta z) \quad (p)$$

內

$$\beta = \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{c^2 h^2}} \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (q)$$

(註) 見 S. Timoshenko, "Strength of Materials," 3d. ed. pp. 126-137, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. 1956.

c 爲柱體壳之平均半徑。已知此撓曲線，對應之撓應力 σ_z 及切向應力 σ_θ 對任何 z 值即可計算。最大撓度顯然在末端 $z=0$ 處，其值爲

$$(u)_{z=0} = -\frac{M}{2\beta^2 D} = -\frac{\alpha c T_i \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)}$$

切線方向對應之應變分量爲

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{c} = \frac{\alpha T_i \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)} \quad (r)$$

壁之外表面上切向之應力分量可由下式求得

$$\sigma_\theta = E\epsilon_\theta + \nu\sigma_z = \frac{\alpha E T_i \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)} - \frac{\nu\alpha E T_i}{2(1-\nu)}$$

將此項應力加於 (260) 式所得之對應應力，薄壁柱自由端上最大切向應力爲

$$(\sigma_\theta)_{max} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \left(\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{3}} - \nu + 1 \right) \quad (261)$$

設 $\nu=0.3$ ，得

$$(\sigma_\theta)_{max} = 1.25 \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)}$$

因此柱自由端上最大拉應力較 (260) 式所計距兩端遠處點上應力大百分之廿五。由方程式 (p) 知接近柱自由端應力之增值，因視位移 u 而定，爲局部性者，並當對末端距離 z 值增加時迅速降低。

計算薄壁圓柱熱應力之近似方法，用彈性基礎上桿之撓曲線，亦可用於圓柱壳沿軸向溫度變化之例中（註）。適當之外壓力將對消每一環之膨脹，使各環膨脹自由。撤去壓力，各環現均連結，爲一與熱應力無關之可解問題。

習 題

1. 由 (249) 及 (250) 式計算 $r=0$ 處 σ_r 及 σ_θ 。解釋爲何結果必須相同。

求柱體有一同心圓孔位移 w 之算式，設無軸向力作用。解釋爲何當末端條件爲 $\sigma_z=0$ 時，此式不能應用。

（註）見 S. Timoshenko & J. M. Lessells, "Applied Elasticity," p. 147, 1925. and C. H. Kent, *Trans. ASME, Applied Mechanics Division*, vol. 53, p. 167, 1931.

2. 如在 (254) 及 (256) 式中置 $a=0$, 結果與 (249) 及 (250) 式相同, 而在 $r=0$ 處 σ_r 不爲零 (問題 1)。但 (254) 適應 $r=a$ 處 $\sigma_r=0$ 之邊界條件且不論 a 值如何小均繼續如此。

用當孔爲極小時其附近之應力情況以澄清此點。由實體圓柱開始並考慮移去作用於孔之 σ_r 。

第一五二節 球體

此時僅考慮溫度對球心對稱之簡單情況, 故溫度只爲徑向距離 r 之函數 (註 1)。

因對稱關係將有三非零應力分量存在, 徑向分量 σ_r 及兩切向分量 σ_t , 如第 136 節。單元之平衡條件 [圖 205, (e) 式第 412 頁], 沿徑向爲

$$-\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_t) = 0 \quad (a)$$

應力 - 應變關係爲

$$\epsilon_r - \alpha T = \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_t) \quad (b)$$

$$\epsilon_t - \alpha T = \frac{1}{E}[\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_t)] \quad (c)$$

設 u 爲徑向位移, 得

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \epsilon_t = \frac{u}{r} \quad (d)$$

由 (b) 及 (c) 式得

(註 1) 此問題首由 Duhamel 解出, *loc. cit.*; F. Neumann, *Abhandle, Wiss.*, Berlin, 1841; 另閱其所著 "Voresungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper," Leipzig 1885; J. Hopkinson, *Messenger Math.*, vol. 8, p. 168, 1879. 不對稱溫度曾由 C. W. Borchardt 研討, 見 *Monatsber. Akad. Wiss.*, Berlin, 1873, p. 9.

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_r + 2\nu\epsilon_t - (1+\nu)\alpha T] \quad (e)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\epsilon_t + \nu\epsilon_r - (1+\nu)\alpha T] \quad (f)$$

將此等值代於 (a) 式，並用 (d) 代之 ϵ_r 及 ϵ_t ， u 之微分方程式為

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{dT}{dr} \quad (g)$$

此可另寫為以下形式

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right] = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{dT}{dr}$$

其通解為

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{1}{r^2} \int_a^r T r^2 dr + C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \quad (h)$$

內 C_1 及 C_2 為積分常數，其值由邊界條件決定， a 為積，為任何適當之積分下限，例如中空球體內半徑。

此解可代於 (d) 式，其結果用於 (e) 及 (f)。如此則

$$\sigma_r = -\frac{2\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^3} \int_a^r T r^2 dr + \frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu} \frac{1}{r^3} \quad (i)$$

$$\sigma_t = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^3} \int_a^r T r^2 dr + \frac{EC_1}{1-2\nu} + \frac{EC_2}{1+\nu} \frac{1}{r^3} - \frac{\alpha ET}{1-\nu} \quad (j)$$

吾人現考察若干例證。

實球體 此例中積分下限 a 取為零。當 $r=0$ 時， $u=0$ 。並因

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_a^r T r^2 dr = 0$$

故吾人必須自 (h) 式中除去 C_2 項。(i) 及 (j) 式中應力分量在中心處現將為有限值，因

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \int_a^r T r^2 dr = \frac{T_0}{3}$$

T_1 爲中心處溫度。常數 C_1 可由 $r=b$ 外表面上無外力作用之條件決定。

由 (i) 式 $\sigma_r = 0$, $a = 0$, $C_2 = 0$, $r = b$, 得

$$\frac{EC_1}{1-2\nu} = \frac{2\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr$$

應力分量變爲

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr \right) \\ \sigma_t &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr + \frac{1}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr - T \right) \end{aligned} \quad (262)$$

半徑 r 範圍內球體平均溫度爲

$$\frac{4\pi \int_0^r Tr^2 dr}{4/3\pi r^3} = \frac{3}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr$$

因此任何半徑 r 處應力 σ_r 與整個球體平均溫度及 r 半徑球體平均溫度差成正比，如溫度分布爲已知，應力計算即無困難 (註 1)。格倫佰 (G. Grünberg) (註 2) 氏研究受三垂直方向相等拉力同向性材料強度時曾例舉此種計算。如將一均勻溫度 T_0 之球體放置於較高溫度 T_1 之液體中，球之外部膨脹並使球內部受各向均勻之拉力。拉應力最大值出現以下時間

$$t = 0.0574 \frac{b^2 c \rho}{k} \quad (k)$$

式內 b 爲球體半徑， k 爲熱傳導係數， c 爲材料之比熱， ρ 爲密度。此最大應力值爲 (註 3)

$$\sigma_r = \sigma_t = 0.771 \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} (T_1 - T_0) \quad (l)$$

(註 1) 若干此種計算見 E. Honegger 論文 Festchrift Prof. A. Stodola, Zürich, 1929

(註 2) Z. Physik, vol. 35, p. 548, 1925.

(註 3) 在分析中係設球體表面可立達液體之溫度 T_1 。

最大壓應力係在球體表面上，等於 $\alpha E(T_1 - T_0)/(1 - \nu)$ ，此與前對圓柱體所得者相同（見第469頁）。用（k）及（l）式於鋼料中，取 $b = 10$ 公分， $T_1 - T_0 = 100\text{C}^\circ$ ，得 $\sigma_r = \sigma_t = 1,270$ /平方公分， $t = 33.4$ 秒。

中心有孔之球體 用 a 及 b 代表中空球體之內外半徑，吾人可由 σ_r 在內外表面上為零之條件以決定常數 C_1 與 C_2 值。由（j）式得

$$\frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu} \frac{1}{a^3} = 0$$

$$- \frac{2\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^3} \int_a^b T r^2 dr + \frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu} \frac{1}{b^3} = 0$$

解 C_1 及 C_2 並代入（i）及（j），得

$$\sigma_r = \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{r^3 - a^3}{(b^3 - a^3)r^3} \int_a^b T r^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_a^r T r^2 dr \right]$$

$$\sigma_t = \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{2r^3 + a^3}{2(b^3 - a^3)r^3} \int_a^b T r^2 dr + \frac{1}{2r^3} \int_a^r T r^2 dr - \frac{1}{2} T \right] \quad (263)$$

因此，如溫度為已知時，即可計算各應力分量。

舉一例，取穩定熱流。設內表面上溫度為 T_i ，外表面上溫度為零。如此則對中心任一距離 r 處之溫度為

$$T = \frac{T_i a}{b-a} \left(\frac{b}{r} - 1 \right) \quad (m)$$

將此代入（263）式，得

$$\sigma_t = \frac{\alpha E T_i}{1-\nu} \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left[a + b - \frac{1}{2r} (b^3 + ab + a^2) - \frac{a^2 r^2}{2r^3} \right]$$

$$\sigma_r = \frac{\alpha E T_i}{1-\nu} \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left[a + b - \frac{1}{r} (b^2 + a^2 + a^2) + \frac{a^2 b^2}{r^3} \right]$$

由此知在 $r = a$ 及 $r = b$ 處 σ_r 為零。應力變為最大或最小值如

$$r^2 = \frac{3a^2 b^2}{a^2 + ab + b^2}$$

應力 σ_t ，當 $T_i > 0$ 時，隨 r 增大而增值。如 $r = a$ ，得

$$\sigma_t = -\frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \frac{b(b-a)(a+2b)}{b^3-a^3} \quad (\text{n})$$

如 $r=b$ ，得

$$\sigma_t = \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \frac{a(b-a)(2a+b)}{b^3-a^3} \quad (\text{o})$$

如球體變為薄殼時，可寫

$$b = a(1+m)$$

式內 m 為一微量，代入 (n) 及 (o) 式並忽計高階 m ，得：

$r=a$ 時

$$\sigma_t = -\frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \left(1 + \frac{2}{3}m\right)$$

$r=b$ 時

$$\sigma_t = \frac{\alpha ET_t}{2(1-\nu)} \left(1 - \frac{2}{3}m\right)$$

如不計 $2/3m$ 即得前對圓柱形薄殼切向應力〔見 (260) 式〕及筒邊薄板應力相同之值。

第一五三節 一般方程式

以位移所示之平衡方程式可以引申以包括熱應力及應變。三維問題中應力-應變關係為

$$\begin{aligned} \epsilon_x - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (\text{a})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \end{aligned} \quad (\text{b})$$

溫度對方程式不發生影響，因同向性材料中受自由熱膨脹時並無角度

變化。

將 (a) 中各式相加並用 (7) 式符號，得

$$e = \frac{1}{E}(1-2\nu)\theta + 3\alpha T$$

用此式，並解 (a) 式內之應力，得

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\epsilon_x - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad (c)$$

代此式及第 (6) 式於平衡方程式 (123) 中，並設無體力作用，得三方程式其第一個為

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (264)$$

計算熱應力時此等方程式替代 (127) 各式。各邊界方程式，由 (c) 及 (6) 式，並設無體力作用，變為

$$\begin{aligned} \frac{\alpha ET}{1-2\nu} l &= \lambda e l + G\left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n\right) \\ &+ G\left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n\right) \end{aligned} \quad (265)$$

比較 (264) 與 (265) 及 (127) 與 (130)，知以下各項

$$-\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z}$$

取代各體力分量 \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} 。另

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu} l \quad \frac{\alpha ET}{1-2\nu} m \quad \frac{\alpha ET}{1-2\nu} n$$

取代面積力 \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} 。因此由溫度 T 所生之位移 u , v , w ，與由體力

$$X = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad Z = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (d)$$

及分布於面上正交拉力

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad (e)$$

所產生之位移相同。

如適應邊界條件 (265) 式之 (264) 式解已求得，剪應力可用已得位移 u, v, w 自 (b) 式算出，正交應力可由 (c) 式算出。由 (c) 式知正交應力分量含兩部分：(1) 一部分得自通常應變分量，(2) 另一部為流體靜壓力式之

$$-\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad (f)$$

其值與各點上溫度成正比。因此，由非均勻加熱所生之總應力可將流體靜壓力 (f) 與體力所生應力 (d) 及面力所生應力 (e) 重疊求得。

應變阻遏法 用應變阻遏法可達同一結論。設想受非均勻加熱之物體分為極微單元。設自由熱應變 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha T$ 均由施於每一單元上均勻壓力 p ，值為 (f) 式者所阻遏。如此則自由熱應變即被對消。各單元間互相配合情況與原物體大小及形狀完全相同。壓力分布 (f) 可由引進某體積力及面積壓力達成。此等力必需適應平衡方程式 (123) 及邊界條件 (124)。代於此等方程式，得

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p = -\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (g)$$

因此知，欲使單元所成之物體與其原形一致，體積力須為

$$X = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad Y = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad Z = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (h)$$

另壓力 (f) 應施於表面上。

吾人現設各單元均經連結並移去各 (h) 力及表面壓力 (-f)。如此則熱應力顯然可由重疊於壓力 (f) 上以下體力所造成之應力

$$X = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad Z = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z}$$

及由表面上正交拉力所造成之應力

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu}$$

求得。此等應力適應平衡方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (266)$$

及邊界條件

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \\ \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l &= \frac{\alpha ET}{1-2\nu} m \\ \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m &= \frac{\alpha ET}{1-2\nu} n \end{aligned} \quad (567)$$

連同第85節所討論之配合條件。所造成之位移 u ， v ， w 及應變

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ 等} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \text{ 等}$$

與此等應力關係仍為虎克定律 (3) 及 (6) 式。用此等關係，連同 (266) 及 (267) 式代表一普通 (等溫) 荷力問題，內體力與面上荷力係由原熱彈性問題之溫度場 $T(x, y, z)$ 所規定。此普通問題解顯然提供實際熱彈性之位移。

前對普通問題所用方法及所建立之理論顯然可立即施用於熱彈性問題中。例如第96節之唯一性定理保證對已知體力及溫度場，在線性

及微變形理論中，應力及應變僅有一種解。屈曲問題當然不在此範圍內。

第97節中所述倒轉定理，在利用普通問題已知解於熱彈性問題中特別有用。吾人現解釋此法並示若干題例。

第一五四節 熱彈性倒轉定理

上述普通問題現取為第97節中定理之第一狀態，相當於各符號均帶一個分號，該定理第二狀態視為一般性者，如第97節所用。

用以下簡化寫法

$$\beta = \frac{E}{1-2\nu} \quad (\text{a})$$

並用 u, v, w 代表實際熱彈性位移分量，定理變為

$$\begin{aligned} \int (X''u + Y''v + Z''w) d\tau + \int (\bar{X}''u + \bar{Y}''v + \bar{Z}''w) dS \\ = -\beta \int \left(u'' \frac{\partial}{\partial x} \alpha T + v'' \frac{\partial}{\partial y} \alpha T + w'' \frac{\partial}{\partial z} \alpha T \right) d\tau \\ + \beta \int (lu'' + mv'' + nw'') \alpha T dS \end{aligned} \quad (\text{b})$$

發散定理，(138) 式，可寫為

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (u'' \alpha T) + \frac{\partial}{\partial y} (v'' \alpha T) + \frac{\partial}{\partial z} (w'' \alpha T) \right] d\tau \\ = \int (lu'' + mv'' + nw'') \alpha T dS \end{aligned} \quad (\text{c})$$

右方積分相當於 (b) 式右方第二項。左方可寫為

$$\frac{\partial}{\partial x} (u'' \alpha T) = u'' \frac{\partial}{\partial x} \alpha T + \frac{\partial u''}{\partial x} \alpha T \quad \text{等}$$

如此則 (b) 式變為

$$\int (X''u + Y''v + Z''w) d\tau + \int (\bar{X}''u + \bar{Y}''v + \bar{Z}''w) dS = \int \theta'' \alpha T d\tau \quad (268)$$

內〔參閱(7)及(8)〕。

$$\theta'' = \beta \left(\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z} \right) = \sigma_x'' + \sigma_y'' + \sigma_z'' \quad (d)$$

方程式(268)爲一熱彈性倒轉定理(註1)。左方可稱爲輔助問題內外加體力(X'' , ...)及面積力(\bar{X}'' , ...)對熱彈性問題實際位移(u, v, w)所作之功。

第一五五節 整體熱彈性變形、任意溫度分布

對上述原理以下之應用中(註2)，輔助問題爲初等問題或爲本書中前已解出者。每一例中，尋求其簡單通用之設計公式。

體積變更 取任意形式之物體，體內有洞孔或無洞孔，設輔助狀態爲均勻拉應力 σ'' 施於整個物體表面上，如有洞孔存在時，其表面亦受相同均勻拉力。如此則材料任何點上

$$\sigma_x'' = \sigma_y'' = \sigma_z'' = \sigma'' \quad \theta'' = 3\sigma'' \quad (a)$$

此輔助狀態各作用力對熱彈性位移 u, v, w 對應於任何溫度升高(註3) $T(x, y, z)$ 所作之功爲 $\sigma'' \Delta\tau$ ， $\Delta\tau$ 爲物體熱彈性體積增量。由定理(268)知

$$\sigma'' \Delta\tau = \int 3\sigma'' \alpha T d\tau \quad \text{亦即} \quad \Delta\tau = \int 3\alpha T d\tau \quad (b)$$

故體積增量僅爲自由熱膨脹。雖有熱應力及其所造成之彈性應變，其對應之體積變更各部分正負相消而和爲零(註4)。

(註1) 由普通倒轉定理(見第97節)之引導見 J. N. Goodier, *Proc. 3d. U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, pp. 343-345, 1958. 同一定理直接導自熱彈性方程式，見 W.M. Maisel, *C.R. (Doklady) Acad. Sci. USSR (N.S.)*, vol. 30, pp. 115-118, 1941.

(註2) 摘自前註所述 I. N. Goodier 論文。

(註3) 由均勻溫度爲零狀態。

(註4) 此簡單結果直至 1954 似未發現，見 W. Nowacki, *Arch. Mech. Stos.*, vol. 6, p. 487, 1954, 及 M. Hieke, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 35, pp. 285-294, 1955. 對任何起始應力在線性彈性體內可更廣泛適用，不論加熱均勻與否。閱第158節。

洞孔體積變更 設物體內含一個洞孔。當溫度上昇爲 $T(x, y, z)$ 時洞孔體積增量爲 $\Delta\tau_c$ 。如洞孔受均勻內壓力輔助問題之解爲已知時吾人可決定 $\Delta\tau_c$ 值。如內壓力 p_i'' 所生應力使

$$\theta'' = p_i'' S \quad (c)$$

由定理 (268) 式知

$$p_i'' \Delta\tau_c = \int p_i'' S \alpha T d\tau \quad \text{亦即} \quad \Delta\tau_c = \int S \alpha T d\tau \quad (d)$$

取空心球體爲例。由此問題之解 (見第 412 頁) 知三主應力之和爲

$$\theta'' = \sigma_R'' + 2\sigma_t'' = p_i'' \frac{3a^3}{b^3 - a^3} \quad (e)$$

與 (c) 式相較, 可得此例中 S 值, (d) 式變爲

$$\Delta\tau_c = \frac{a^3}{b^3 - a^3} \int_{R=a}^{R=b} 3\alpha T d\tau \quad (f)$$

積分式代表材料之熱膨脹積。當外半徑爲無窮大時, 洞孔體積在積分爲有限時並無變更。

桿之拉長 對任何常斷面桿, 溫度提高之平均伸長可以決定, 取輔助狀態爲筒拉

$$\sigma_x'' = \sigma \quad \sigma_y'' = \sigma_z'' = 0 \quad \text{及} \quad \theta'' = \sigma$$

ΔL 爲平行於桿軸各線之拉長之平均值, 由 (268) 式知

$$\Delta L = \frac{1}{A} \int \alpha T d\tau \quad (g)$$

一般情況下, 除拉長外桿另有其他變形。

桿撓曲之轉動 取純撓曲爲輔助狀態可求得桿一端對另一端熱彈性轉動 ω 之平均值。圖 145 中設 M'' 代 M 爲 xz 面內之撓矩, 得

$$\sigma_z'' = \frac{M'' x}{I_y} \quad \sigma_x'' = \sigma_y'' = 0 \quad \text{及} \quad \theta'' = \frac{M'' x}{I_y}$$

由 (268) 式定理, 左方功項可寫爲 $M'' \omega$, 如此即得

$$\omega = \frac{1}{I_y} \int \alpha T x d\tau \quad (h)$$

懸臂梁撓度 取第 120 節所述聖維南懸臂梁撓曲問題，用 P'' 代 P 於輔助問題，得

$$\sigma_z'' = -F''(l-z) \frac{x}{I} \quad \sigma_x'' = \sigma_y'' = 0 \quad \text{及} \quad \theta'' = \sigma_z''$$

(268) 式定理左方將含荷力端 $z=l$ (圖190) 處 P 及固定端 $z=0$ 處，各反作用對由 T 所造成熱彈性位移所作之功。懸臂梁可由固定 $z=0$ 處一單元之位置及方向而固定之。如懸臂梁為細長者，固定端位移可視為微量，如此可忽視其對應之功。荷力端 $z=l$ 處，沿 x 向之平均撓度設為 δ ，(268) 式左方之功項為 $P\delta$ 。如此則

$$\delta = -\frac{1}{I} \alpha T x (l-z) \quad (i)$$

桿之扭轉轉動 取第 104 節所述聖維南扭轉問題為輔助問題。各應力分量 σ_x'' ， σ_y'' ， σ_z'' 均為零，故 θ'' 亦為零。故 (268) 式右方為零。因此，桿一端對另一端之相對熱彈性轉動，其平均值亦為零。

對直徑不為常數圓斷面桿之扭轉 (見 119 節密西爾理論)，正交應力分量， σ_r'' ， σ_θ'' ， σ_z'' 為零 [見第 119 節 (a) 式]，故端面上相對轉動為零。

第一五六節 熱彈性位移、密西爾積分

任何一點上熱彈性位移可以求得，如對其輔助問題，該點上受集中荷力時解出其應力。圖 230 示一彈性體受一定方式之支承 (使位移為定值)，荷力 P_x'' 沿 x 向，作用於 A 點。如此 A 點處可視為一小球形洞孔之中心，如第 135 節所述之問題。此輔助問題解示 θ'' 為位置之函數。此值與 P_x'' 成正比，可寫為

$$\theta'' = P_x'' \theta_{1x}'' \quad (a)$$

θ_{1x}'' 對應於單位值之荷力 P_x'' 。

由(268)式定理，左方將含 P_x'' 對 A 點熱彈性位移 u 所作之功，加各支點處反作用對各該點上熱彈性位移之功。設各支點均為完全固

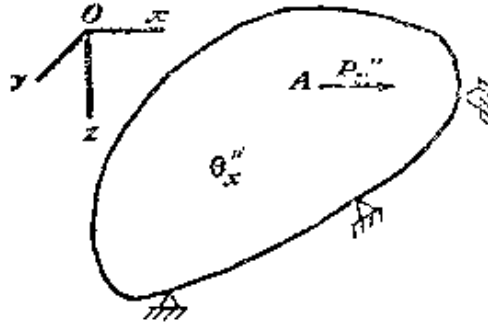


圖 230

定者，則各點上功為零，如此則 (268) 式化為

$$u = \int \theta_{1x}'' \alpha T d\tau \quad (b)$$

因此 u 可由對整個物體體積積分求得。在 A 點處 θ_{1x}'' 之異性並不導致困難，此可由取 $d\tau$ 為球體極坐標式立即察知。類此，在 (a) 式用 y 及 z 代替 x ，對應於 P_y'' 及 P_z'' 之 y 向及 z 向力，則得 (註1)

$$v = \int \theta_{1y}'' \alpha T d\tau \quad w = \int \theta_{1z}'' \alpha T d\tau \quad (c)$$

顯然 A 點亦可取自物體表面上。在輔助問題中小球體洞孔則以小半球體 (如第138節中問題) 或其他開放曲面代替。

上述 (b) 及 (c) 解應用範圍甚為廣泛 (註1)，因集中荷力下之輔助問題解隨處可見。長梁之近似解，曲桿、環、薄板、及薄壳均可用於 (b) 及 (c) 以求任意溫度分布下對應正確性之熱彈性結果 (註2)。通常對板及壳溫度沿厚度之線性變化假設，現為非必要者。

(註1) Maisel, *op. cit.*

(註2) 若干結果見 J. N. Goodier 及 G. E. Nevill, Jr. 報告, Office of Naval research, "Application of a Reciprocal Theorem of Linear Thermoelasticity", 1961. 另 G.E. Nevill, Jr. 博士論文, Division of Eng. Mech., Stanford Univ., 1961.

舉一例，吾人設求半無限體 $z > 0$ 邊界平面 $z = 0$ 上位移之正交分量。溫度上昇 $T(x, y, z)$ 取為 x 之偶函數，即對稱於 yz 平面，其他無限制。

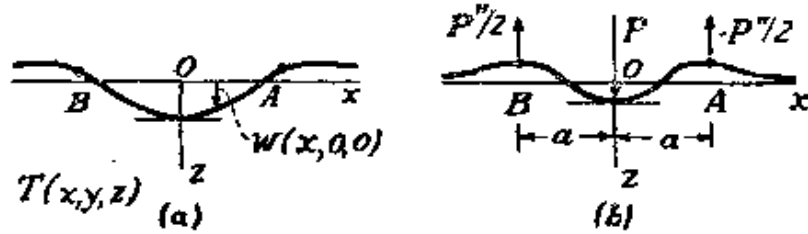


圖 231

在熱彈性問題中，圖231a，吾人可取圖231b所示之輔助問題以計算 xz 平面內任一點 A 相對於原點 O 處點之位移。原點處力 P'' 可視為第138節圖 207 上之力 P 。應力分量為以圓柱坐標所示之 (211) 式，故得

$$(\theta_{1z}'')_0 = \sigma_r'' + \sigma_\theta'' + \sigma_z'' = -\frac{1}{\pi}(1+\nu)P'' \frac{z}{R^3} \quad (d)$$

內 $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (e)$

圖231b中兩向上力 $1/2P''$ 所造成應力之結果為

$$(\theta_{1z}'')_{AB} = \frac{1}{\pi}(1+\nu) \frac{1}{2} P'' z \left(\frac{1}{R_A^3} + \frac{1}{R_B^3} \right) \quad (f)$$

內 R_A 及 R_B 為下式之正值半徑

$$R_A^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2 \quad R_B^2 = (x+a)^2 + y^2 + z \quad (g)$$

因此，對整個輔助問題 (圖231b) 得

$$\theta_{1z}'' = -\frac{1}{\pi}(1+\nu) \frac{1}{2} P'' z \left(\frac{2}{R^3} - \frac{1}{R_A^3} - \frac{1}{R_B^3} \right) \quad (h)$$

用 w_0 為 A 處正交位移， w_A 為 A 及 B 點者，(268) 定理為

$$P'' w_0 - 2 \frac{1}{2} P'' w_A = -\frac{1}{2\pi}(1+\nu) P'' \int z \left(\frac{2}{R^3} - \frac{1}{R_A^3} - \frac{1}{R_B^3} \right) \alpha T d\tau$$

或 $w_A - w_0 = \frac{1}{\pi}(1+\nu) \int \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R_A^3} \right) \alpha T d\tau$

支點功爲零之要求對 T 加一限制條件。圖 231b 中 P'' 力連同兩個 $1/2P''$ 造成應力分量在無限遠處趨於零如 R^{-3} 項所示。無限半球體上，對應荷力所作之功，對該處熱彈性位移言亦須趨於零。如熱彈性位移本身趨於零時此即獲保證。當非零值之 T 限於平面附近有限區域時爲此種情況，此可由第 153 節所述應變阻遏法與聖維南原理予以驗證。

對半無限體各內點，輔助解可參考（見第 417 頁）註 1 明德林氏 (R. D. Mindlin) 論文。對無限體內各點吾人已知第 135 節之解。此問題之熱彈性位移（見第 501 頁）將於本章內以另一方法求解。

第四章中所述二維半無限區域受集中力各解（見第 36 節），楔形（見第 38 節）、及圓形區域（見第 41 節）、及無限區域亦均爲有用之輔助面而可立即引用於熱彈性位移公式。

第 154 節之熱彈性倒轉定理連同傅立葉級數對正弦式荷力亦可有效應用。此等例見本節（486 頁）附註 2 報告及論文中。

習 題

1. 一曲桿，如圖 42 所示，溫度上昇爲 $T(r, \theta)$ 。設爲平面應力，求一積分式示一端對另一端之相對熱彈性平均轉動。
試述此處“平均”之意義，及第 155 節 (h) 式 ω 之意義。
2. 寫出圖 75 中所示盤在平面應力下由溫度上昇 $T(x, y)$ 所致直徑變化計算步驟。
3. 詳細寫出上節所述結果，設半球體 $R < b$ 區域內溫度爲均勻分布 T 。區域外爲零。

第一五七節 起始應力

第 153 節所述之應變阻遏法可施用於始應力之較普遍問題。設想一物體經分離爲小單元，並設每一單元均受某程度之永久塑性變形或經冶金作業改變形狀。設此種變形可由下列應變分量代表之

$$\epsilon_x' \quad \epsilon_y' \quad \epsilon_z' \quad \gamma_{xy}' \quad \gamma_{xz}' \quad \gamma_{yz}' \quad (a)$$

設此等應變為微量並為坐標之連續函數。如此等應變亦適應配合條件 (125)，此物體所分割之小單元經永久變形 (a) 後仍互相配合，而不造成起始應力。

現取一般情況，應變分量 (a) 不能適應配合條件，此時物體分離各單元永久變形後不再互相配合，為使適應配合方程式，各單元表面上須施作用力，設經永久變形 (a) 後材料仍為完全彈性，用虎克定律，由方程式 (11) 及 (6) 知消除永久變形 (a) 所施於每一單元之力為

$$\sigma_x' = -(\lambda e' + 2G\epsilon_x'), \dots \quad \tau_{xy}' = -G\gamma_{xy}', \dots \quad (b)$$

式中
$$e' = \epsilon_x' + \epsilon_y' + \epsilon_z'$$

表面力 (b) 可由施於物體之體積力及表面力所造成。此等力須適應平衡方程式 (123) 及邊界條件 (124)，代應力分量 (b) 於此等方程式內，得必需之體積力為

$$X = -\frac{\partial}{\partial x}(\lambda e' + 2G\epsilon_x') - \frac{\partial}{\partial y}(G\gamma_{xy}') - \frac{\partial}{\partial z}(G\gamma_{xz}') \quad (c)$$

表面力為

$$\bar{X} = -(\lambda e' + 2G\epsilon_x')l - G\gamma_{xy}'m - G\gamma_{xz}'n \quad (d)$$

施用體力 (c) 及表面力 (d)，可消去起始永久變形 (a)，使各單互相配合而為一連續體。現設各單位聯結並移去 (c) 及 (d) 力。如此顯然可重疊由體力

$$X = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda e' + 2G\epsilon_x') + \frac{\partial}{\partial y}(G\gamma_{xy}') + \frac{\partial}{\partial z}(G\gamma_{xz}') \quad (e)$$

及面積力

$$\bar{X} = (\lambda e' + 2G\epsilon_x')l + G\gamma_{xy}'m + G\gamma_{xz}'n \quad (f)$$

所造成之應力於 (b) 上以求起始應力。因此決定起始應力問題化為通常彈性理論方程式，如永久變形 (a) 為已知時，其設想體力及面積力可完全決定。

特殊情況當 $\epsilon_x' = \epsilon_y' = \epsilon_z' = \alpha T$ 及 $\gamma_{xy}' = \gamma_{xz}' = \gamma_{yz}' = 0$ 時，以上方程式與前

得計算熱應力者相符。

現考慮相反問題，設起始應力為已知而欲求永久變形 (a)。如為透明材料，如玻璃等，起始應力可用偏光彈性研究之 (第五章)。其他情況中可將物體分割為小單元並度量各單元由代表起始應力之表面力鬆釋後所生之應變。由前討論顯然僅當應變分量 (a) 不適應配合條件時起始變形方能造成起始應力；否則此等應變可存在而不生起始應力。由此知對起始應力之認識並不足決定應變分量 (a)。如已求得此等應變分量，任何永久應變系統適應配合方程式者均可重疊於此解而不影響起始應力 (註)。

起始應力，使玻璃具雙重反射性質，在光學儀器製造上發生極大困難。為降低此種應力，通常須將玻璃淬火。高溫時玻璃彈性限甚低，在起始應力下玻璃屈服。如予以相當時間，高溫下材料屈服結果可獲致相當起始應力之鬆弛。淬火與各種金屬鍛鑄時有類比功效。

大物體分割為小塊時沿各被割鬆釋起始應力，並降低由起始應力所造成之總應變能量。但此種割切並不一定使最大起始應力值降低。例如，設一圓環 (圖232) 具對稱於中點之起始應力分布，沿斷面 mn ， σ_{θ}' 係線性變化 (圖中 ab 線)。予環一徑向割切，如圖中所示虛線，鬆釋沿此等切面應力 σ_{θ}' 。此相當於在環之兩端施兩等值反向力偶而得純撓曲。由此撓曲所生沿 mn 應力 σ_{θ} ，接近雙曲線式 (閱第29節)，如曲線 cde 所示。沿 mn 之餘應力為 $\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta}'$ ，即圖中陰影部分所示，如

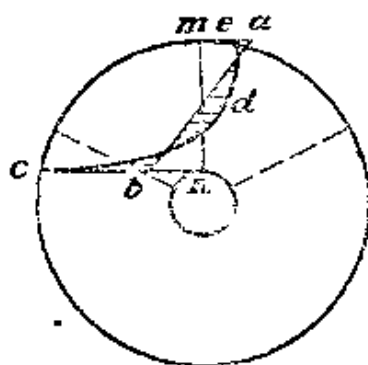


圖 232

(註) 永久變形 (a) 不能由起始應力完全決定之事實由 H. Reissner 論文中詳細討論，見 *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 1, p. 1, 1931.

內半徑為小值，內部邊界上出現高應力集中，而割切後之最大應力，即圖 232 中之 bc ，可能大於割切前之起始應力。此及其他原因解釋割切玻璃有時發生破裂（註）。

第一五八節 起始應力與總體積變更

上節之分析顯示物體內由應變分量（不配合）（a）實際發生之位移 u, v, w ，與體力（e）及面積力（f）作用於通常彈性物體所發生者相同。但此種變形之某些全面特性可由平衡條件導出，設應變（a）引進後，單元對應力之反應依虎克定律。例如，取一物體具起始應力 $\sigma_x \dots, \tau_{xy} \dots$ ，整個物體不受荷力及拘

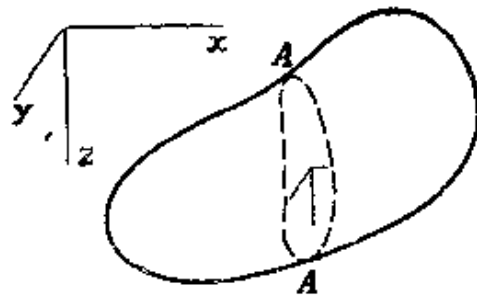


圖 233

束（圖233）。對平行於 yz 面斷面 AA 右方部分，平衡條件為

$$\iint \sigma_x dy dz = 0 \quad (a)$$

先在一 dx 薄片上積分，然後對整個體積積分，得

$$\int \sigma_x d\tau = 0 \quad (b)$$

類此，每一其他應力分量體積積分均須為零。因此

$$\int (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) d\tau = 0 \quad (c)$$

由虎克定律知對應於此等應力分量所造成應變之體積總變更為零。因此實際體積變更係由第157節不配合之應變分量（a）施於各個單元所造成。對簡單熱膨脹，總體積變更為

$$\Delta\tau = \int 3\alpha T d\tau \quad (d)$$

（註）計算圓板割出部分起始應力若干例見 M. V. Laue 論文，*Z. Tech. Physik*, vol. 11, p. 385, 1930. 冷拉管餘應力各種計算方法討論於 N. Davidenkoff 論文，*Z. Metallkunde*, vol. 14, p. 25, 1932.

如前第155節 (b) 式所示。

由 (b) 及其有關方程式，顯然體積積分，對任何應力分量之線性函數必為零，故任何應力-應變線性關係保證任何應變之體積積分亦為零，材料同向性並非必要。

其他關係可由圖233對斷面AA力矩平衡求得。

第一五九節 平面應變與平面應力、應變阻遏法

平面應變將出現於一長柱體中，當溫度雖在斷面上可以變化，但沿平行於軸向各線上 (z 軸) 不變。如此則 T 與 z 無關。

由第153節所述零應變之應力 (g) 開始，需要之體力為 (h)，現 $Z=0$ ，壓力 (f) 須施於表面上，含兩端在內。

設各單元均連結，吾人移去體力及曲面上壓力，並保持軸向應變 ϵ_z 為零。此影響可由施用體力

$$X = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (a)$$

及正交拉應力

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad (b)$$

於曲面上之平面應變問題求得 ($\epsilon_z=0$) 此問題與第17節末問題同型，除須以 $\nu/1-\nu$ 代 ν 。因此 (31) 及 (32) 式換為

$$\sigma_z - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (c)$$

及

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (d)$$

需要之應力函數為適應 (d) 式及提供正交邊界拉力 (b)。應力即可由 (c) 式算出。於此等應力上須重疊第153節應力 (g)。

軸向應力 σ_x 將含第153節 (g) 式項及 (c) 之 $\nu(\sigma_x + \sigma_y)$ 。末端上軸向合力及撓力矩可由重疊簡拉及撓矩移去。

當溫度經平板厚度無變化時平面應力出現。取 xy 平面為板之中面，吾人可設 $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ，另亦可設每一單元沿 z 向自由延伸，為保證單元間配合，

只須阻遏 x 及 y 向延伸即可。此需

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\alpha ET}{1-\nu} \quad \tau_{xy} = 0 \quad (e)$$

代此等值於平衡方程式 (18)，所需之體積力為

$$X = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad Y = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (f)$$

另正交壓力 $\alpha ET/(1-\nu)$ 須施於板邊緣上。

移去此等力知熱應力含 (e) 與以下體力

$$X = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (g)$$

所造成之平面應力，及沿邊緣所施之正交拉力 $\alpha ET/(1-\nu)$ 。此平面應力之決定仍為第17節所述問題類型。吾人僅須於 (31) 及 (32) 式中取

$$V = \frac{\alpha ET}{1-\nu}$$

此即為對應於 (g) 式之位函數。

第一六〇節 穩定熱流之二維問題

穩定熱流平行於 xy 平面時，如在一薄板內或長柱中沿軸向 z 無溫度變化，溫度 T 將適應方程式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (a)$$

取一柱體（不一定為圓斷面）於平面應變中， $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ 。直角坐標之應力 - 應變關係與第 151 節 (a) 及 (b) 式類比，對應於 (b) 式為

$$\begin{aligned} \epsilon_x - (1+\nu)\alpha T &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right) \\ \epsilon_y - (1+\nu)\alpha T &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right) \end{aligned} \quad (b)$$

現問題為 σ_x ， σ_y ，及 τ_{xy} 均為零是否可能。如 (b) 式中取 $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ，則

$$\epsilon_x = (1+\nu)\alpha T \quad \epsilon_y = (1+\nu)\alpha T \quad (c)$$

故 $\tau_{xy} = 0$ 。

此等應力分量僅當其能適應配合條件(125)時始為可能。因 $\epsilon_z = 0$ 及其他分量均與 z 無關，故除第一式外均可適應。

第一式化為

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 0$$

但因 (c) 及 (a) 式關係，此式亦可適應。因此知，穩定熱流時，平衡方程式，邊界條件曲面上無外力作用，及配合條件均由取以下之應力予以適應

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_z = -\alpha ET \quad (d)$$

對一實圓柱體以上方程式及條件係完整者，所得結論為除 (d) 式軸向應力 σ_z 保持平面應變條件 $\epsilon_z = 0$ 外，在穩定狀態二維熱傳導時無熱應力發生。在無末端拘束長柱例中，除接近末端處吾人可重疊簡拉或簡壓，及純撓曲使末端上合力及力偶為零之近似解。

但對空心柱體，吾人不能決定平面應變問題可由 (d) 式解得，另必須考察對應之位移。此位移極可能有斷續情況，與第80頁及第90頁所討論者類似。

例如，設柱體為一管並經割出一縱向裂口如圖234b所示。如內部較外部溫度為高時縫口有張開之趨向。縫口兩面間位移將為一斷續。

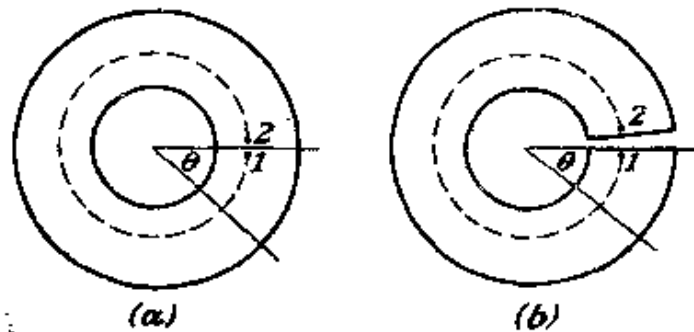


圖 234

故位移應由 θ 之斷續函數表示之。此斷面為單連結，對平面應變 (d) 式將為正確應力。但如管無縫口 (圖 234a) 位移斷續為物理上不可能者。此表示假設之溫度分布事實上將造成應力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ，代表將縫口兩面拉近並連結所發生之應力，分量 σ_z 亦將因此受影響。

為進一步討論本問題，重寫 (c) 式為

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon' \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon' \quad (e)$$

內 $\epsilon' = (1 + \alpha) \alpha T$ 。因 $\gamma_{xy} = 0$ ，故

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (f)$$

及

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z \quad (g)$$

ω_z 為一轉動分量 (見第 241 頁)。由 (f) 及 (g) 式得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\omega_z \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \omega_z \quad (h)$$

由 (g) 及 (f) 得

$$\frac{\partial \epsilon'}{\partial x} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad \frac{\partial \epsilon'}{\partial y} = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x} \quad (i)$$

此為庫希-黎曼方程式，如第 (55) 節所述，此示 $\epsilon' + i\omega_z$ 為一解析函數，用 Z 代表此函數，即

$$Z = \epsilon' + i\omega_z \quad (j)$$

如 u_1, v_1, u_2, v_2 ，為點 1, 2 上 u 及 v 之值， $u_2 - u_1, v_2 - v_1$ ，各差為

$$u_2 - u_1 = \int_1^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \quad v_2 - v_1 = \int_1^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)$$

積分為取沿連結材料內兩點 1 及 2 之任意曲線者，乘第二積分以 i 加於第一積分得

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = \int_1^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \right] \quad (k)$$

而極易驗證右方積分與 $\int_1^2 (\epsilon' + i\omega_z)(dx + idy)$ 或 $\int_1^2 Z dz$ 相同。故 (k) 式變為

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = \int_1^2 Z dz \quad (1)$$

如積分對任何封閉曲線一整周爲零，位移將爲單值，如圖234a中所示虛線圓圈，可畫於任何斷面材料內部。吾人將用此結果於空心圓柱熱應力問題中。

對轉動 ω_z (閱第83節) 得

$$(\omega_z)_2 - (\omega_z)_1 = \int_1^2 \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} dy \right)$$

用 (i) 式，此變爲

$$(\omega_z)_2 - (\omega_z)_1 = \int_1^2 \left(-\frac{\partial \epsilon'}{\partial y} dx + \frac{\partial \epsilon'}{\partial x} dy \right)$$

因 ϵ' 與 T 成正比，此積分與單位時間內，每單位軸向距離，經連結 1 及 2 曲線熱流量，如爲一閉合曲線， $(\omega_z)_2 - (\omega_z)_1$ 必爲零，故經曲線熱流總量爲零(註 1)。如熱由管向外流或相反，此條件不能適合，(d) 式所得應力不正確。

但如管有裂縫，如圖234b所示，點 2 處位移或轉動可與點 1 處不同，例如加熱使裂縫開大。故 (d) 式所示之單純應力爲正確者，欲求管無裂縫時應力狀態，吾人須重疊閉合裂縫所造成之應力。此脫節應力之決定(註 2) 涉及圖 45 及 48 所示問題類型。

例如，取一內半徑 a 外半徑 b 之空心圓柱體。如內面上溫度均勻值爲 T_i ，外表面上溫度爲零，半徑 r 處溫度 T 爲第151節 (n) 式所示。吾人可寫此爲

$$T = -A \log b + A \log r \quad (m)$$

$$\text{內} \quad A = -\frac{T_i}{\log(b/a)} \quad (n)$$

常數項 $-A \log b$ 可予忽計，因溫度一致之變更並不引起熱應力，因

(註 1) 當熱流量爲零時除 (d) 外仍可有熱應力。參閱第151節。

(註 2) 穩定熱流熱應力與脫節應力間關係乃 N. Muskhelishvili 所建立，見 *Bull. Elec. Tech. Inst.*, St. Petersburg, vol. 13, p. 23, 1916, 另 M.A. Biot 亦單獨創立見 *Phil. Mag.*, Ser. 7, vol. 19, p. 540, 1935. 空心圓柱內熱應力，及內具圓孔之正方柱體，經 E.E. Weibel 用此法以偏光彈性求得，見 *Proc. 5th Intern. Cong. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass., 1938. p. 213.

$$\log z = \log r + i\theta$$

故
$$Z = \epsilon' + i\omega_z = (1+\nu)\alpha T + i\omega_z$$

$$= (1+\nu)\alpha A \log r + i\omega_z = (1+\nu)\alpha A \log z$$

寫 $(1+\nu)\alpha A$ 為 B ，由 (1) 式知

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = B \int_1^2 \log z \, dz = B [z(\log z - 1)]_1^2 \quad (o)$$

此方程式可用於材料內連結任兩點 1 及 2 之任何曲線。當應力由 (d) 式溫度由 (m) 式為已知時，可求兩點之相對位移。設由點 1 開始 (圖 234) 半徑為 r 之圓形路線，繞一周後至點 2， $\theta_1 = 0$ ， $\theta_2 = 2\pi$ ，因此

$$[z(\log z - 1)]_1^2 = re^{i2\pi}(\log r + i2\pi) - re^{i0}(\log r + i0) = i2\pi r$$

用於 (o) 式，得

$$u_2 - u_1 = 0 \quad v_2 - v_1 = B2\pi r \quad (p)$$

相對位移不為零值，故須視柱體具縫口，使點 2 可自點 1 作豎向位移 $2\pi r B$ (圖 234b)，縫口頂面相對於底面之移動相當於一對柱中心順時轉動 $2\pi B$ ，但於 T_i 為正時 B 為負，故縫口對中心開角為 $-2\pi B$ ，閉合此縫口問題曾於第 80 頁解出。該處係對平面應力者，換為平面應變時用第 465 頁所示轉換法所得之應力分量，連同軸向應力 $\sigma_z = -\alpha Et$ ，與方程式 (257) 所得者消除軸向力後完全相同。

內部及外部沿邊界周圍之變化，可由傅立葉級數代表之。

$$T_i = A_0 + A_1 \cos \theta + A_2 \cos 2\theta + \dots + B_1 \sin \theta + B_2 \sin 2\theta + \dots$$

$$T_o = A_0' + A_1' \cos \theta + A_2' \cos 2\theta + \dots + B_1' \sin \theta + B_2' \sin 2\theta + \dots \quad (q)$$

各項所造成之熱應力可分別討論，常數項 A_0 ， A_0' 已由前例得知，用 $T_i = A_0 - A_0'$ ，對應於 $\cos \theta$ ， $\sin \theta$ ， $\cos 2\theta$ ， $\sin 2\theta$ 等，函數 z 各項將與以下項目成比例

$$z, z^{-1} \quad z^2, z^{-2} \quad (r)$$

現 $\int z^n dz$ 除 $n = -1$ 外沿一整圓將為零，因

$$\begin{aligned} \int z^n dz &= \int r^n e^{in\theta} r e^{i\theta} i d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} (\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta) d\theta \end{aligned}$$

顯然除 $n+1=0$ 外將為零，如 $n = -1$ ，將得

$$\int \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (s)$$

因此內僅一項 z^{-1} 使 (1) 積分不爲零，因此知溫度級數 q 內 $\cos 2\theta$ ， $\sin 2\theta$ ，及較高調和項對縫口兩面間不造成相對位移。對應於此等項由內向外淨熱流量爲零，其所造成應力僅爲 (d) 式所示。(g) 內各項對 Z 提供 z^{-1} 者爲 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ ，取 $\cos \theta$ 項即足夠，因 $\sin \theta$ 項效應可由 $\cos \theta$ 項更換起始線 $\theta=0$ 求得。因此，取

$$T_i = A_1 \cos \theta \quad T_o = A_1' \cos \theta \quad (t)$$

決定穩定溫度分布對應於此等邊界值問題，可取以下函數之實值部分

$$\frac{C_1}{z} + C_2 z \quad (u)$$

並使 C_1 及 C_2 適應 (t) 式條件。其值爲

$$C_1 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{A_1}{a} - \frac{A_1'}{b} \right) \quad C_2 = \frac{A_1' b - A_1 a}{b^2 - a^2} \quad (v)$$

對函數 Z ，(u) 式 C_1/z 項對應於值

$$(1+\nu) \alpha \frac{C_1}{z}$$

代此於 (1) 式並引用 (s) 式，得位移斷續爲

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = i2\pi(1+\nu) \alpha C_1$$

因此

$$u_2 - u_1 = 0 \quad v_2 - v_1 = 2\pi(1+\nu) \alpha C_1$$

意爲縫口上面移下 $2\pi(1+\nu) \alpha C_1$ 於底面及材料所據之空間。此當然爲不可能者，事實上將由兩面間所生反位移之力所阻遏。由此反位移所造成應力可用第43節末所解釋方法決定，對平面應變 ($\epsilon_2=0$) 得

$$\sigma_r = \kappa \cos \theta r \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right)$$

$$\sigma_\theta = \kappa \cos \theta r \left(\frac{a^2 b^2}{r^4} + \frac{a^2 + b^2}{r^2} - 3 \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \kappa \sin \theta r \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right)$$

如第151節 (a) 式

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E\alpha T$$

內
$$\kappa = -\frac{-\alpha E}{2(1-\nu)} \left(\frac{A_1}{a} - \frac{A_1'}{b} \right) \frac{a^2 b^2}{b^4 - a^4}$$

如兩端自由，由移去力及力偶每端上所造成之軸向應力須予檢討。

第一六一節 絕緣孔口對均勻熱流干擾所造成之平面熱應力

如一均勻熱流受孔口或不同材料干擾時，由熱流之改向將造成熱應力。無限體絕緣圓孔問題可應用上節分析求解。對應於沿負 y 向溫度梯度值 τ 之無干擾熱流，吾人可寫 $T = \tau y$ 。圓孔存在時為

$$T = \tau \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

此時，取平面應力並用（見第465頁）之轉換法則，得

$$Z = -i\alpha\tau \left(z - \frac{a^2}{z} \right)$$

內 a 為圓孔半徑。對應於零應力之位移繼續仍為（1）式，其值為

$$(u)_{\theta=0} - (u)_{\theta=2\pi} = 2\pi a^2 \alpha \tau \quad (v)_{\theta=0} - (v)_{\theta=2\pi} = 0$$

此由34節所論之邊緣脫節所對消。後之平面應力分量為（註1）

$$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta} = -\frac{1}{2} E\alpha\tau a \left[\left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta, \left(\frac{a}{r} + \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta, -\left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \right]$$

最大值 $E\alpha\tau a$ ，係 σ_θ 在各極點 $\theta = \pi/2$ ， $\theta = 3\pi/2$ 上所得。熱極上為壓應力，冷極上為拉應力。當 $2ra = 100^\circ\text{F}$ 時，對鋼料約為4,480磅/平方吋。

其他形式孔口（註2），半無限區內圓孔（註3）及球形孔（註4）軸對稱問題均已解出。

（註1）A. L. Florence & J. N. Goodier, *J. Appl. Mech.*, vol. 26, pp. 293-294, 1959.

（註2）A. L. Florence and J. N. Goodier, *J. Appl. Mech.*, vol. 27, pp. 635-639, 1960. H. Deresiewicz, *J. Appl. Mec.*, vol. 28, pp. 147-149, 1961.

（註3）J. N. Goodier and A. L. Florence, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 16, pp. 273-282, 1963.

（註4）A. L. Florence and J. N. Goodier, *Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, pp. 595-602, 1962.

第一六二節 一般方程式解、熱彈性位移函數

對 (264) 式可得之任何特殊解將化熱應力問題為一通常表面力問題。對 u , v , w 解由第 153 節 (a) 及 (b) 式與 (2) 式可求得應力分量。所需之表面力，連同維持此應力之非均勻溫度，可由 (124) 式求出。移去此表面力使邊界自由，應力即全係非均勻溫度所造成，故為普通表面荷力問題。

尋求 (264) 式特解方法之一為取

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (\text{a})$$

內 ψ 為 x, y, z 之函數，如溫度與時間有關亦為 t 之函數。此一函數稱為熱彈性位移函數。

由 (5) 及 (10) 式，可寫 (264) 式為

$$\frac{\partial e}{\partial x} + (1-2\nu)\nabla^2 u = 2(1+\nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{b})$$

因 $e = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$ ，(a) 式化為 $e = \nabla^2 \psi$ ，(b) 式化為

$$(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 \psi = (1+\nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{c})$$

用 $\partial/\partial y$ 及 $\partial/\partial z$ 代 $\partial/\partial x$ 於第二第三式，所有三式顯然可取函數 (註 1) ψ 為下式解予以適應

$$\nabla^2 \psi = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T \quad (\text{d})$$

此型方程式解法見位論中 (註 2)。密度為 $-(1+\nu)\alpha T/4\pi(1-\nu)$ 之重力場位函數可取為解，此即 (註 3)

(註 1) 此種函數曾由 E. Almansi 用於球形問題。閱 (1) *Atti Reale Accad. Sci. Torino*, vol. 32, p. 963, 1896-1897; (2) *Mem. Reale Accad. Sci. Torino*, ser. 2, vol. 47, 1897.

(註 2) 閱 W.D. MacMillan, "Theory of Potentials", New York, 1930.

(註 3) 此位函數曾由 C. W. Borchardt 用於球體問題。閱 *Monatsber Königl. Preuss. Akad. Wiss.*, Berlin, 1873, p. 9.

$$\psi = -\frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \iiint T(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{r'} d\xi d\eta d\zeta \quad (e)$$

內 $T(\xi, \eta, \zeta)$ 為點 ξ, η, ζ 上溫度，該處體積單元為 $d\xi d\eta d\zeta$ ， r' 為此點至 x, y, z 點之距離。方程式 (e) 為無限體除加熱區 (註1) (或冷卻) 外溫度為零熱應力問題之完整解。如熱區為旋轉橢圓體及半無限圓柱，熱度一致之例均已求得 (註2)。對一橢圓體可能出現之最大應力為 $\alpha ET/1-\nu$ ，正交於橢圓體表面，作用於母橢圓形曲率最大點上。此值僅出現於極扁平或極伸長旋轉橢圓體兩極端情況中。中間例將為較小之最大應力。對一球體區域此值約為其三分之二。

當 T 與 z 無關時； $w=0$ ，此為平面應變，(d) 式變為

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T \quad (f)$$

一特解為對數位函數

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \iint T(\xi, \eta) \log r' d\xi d\eta$$

內

$$r' = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}$$

對一薄板，厚度上 T 無變化時，可設為平面應力， $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ，及 $u, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 與 z 無關。如此則應力與應變關係為 (見第150節 (d) 式)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (1+\nu) \alpha T \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (1+\nu) \alpha T \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (h)$$

代此於二平衡方程式 (18) (無體積力) 得

(註1) J. N. Goodier, *Phil. Mag.* vol. 23, p. 1017, 1937. 半無限體問題曾由 R.D. Mindlin 及 D.H. Cheng 討論, *J. Appl. Physics*, vol. 21, pp. 926, 931, 1950.

(註2) N. O. Myklestad, *J. Appl. Mech.*, 1942, p. A-131. R. H. Edwards, *J. Appl. Mech.*, vol. 18, pp. 19-30, 1951 解熱橢圓體區域內不同彈性常數問題。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 2\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (i)$$

此可由設

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (j)$$

予以適應，倘 ψ 為下式之解

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = (1+\nu)\alpha T \quad (k)$$

與 (f) 式相較，知特解為對數位函數 (g) 內捨去分母因子 (1- ν)。此為無限板局部加熱問題之全解，應力與變形在無窮遠處均趨於零。

取第一例為無限板除矩形區域 ABCD (圖 235) 內為均勻溫度外，他處溫度 T 均為零 (註)。所需之對數位函數為

$$\psi = \frac{1}{2\pi} (1+\nu)\alpha T \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{1}{2} \log[(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2] d\xi d\eta \quad (l)$$

位移可由 (j) 式微分求出，然後由 (h) 式算出應力分量。受熱矩形區外 P 點上 σ_x 及 τ_{xy} 可化為

$$\sigma_x = E\alpha T \frac{1}{2\pi} (\psi_1 - \psi_2) \quad \tau_{xy} = E\alpha T \frac{1}{4\pi} \log \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \quad (m)$$

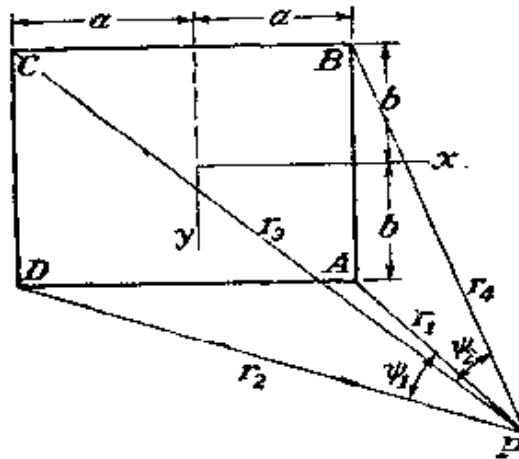


圖 235

(註) J.N. Goodier, *Phil. Mag.*, *loc. cit.* 三維六面體熱區域問題解為 J. Ignaczak 及 W. Nowacki (1958) 所得，見 W. Nowacki 書，"Thermoelasticity", Pergamon Press, New York, 1962.

角 ψ_1, ψ_2 ，及距離 r_1, r_2, r_3, r_4 ，如圖235所示。各角為 P 點與矩形與 x 軸平行邊 AD 及 BC 所成三角形頂角。 σ_y 之算式可自 (m) 第一式求得，但 ψ_1 及 ψ_2 則用 P 點與另兩邊 AB 及 DC 之頂角。 AD 邊下 A 點左方接近 A 點處 σ_x 值為

$$E\alpha T \frac{1}{2\pi} \left(\pi - \arctan \frac{a}{b} \right)$$

當矩形沿 y 向長度為無限時為最大值 $1/2E\alpha T$ 。轉角處兩正交應力分量均生極大變化。趨近一角時剪應力 τ_{xy} 趨於無限值，此特殊情況為受熱後矩形理想尖角必然之結果。

如加熱區為一橢圓 (註 1)，方程式為

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

應力 σ_y ，接近長軸末端在橢圓區外，為

$$\frac{E\alpha T}{1+(b/a)}$$

對極為細長橢圓，趨於 $E\alpha T$ ，短軸末端外應力 σ_x 為

$$\frac{E\alpha T}{1+(a/b)}$$

對極細長橢圓，此值趨於零。如受熱區為圓，各應力均變為 $1/2E\alpha T$ 。如溫度與時間關係為以下之微分方程式時，本節所採方法變為特別簡易 (註 2)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (n)$$

式內 κ 為熱傳導係數除以比熱及密度。將 (d) 式對 t 微分，並由 (n) 式代 $\partial T/\partial t$ ，得 ψ 之方程式為

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \kappa \nabla^2 T$$

因此吾人可取

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \kappa T$$

(註 1) Goodier, *loc cit.*

(註 2) 閱 Carslaw & Jaeger, *op. cit.*

如時間持續時溫度趨於零，此式之積分爲

$$\psi = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\kappa \int_t^\infty T dt \quad (o)$$

此可由 (n) 式並代於 (d) 式予以驗證。

例如取一長圓柱體 (平面應變)，設減溫或加熱趨於一穩定狀態之熱傳導。溫度對軸線無對稱關係但與 z 坐標無關。如此則溫度可由下式級數代表之

$$T_{sn} = e^{-\kappa z^2} J_n(sr) e^{in\theta} \quad (p)$$

內 $e^{in\theta}$ 實值及虛值部分亦可寫爲 $\cos n\theta$ 及 $\sin n\theta$ 。由 (n) 式函數 ψ 對應於此溫度項應爲

$$\psi_{sn} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\kappa \frac{1}{s^2} T_{sn} \quad (q)$$

具此等項之級數，對應於級數 T ，代表 (b) 式之特解。位移可由 (a) 式算出，或由其極坐標式

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

u 及 v 爲徑向及切向分量。平面應變時軸向分量 w 爲零。

應變分量可由第30節結果求得。應力分量由第151節 (a) 及 (b) 公式算出， $\tau_{r\theta}$ 爲 (51) 最後一式。

求得此一解後，一般情況下曲面上邊界力 ($\sigma_r, \tau_{r\theta}$) 將不爲零。移去此等外力之效應可由解一普通平面應變問題求得，用43節極坐標一般應力函數(註)。

較普遍情況中，吾人可納入單位體積之時率 q 之內部發熱。如此則式 (n) 右方增加 $q/c\rho$ 一項， c 爲比熱， ρ 爲密度。下式

$$\psi = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha \int_{t_1}^t (\kappa T + Q) dt + f(x, y, z)$$

適應 (d)，倘

$$\nabla^2 Q = \frac{q}{c\rho} \quad \text{及} \quad \nabla^2 f = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T_1$$

此處 Q 爲 t 及 x, y, z 之函數， T_1 爲 t_1 瞬間 T 值。

(註) 此問題曾由 J.N. Goodier 解出，見上述論文。

第一六三節 圓形區域內一般二維問題

前於第160及第162節中均曾使用熱傳導微分方程式。如吾人討論完全任意溫度分布，例如，物體內已知起始溫度分布時，需用其他方法。此處取極坐標平面應力及應變為例。

用熱彈性位移位函數 ψ ，上節中 (f) 及 (k) 式之極坐標式為

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \beta T \quad (a)$$

內平面應變時 $\beta = (1+\nu)/(1-\nu)\alpha$ ，平面應力時 $\beta = (1+\nu)\alpha$ 。

位移之極坐標分量為

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (b)$$

溫度 T ，為 r 及 θ 之函數，可取為傅立葉級數式

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(r) \sin n\theta \quad (c)$$

吾人將僅用餘弦級數、正弦級數之討論類似。取

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(r) \cos n\theta \quad (d)$$

式 (a) 化為

$$\frac{d^2 \psi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \psi_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \psi_n = \beta T_n(r) \quad (e)$$

此式之特解，用參數變化法，為

$$\psi_n = -\frac{\beta}{2n} \left[r^n \int_r^b T_n(\rho) \rho^{1-n} d\rho + r^{-n} \int_a^r T_n(\rho) \rho^{1+n} d\rho \right] \quad (f)$$

$$\psi_0 = \beta \left[-\log r \int_a^r \rho T_0(\rho) d\rho + \int_r^b \rho T_0(\rho) \log \rho d\rho \right] \quad (g)$$

式內 a 及 b 為圓區之內外半徑， ρ 僅為積分變數，函數 (f) 及 (g) 係 (d) 式所引進，如此則位移可由 (b) 式求出，應變分量 ϵ_r ， ϵ_θ ， $\gamma_{r\theta}$ 則由公式 (48)，(49)，及 (50) 算得，平面應力時應力分量由第150節 (b) 及 (c) 式計算，平面應變則由第151節 (b) 式。剪應力與剪應變關係僅為 $\tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}$ 。

由位移位函數為微分方程式特解所得之應力及變形狀態自身將不能適應圓 $r=a$ ， $r=b$ 上預定之邊界條件。維持此狀態需某些邊界力，其值可由上述解中計

算 $r=a$ 及 $r=b$ 時 σ_r 及 $\tau_{r\theta}$ 。如預定邊界條件為內外圓上 σ_r 及 $\tau_{r\theta}$ 均為零，可重疊一同溫傅立葉級數解完成之如第43節所示。

現可察知 (g) 式之 ψ_0 所代表之解即第150及第151節溫度與 θ 無關時解。顯然 (f) 式之 ψ_n 為溫度與 θ 及 r 均有關係時普遍化之解 (註)。

第一六四節 複位函數之一般二維問題

吾人已知任何位移函數 Ψ ，對應於已知溫度分布 T 並提供連續位移，化問題為僅求一方之邊界荷力。因此可採用複位函數 $\psi(z)$ 及 $\chi(z)$ ，如第六章所云，當適合之位移位函數已知時，可解平面應變及應力。

$$u + w = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad w = 0$$

Ψ 須適應第 (162) 節 (f) 式，即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T$$

溫度 T ，當然僅為 x 及 y 之函數，如第六章所為，寫 $z = x + iy$ ，及 $\bar{z} = x - iy$ 。

另

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (c)$$

用此等式於 $T(x, y)$ 得函數 $t(z, \bar{z})$ 。因此

$$T(x, y) = t(z, \bar{z}) \quad (d)$$

取偏導數如一般通則

$$\frac{\partial}{\partial z} t(z, \bar{z}) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} t(z, \bar{z}) \quad (e)$$

(雖事實上吾人不能對 xy 面上一點 z 變更而不同時變更 \bar{z}) 吾人亦可取不定積分如

(註) 此伸論見 N.N. Lebedev 論著 "Temperature Stresses in Theory of Elasticity", ONTI, Leningrad-Moscow, 1937. 以上導法取自 C. E. Wallace, Thermoelastic Stress in Plates-Problems in Curvilinear Coordinates, 博士論文, Stanford University, 1958. 此文亦論及橢圓及雙極坐標，及斷續溫度分布，如半部盤底溫另半部高溫問題，因緩慢收斂不宜用傅立葉級數。

$$\int t(z, \bar{z}) dz \quad \int t(z, \bar{z}) d\bar{z} \quad (f)$$

及

$$\iint t(z, \bar{z}) dz d\bar{z} \quad (g)$$

現可證示，一適當之位移位函數為

$$\Psi(x, y) = f(z, \bar{z}) = \frac{1}{4} \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \iint t(z, \bar{z}) dz d\bar{z} \quad (h)$$

此提供下式之位移及應力 (註)

$$2G(u+iv) = \frac{E\alpha}{2(1-\nu)} \int t(z, \bar{z}) dz \quad \sigma_x + \sigma_y = -\frac{E\alpha}{1-\nu} t(z, \bar{z})$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int \frac{\partial}{\partial \bar{z}} t(z, \bar{z}) dz \quad (i)$$

此狀態係由邊界上荷力連同溫度 T 予以維持，側面上等值反向邊界荷力可由複位函數 $\psi(z)$ 及 $\chi(z)$ 解出如第六章所解釋。

為導 (h) 及 (i) 式，首先由 (d) 式知

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \bar{z}} \quad i \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial t}{\partial z} \quad (j)$$

因此，

$$2 \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial x} - i \frac{\partial T}{\partial y} \quad 2 \frac{\partial t}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial T}{\partial x} + i \frac{\partial T}{\partial y} \quad (k)$$

經 $2\partial/\partial z$ 運算後一式為

$$4 \frac{\partial^2 t}{\partial z \partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x} + i \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

內 T 為 x 及 y 之任一函數。因此 (b) 式中可用上述結果於左方並用 (d) 式於右方得

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} f(z, \bar{z}) = 4\beta \alpha t(z, \bar{z}) \quad (l)$$

(註) 見 N. N. Lebedev, "Temperature Stresses in Theory of Elasticity", ONTI, Leningrad-Moscow, 1937, pp. 55, 56. 以上 (i) 第 3 式與 Lebedev 式因引用共軛 $t(z, \bar{z})$ 故不完全相同。類似之發展見 B. E. Gatewood, *Phil. Mag.*, vol. 32, pp. 282-301, 1941.

內
$$4\beta = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (\text{m})$$

將 (1) 式對 z 積分，視 \bar{z} 固定，得

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z, \bar{z}) = \beta \alpha \int t(z, \bar{z}) dz \quad (\text{n})$$

由 (a) 之第一式及 (k) 之第二式，得

$$u + iv = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z, \bar{z}) = \beta \alpha \int t(z, \bar{z}) dz \quad (\text{o})$$

由此可得 (i) 之第一式。

方程式 (n) 右方積分後仍為 z 及 \bar{z} 之函數，對 \bar{z} 積分，視 z 固定，得

$$f(z, \bar{z}) = \beta \alpha \int (\int t(z, \bar{z}) dz) d\bar{z} \quad (\text{p})$$

此與 (h) 式相當。因吾人僅需 (b) 式或 (1) 式最簡單之解，故未將任意積分函數納入。對 (i) 之第二式，用平面應變之應力-應變關係。此可取自第153節中之三維式。取 $\epsilon_z = 0$ ，第153節中 (c) 之前兩式為

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\epsilon_x - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad \sigma_y = \lambda e + 2G\epsilon_y - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad (\text{q})$$

因 $e = \epsilon_x + \epsilon_y$ ，故

$$\sigma_x + \sigma_y = 2(\lambda + G)e - 2 \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad (\text{r})$$

$$\epsilon_x + \epsilon_y = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T \quad (\text{s})$$

由此式，及 (5) 與 (10) 式所示彈性常數間關係，(2) 式可寫為

$$\sigma_x + \sigma_y = - \frac{E\alpha}{1-\nu} T$$

由 (d) 式知此與 (i) 之第二式相同。

對 (i) 之第三式，第一式開始，右方以 $2\partial/\partial \bar{z}$ 運算左方以相當之 $\partial/\partial z + i\partial/\partial y$ 運算。由此得

$$2G \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{E\alpha}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int t(z, \bar{z}) dz \quad (\text{t})$$

但由 (q) 式知

$$\sigma_x - \sigma_y = 2G(\epsilon_z - \epsilon_y) = 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

(t) 式左方括弧內式與 γ_{xy} 相同，右方之微分，在通常之限制下，可直接施於 $t(z, \bar{z})$ 。如此則 (t) 式化爲

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int \frac{\partial}{\partial \bar{z}} t(z, \bar{z}) dz$$

此與 (i) 之第三式相同。

第十四章

彈性介質中波動之傳播

第一六五節 緒論

前數章已討論“彈性靜力學”問題。即彈性體於靜止時受不變荷重之作用。或荷重改變在期望內，其充分和緩可滿足每一時刻靜力狀態之假定（如赫茲撞擊理論，見第 142 節）一似靜力問題。

由爆炸引起之突然荷重，或於斷層處地殼滑動引起地震之突然位移提出了重要的動態問題。平衡方程須換為運動方程式。當最初施力之刻，其作用不能立即傳至物體全部。應力與應變波由荷重區域以一定速度發散傳播。與空氣中聲波情況相同，某點在波前到達後才產生擾動現象。但在彈性固體內，有一種以上之應力波和特徵波速。

吾人由直角坐標系三維空間問題一般微分方程開始討論，其最簡單之解即表最簡單之波動形式（註）。當一般性理論能解釋所包含之假定之性質時，特殊情況中，如桿中張力波，可介紹波動之近似表示法。

第一六六節 同相性均質彈性介質中之擴張波及扭曲波

討論彈性介質中波動之傳播，應用位移之微分方程組甚為簡便〔方程式 (127)〕。欲由平衡方程得微小運動之微分方程，僅需加上慣性力。若無體力，運動方程為

（註）振動等其它形成之運動，在此處不予討論。對於桿、鉸和環等之振動可參閱 S. Timoshenko, "Vibration Problems in Engineering," chap. 5, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

$$\begin{aligned}
 (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\
 (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\
 (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{269}$$

式中 e 為體積膨脹值， ∇^2 表下列運算

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

首先假定波動產生之變形滿足體積膨脹為零，則此變形僅包括剪力扭曲及轉動。方程式 (269) 成

$$\begin{aligned}
 G \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\
 \dots\dots\dots &
 \end{aligned}
 \tag{270}$$

此方程組所表之波動稱之為等體積波，或扭曲波。

考慮波動產生之變形無轉動存在。素體之轉動（見第83節）為

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)
 \tag{a}$$

不轉動變形故可由下式表之

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0
 \tag{b}$$

當此方程組可滿足時，位移 u ， v ， w 可由下列單一函數 ϕ 導出：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}
 \tag{c}$$

則

$$e = \nabla^2 \phi \quad \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi = \nabla^2 u$$

將此代入 (269) 式，可得

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

..... (271)

此即為不轉動波，或擴張波（註1）之方程式。

彈性介質中一般波動傳播可由扭曲波及擴張波重疊得之（註2）。運動方程對於此兩種波動方式具有相同形式：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \psi \quad (272)$$

對擴張波，式中

$$a = c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (273)$$

對扭曲波

$$a = c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (274)$$

吾人將可證得 c_1 與 c_2 為擴張平面波及扭曲平面波之傳播速度。

第一六七節 平面波

若擾動產生於彈性介質中某處，波動由此向各方傳播。距擾動中心甚遠處，此波動可視為平面波，且假設所有質點平行於波動傳播方向運動（縱波），垂直此方向（橫波）。第一種情況得擴張波，第二種為扭曲波。

茲考慮縱波，若取波動方向為 x 軸，則 $v = w = 0$ ，且 u 僅為 x 之函數，(271) 可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (275)$$

(註1) 一般而言擴張皆伴有剪應變。

(註2) 關於此種合併之一般性，及其與彈性靜力學之關連，參閱 E. Sternberg, *Arch. Rational Mech. and Anal.*, vol. pp. 34-50, 1960.

由代入法可證任意 $f(x+c_1t)$ 及 $f_1(x-c_1t)$ 形式之函數皆為方程式 (275) 之解。故式 (275) 之一般解可表為

$$u = f(x+c_1t) + f_1(x-c_1t) \quad (276)$$

此解有一甚簡單之物理解釋，可以下面方式說明。考慮式 (276) 右端第二項。於某定時刻 t ，此項僅為 x 之函數，可以一如 mnp 之簡單曲線表示 (圖236a)，其形狀依函數 f_1 而定。經時間 Δt 後，函數 f_1 之引數為 $x-c_1(t+\Delta t)$ 。若在 t 增加 Δt 之同時，橫坐標增加一相等於 $c_1\Delta t$ 之量 Δx ，則函數 f_1 保持不變。此意謂若曲線 mnp 在 x 方向有 $\Delta x = c_1\Delta t$ 之位移如圖中虛線所示，則此一 t 時刻所建立之 mnp 曲線亦可用於 $t+\Delta t$ 時刻。

由是可知，其解 (276式) 之第二項表以定速度 c_1 在 x 方向進行之波。同理可證，解 (276) 之首項表依相反方向進行之波。故，此一般解 (276) 表以定波速 c_1 沿 x 軸依相反方向進行之兩波。將 λ 與 G 之相當量 (10) 及 (5) 式代入 (273)，則此波速可以 E ， ν 及 ρ 表之。即

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad (277)$$

鋼鐵之 c_1 可視為19500每秒呎

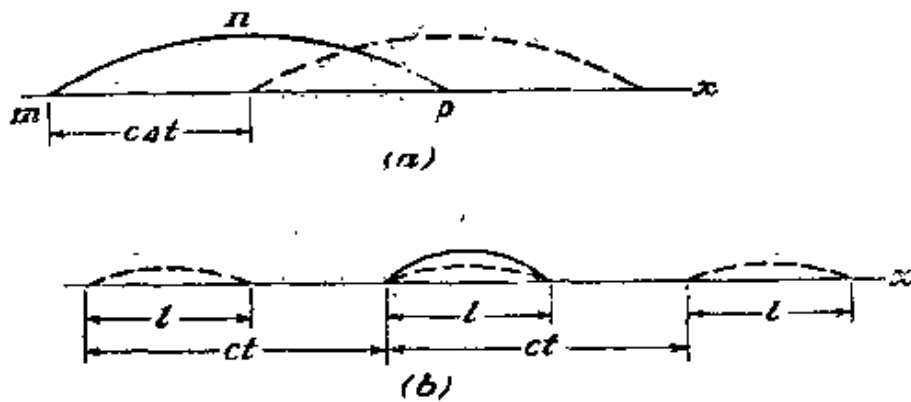


圖 236

考慮式 (276) 中以 $f_1(x-c_1t)$ 之“前進”波，得質點速 \dot{u}

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = -c_1 f_1'(\xi) \quad \text{此處 } \xi = x - c_1 t \quad (\text{a})$$

式中分號表 $f_1(\xi)$ 對 ξ 微分。素體 $dx dy dz$ 之動能爲

$$\frac{1}{2} \rho dx dy dz \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho dx dy dz \cdot c_1^2 [f_1'(\xi)]^2 \quad (\text{b})$$

位能與應變能相同。其應變分量爲

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = f_1'(\xi) \quad \epsilon_y = \epsilon_z = 0 \quad (\text{c})$$

由 (132) 式此素體之應變能

$$V_0 dx dy dz = \frac{1}{2} (\lambda + 2G) [f_1'(\xi)]^2 dx dy dz \quad (\text{d})$$

回顧 (273) 式，比較 (b) 及 (d) 式，可證知任意時刻動能與勢能相等。

應力可表爲

$$\sigma_x = (\lambda + 2G) \epsilon_x \quad \sigma_y = \sigma_z = \lambda \epsilon_x \quad (\text{e})$$

故

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_z}{\sigma_x} = \frac{\lambda}{\lambda + 2G} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (\text{f})$$

此應力分量 σ_y, σ_z 需用來保持 $\epsilon_y = \epsilon_z = 0$ 。利用 (c) 式 $\epsilon_x = f_1'(\xi)$ 比較 (e) 式中之 σ_x 與 (a) 式中之 \dot{u} 得

$$\sigma_x = -\rho c_1 \dot{u} \quad (\text{g})$$

若考慮 (276) 式中僅 $f(x + ct)$ 函數之“後退”波，則須將 (g) 與 (a) 式之負號換爲正號。

函數 f_1 與 f 須由各特殊情況在 $t = 0$ 時之起始條件決定。刻由此 (276) 式得

$$(u)_{t=0} = f(x) + f_1(x)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = c [f'(x) - f_1'(x)] \quad (\text{h})$$

如設起始速度爲零且有下式之起始位移

$$(u)_{t=0} = F(x)$$

則可取下式滿足 (h) 式之條件

$$f(x) = f_1(x) = 1/2F(x)$$

故於此情況中起始位移分爲兩半，以波動形式沿相反方向傳播 (圖 236b)。

今考慮橫波。當波動沿 x 軸方向傳播，側向位移在 y 軸方向，可得位移 u ， w 爲零，而位移 v 爲 x 與 t 之函數。由 (270) 式

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (i)$$

此與 (275) 式形式相同，故可斷定扭曲波以 c_2 速度沿 x 軸傳播。

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

或用 (277) 式，

$$c_2 = c_1 \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$$

如 $\nu = 0.25$ ，上式可得

$$c_2 = \frac{c_1}{\sqrt{3}}$$

任意函數

$$f(x - c_2 t) \quad (j)$$

爲 (i) 式之一解，表沿 x 軸以 c_2 速度傳播之波動。若取 (j) 式之解如下形式

$$v = v_0 \sin \frac{2\pi}{l}(x - c_2 t) \quad (k)$$

此情形之波動爲正弦波形。其波長爲 l ，波幅爲 v_0 。橫波之波速爲

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2\pi c_2}{l} v_0 \cos \frac{2\pi}{l}(x - c_2 t) \quad (l)$$

當位移 (k) 最大時，波速為零；位移為零時；速度最大。由此波動產生之剪應變為

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2\pi v_0}{l} \cos \frac{2\pi}{l}(x - c_2 t) \quad (\text{m})$$

可知最大扭曲 (m) 與波速之絕對最大值 (1)，在某點同時發生。

吾人可將此類之波動傳播表示如下 (如圖237)：

設 mm 為彈性介質之薄纖維，當正弦波 (k) 沿 x 軸傳播時，素體 A 受扭曲及位移，其以斜線部分素體用連續數字 1, 2, 3, 4, ... 表之。

於 $t=0$ ，素體 A 之位置如 1 所示。此時其速度與扭曲為零。經 $\frac{l}{4c_2}$ 之時間，此素體得一正速度，其扭曲如 2 所示。此時其位移為零，速度最大。再經 $l/4c_2$ 時間，其情況如 3 所示。餘類推。

若纖維之截面積為 $dy dz$ ，則素體 A 之動能為

$$\frac{1}{2} \rho dx dy dz \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho dx dy dz \frac{4\pi^2 c_2^2}{l^2} v_0^2 \cos^2 \frac{2\pi}{l}(x - c_2 t)$$

其應變能為

$$\frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 dx dy dz = \frac{1}{2} G \frac{4\pi^2 v_0^2}{l^2} \cos^2 \frac{2\pi}{l}(x - c_2 t) dx dy dz$$

且記 $c_2^2 = G/\rho$ ，故可結論：素體 A 在任何時刻其動能與勢能相等。

地震時，擴張與扭曲二種波在地殼內以 c_1 與 c_2 速度傳播。其可由測震儀記錄之，且兩種波到達之時間可指出由擾動中心到測站間之距離。

正弦平面波及他種形狀之波可以多種方式結合，以滿足在自由面或兩不同介質交接面之物理條件。當傳播方向不平行此面，可得在自由面反射或在交接面折射及反射之結果 (註)。平行於自由面以異於

(註) 參閱 H. Kolsky, "Stress Waves in Solids," Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1953; reissued by Dover Publications, New York.

c_1 及 c_2 速度傳播之波動〔瑞萊 (Rayleigh) 表面波〕將於第170節討論之。

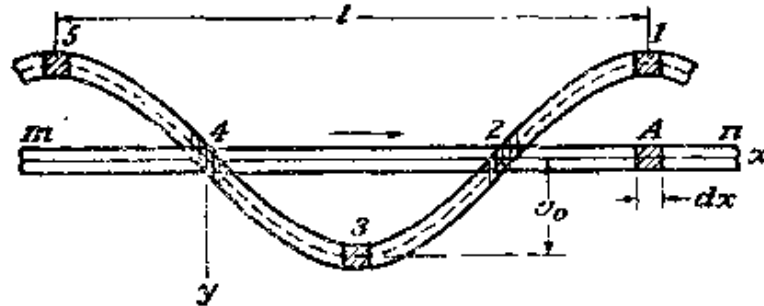


圖 237

第一六八節 均勻桿中縱波、初等理論

第 167 節所考慮之簡單平面縱波可在矩形斷面桿中存在，只要桿之側面能維持方程式 (f) 所給之應力分量 σ_y , σ_z 。任意截面之桿，側向仍須有相對應之牽引力。

當自由側面時，求得全部運動方程式 (269) 之適當解是非常困難的 (註 1)。然而對許多實際情形而言，一個較簡單之近似理論即已足夠。在此初等理論中桿之每一部分可視為受一對應於軸應變 $\partial u/\partial x$ 之張力， u 僅為 x 與 t 之函數。則

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a)$$

其它之應力分量可略而不計。考慮一初位於斷面 x 與 $x+dx$ 間之素體 (圖 238)，運動方程是很簡單的 (消去截面積後)。

(註 1) 特例之數解可藉位數計算獲得之。參閱：L. D. Bertholf, *J. Appl. Mech.*, vol. 34, pp. 725-734, 1967. 有關桿及其它主要之應力被傳播問題之一般性探討，文獻甚多，參閱 J. Miklowitz, *Elastic Wave Propagation*, pp. 809-839, and by R.M. Davies, *Stress Waves in Solids*, pp. 803-807, in H. N. Abramson, H. Liebowitz, J. M. Crowley, and S. Juhasz (eds.), "Applied Mechanics Surveys," Spartan Books, Washington, D.C., 1966.



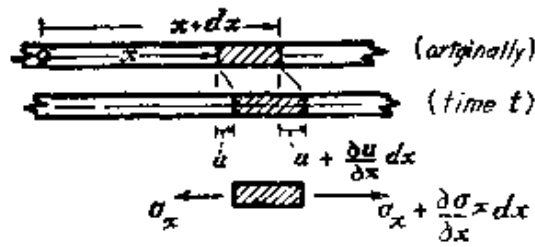


圖 238

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (b)$$

式中

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (278)$$

(b) 式與第167節之 (275) 式形式相同，其一般解為

$$u = f(x+ct) + f_1(x-ct) \quad (c)$$

此式在 (276) 式已解釋了。然而，(278) 式得之波速 c (註) 較 (277) 式之波速 c_1 為低。其比值為

$$\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

取 $\nu = 0.36$ ，其值是 1.16。以銅鐵言，可得 $c = 16850$ 呎/秒。

若於 (c) 中僅保留 f_1 函數 (前進波)，吾人可由此式與 (a) 式得

$$\sigma_x = -\rho c \dot{u} \quad (d)$$

若僅保留函數 f (後退波) 可得

$$\sigma_x = \rho c \dot{u} \quad (e)$$

式 (278) 及 (d) 之結果可不必求助於微分方程而得之。考慮

(註) 即通常之“桿速”。

一均勻分布之壓應力突然作用於桿之左端（圖239）。則在桿端無窮薄之一層，最初會產生均勻壓應力。此壓力將傳至其鄰近層。壓力波開始以波速 c 沿桿傳播，經時間 t 後，桿之 ct 長部分受壓力而其他部分仍在未受應力之靜止狀態。

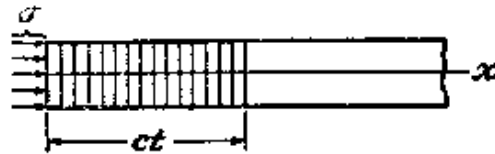


圖 239

波速應與壓力施於受壓區域之質點速度 v 有別。質點速度 v 可由考慮受壓區（圖中斜線部分）因壓力 σ 而縮短之量 $(\sigma/E)ct$ 得之。因此，桿之左端速度等於受壓區質點速度，即

$$v = \frac{c\sigma}{E} \quad (f)$$

波動傳播之速度可利用動量方程式求得。開始時桿之斜線部分為靜止，經 t 時間後具有 v 之速度及 $\rho ctvA$ 之動量。使其等於壓力之衝量，可得

$$A\sigma t = Act\rho v \quad (g)$$

吾人由 (278) (註) 式得 c 之值，利用 (f) 式可得質點速度

$$v = \frac{\sigma}{\sqrt{E\rho}} \quad (279)$$

此式與 v 表質點速度之 (d) 式對應。由是可知 c 與壓力無關，而質點速 v 與應力 σ 成比例。

若以張力代替壓力突然施諸桿端。張力波即以 c 之波速沿桿傳

(註) 此公式求波速初步推演是由 Babinet，參閱 Clebsch, "Théorie de l'Elasticité des Corps Solides," Saint-Venant (trans.), p 480d, 1883.

播。質點速仍可由 (279) 式得之，惟其方向與 x 軸方向相反。故於壓力波中質點速度與波速方向相同，而在張力波中質點速度與波速相反。

由 (278) 及 (279)，可得

$$\sigma = E \frac{v}{c} \quad (280)$$

波動中之應力，故可由兩波速之比及材料彈性係數 E 定之。若絕對剛體以 v 速度縱向撞擊桿之左端，開始時之接觸表面壓應力可由 (280)

(註 1) 式得之。若物體速度高於某一限度，雖然撞擊體之質量甚小 (註 2)，依材料之機械性質，桿仍生永久變形。

今考慮圖 239 中斜線部分波動之能量。此能量包括兩部分：變形之應變能等於

$$\frac{Act\sigma^2}{2E}$$

動能爲

$$\frac{Actpv^2}{2} = \frac{Act\sigma^2}{2E}$$

及由壓應力 $A\sigma$ 作用於 $(\sigma/E)ct$ 距離之功，等於波動之全部能量，其一半爲勢能，一半爲動能。

波動之控制方程 (b) 爲線性，故若有此方程式之二解，其和亦爲此方程之解。由是可知，討論沿桿進行之波動可用重疊法。兩異向進行之波相遇 (圖 240)，質點之合應力與合速度可由重疊法得之。若兩波皆爲壓力波，則如圖 240b 所示合壓力可相加得之，質點之合速度可相減得之。過此，各波仍回復原狀，如圖 240c。

(註 1) 此結論得自 Thomas Young; 參閱其 "Course of Lectures on Natural Philosophy..." vol. 1, pp. 135 and 144, 1807.

(註 2) 假定桿端所有點同時全部接觸。

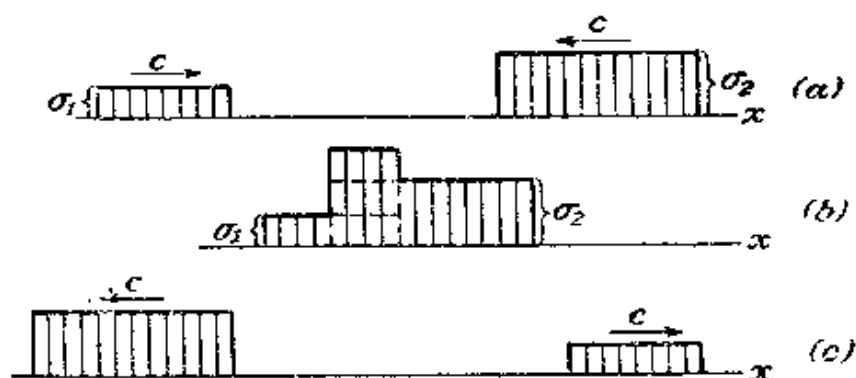


圖 240

考慮一壓力波依 x 軸沿桿進行，另一同波長、同應力振幅之張力波依相反方向進行（圖241）。當兩波相遇，張力與壓力相消，在桿中兩波重疊處應力為零。同時桿中質點速度加倍即為 $2v$ 。相離後，兩波回復原狀，如圖 241b 所示。桿之中央截面 mn ，應力恆為零，可視為桿之自由端（圖241c）。比較圖241a與 b 可推斷在自由端壓力波反射成一相同之張力波，反之亦然。

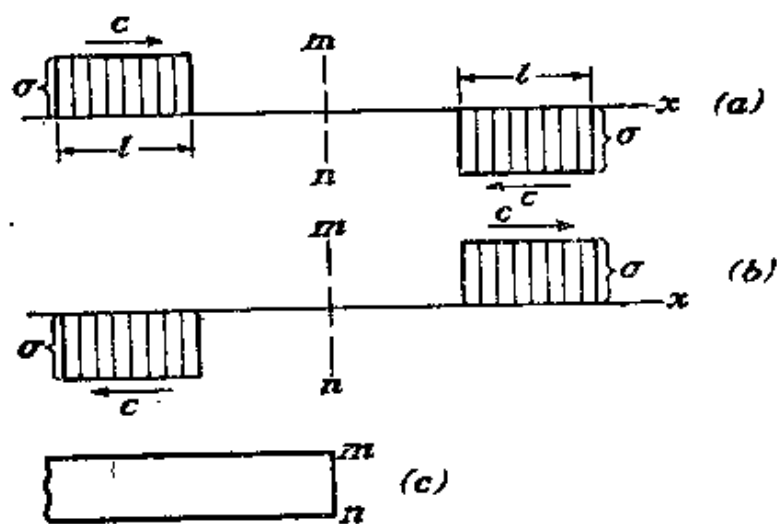


圖 241

若兩波相向而行（圖242a），相遇時在桿中波重疊處應力加倍而速度為零。故中央斷面 mn 速度恆為零。此斷面在波進行時保持靜止，可視為桿之固定端（圖242c）。比較圖242a與 b，可推論波在固定端

反射後完全不變。

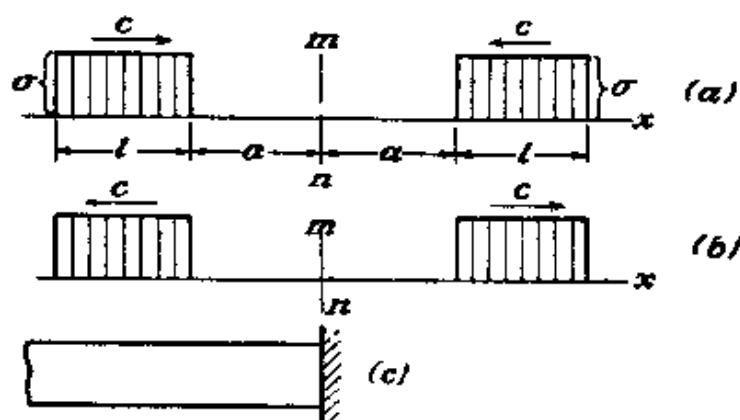


圖 242

第一六九節 桿之縱向撞擊

若同材料之兩相同桿以相同速度 v 縱向互相撞擊 (圖243a)，撞擊時接觸面 mm 不移動 (註1)，則兩相同之壓力波開始以相等速度 c 沿桿傳播。波中質點速加上桿之初速使波動區靜止；當波達自由端時 ($t = l/c$)，兩桿受均勻壓力且靜止。然後壓力波在自由端反射成張力波向接觸面 mm 進行。在此波中質點以速度 v 背離 mm 。當波達接觸面二桿以初速 v 分離。此情形中撞擊時間為 $2l/c$ ，且壓應力由 (279) 式得 $v\sqrt{E\rho}$ 。

當桿 1 與 2 以 v_1 及 v_2 速度運動 (註2) ($v_1 > v_2$) (圖 243b) 考慮其一般情形。撞擊時兩相同壓力波開始沿桿進行。相對於運動桿之未受壓力部分對應質點速度相等且背向接觸面。此速度須等於 $(v_1 - v_2)/2$ 俾得使兩桿接觸面之質點絕對速度相等，經 l/c 時間壓力波達桿之自由端。兩桿此時皆在均勻壓力狀態，桿中所有質點速度為

$$v_1 - \frac{v_1 - v_2}{2} = v_2 + \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

(註1) 假定桿端在撞擊發生時，同時全部表面相接觸。

(註2) 沿 x 軸方向傳播之速度視為正。

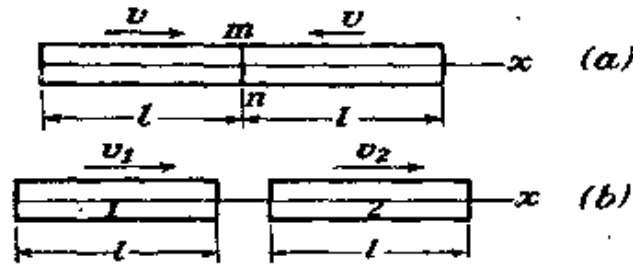


圖 243

壓力波然後由自由端反射成張力波，在時間為 $t = 2l/c$ 時，當其達二桿之接觸面，桿 1 與 2 之速為

$$\frac{v_1 + v_2}{2} - \frac{v_1 - v_2}{2} = v_2 \quad \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2} = v_1$$

故在撞擊時，桿交換其速度

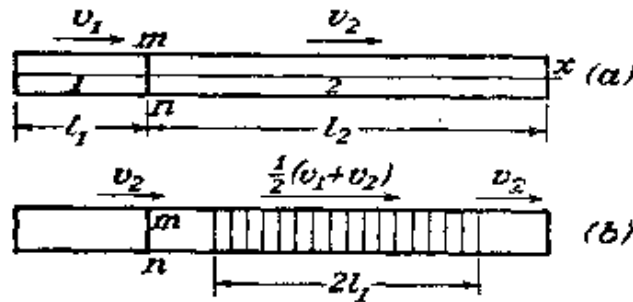


圖 244

若上兩桿長度不等，各為 l_1 及 l_2 (圖 244a)，撞擊物之情況與前例同。但歷時 $2l_1/c$ 後，短桿之反射波達接觸面 mn ，並穿過此接觸面沿長桿進行，其情況如圖 244b 所示。 l_1 桿之張力波抵消桿間壓力，但二桿仍保接接觸至長桿 (圖中斜線部分) 中壓力波反射回至接觸面 (在 $t = \frac{2l_2}{c}$ 時)。

若兩桿長度相等，各桿彈回後各點以同樣速度成剛體運動。若兩桿長度不等，長桿彈回後桿中有進行之波；在計算桿之全部能量時，

波動之能量須考慮 (註1)。

今考慮一端固定，它端受運動體撞擊桿之更複雜問題 (註2) (圖245)。設 M 表運動體對於桿單位斷面積之質量， V_0 表此物體之起始

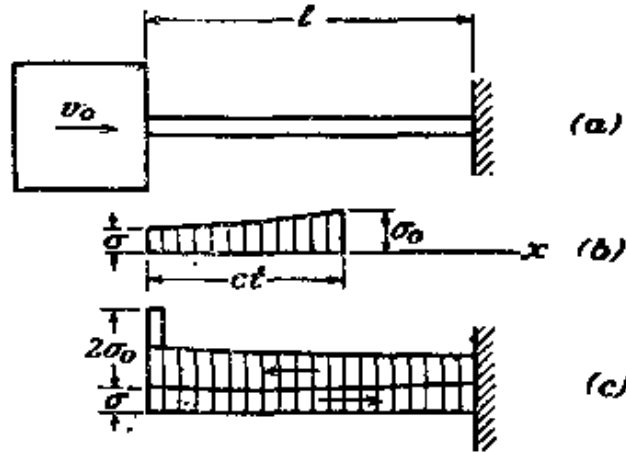


圖 245

速度。若物體視為結動剛體，撞擊時 ($t=0$) 桿端質體速度為 v_0 ，最初之壓應力由 (279) 式知

$$\sigma_0 = v_0 \sqrt{E\rho} \quad (a)$$

由於桿之阻抗，運動物體之速度及其施於桿之壓力逐漸減弱，吾人可得一壓應力漸減之壓力波沿桿進行 (圖245b)。壓力與時間之變化可由物體之運動方程得之。以 σ 表桿端變化之壓應力， v 表物體變速度，得

(註1) 桿在縱向撞擊時，移動之損失動能問題，先經Cauchy Poisson 後有 Saint-Venant 之討論。參閱 *Compt. Rend.* p. 1108, 1866, and *J. Mathemat. (Liouville)*, pp. 257 及 376, 1867.

(註2) 此問題曾被數位學者討論。最後之解為 J. Boussinesq 在 *Compt. Rend.*, p. 154, 1883. 提出。其歷史可由 "Théorie de l'Elasticité des Corps Solides," Clebsch (Saint-Venant), *op. cit.* 得之。參見第60節註解。此間亦曾被 L. H. Donnell 討論過。利用波動傳播定律，他將解化簡並推展至圓錐形桿。見 *Trans. ASME, Applied Mechanics Division*, 1930.

$$M \frac{dv}{dt} + \sigma = 0 \quad (b)$$

或以 (279) 式 v 代入上式，

$$\frac{M}{\sqrt{E\rho}} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0$$

由此式得

$$\sigma = \sigma_0 e^{-(t\sqrt{E\rho}/M)} \quad (c)$$

此方程式只要 $t < 2l/c$ 皆可使用。當 $t = 2l/c$ ，壓力波以 σ_0 之壓力波前返回與運動物體接觸之桿端。此物體之速度不能突然改變，因此波將由固定端反射，且在接觸面之壓應力突增至 $2\sigma_0$ 。如圖 245c 所示。此一突增之壓力發生於撞擊時每一段時間 $T = 2l/c$ 之終。故對各段時間之 σ 須分別表示。於 $0 < t < T$ 之第一段時間內，吾人可用方程式 (c)。在 $T < t < 2T$ 之第二段時間內可用圖 245c 所表之情況，其壓應力 σ 由兩背離撞擊端及一走向此端之波產生。今以 $s_1(t)$ ， $s_2(t)$ ， $s_3(t)$ ， \dots 表在各段時間 T ， $2T$ ， $3T$ ， \dots 所有遠離撞擊端之波在該端產力之全部壓應力。返回撞擊端之波僅為前段時間發生而擱延 T 時間返回之波。故此波在撞擊端所生之壓力可由前段時間出發之波所生壓力之算式中以 $t-T$ 代 t 得之，故任意時間 $nT < t < (n+1)T$ 內全部壓應力之一般表示是

$$\sigma = s_n(t) + s_{n-1}(t-T) \quad (d)$$

撞擊端質點速度可由背離波壓力 $s_n(t)$ 與駛入波壓力 $s_{n-1}(t-T)$ 所生之速度差得之。然後由 (279) 式

$$v = -\frac{1}{\sqrt{E\rho}} [s_n(t) - s_{n-1}(t-T)] \quad (e)$$

由撞擊體之運動方程式 (b) 可得 $s_n(t)$ 與 $s_{n-1}(t-T)$ 之關係。以 α 表桿質量與撞擊體質量之比，吾人得

$$\alpha = \frac{l\rho}{M} \quad \frac{\sqrt{E\rho}}{M} = \frac{cl\rho}{Mt} = \frac{2\alpha}{T} \quad (f)$$

用 (d), (e) 及此式, (b) 式成

$$\frac{d}{dt} [s_n(t) - s_{n-1}(t-T)] + \frac{2\alpha}{T} [s_n(t) + s_{n-1}(t-T)] = 0$$

乘以 $e^{2\alpha t/T}$

$$\begin{aligned} e^{2\alpha t/T} \frac{ds_n(t)}{dt} + \frac{2\alpha}{T} e^{2\alpha t/T} s_n(t) &= e^{2\alpha t/T} \frac{ds_{n-1}(t-T)}{dt} \\ &+ \frac{2\alpha}{T} e^{2\alpha t/T} s_{n-1}(t-T) - \frac{4\alpha}{T} e^{2\alpha t/T} s_{n-1}(t-T) \end{aligned}$$

或

$$\frac{d}{dt} [e^{2\alpha t/T} s_n(t)] = \frac{d}{dt} [e^{2\alpha t/T} s_{n-1}(t-T)] - \frac{4\alpha}{T} e^{2\alpha t/T} s_{n-1}(t-T)$$

由此,

$$s_n(t) = s_{n-1}(t-T) - \frac{4\alpha}{T} e^{-2\alpha t/T} \left[\int e^{2\alpha t/T} s_{n-1}(t-T) dt + C \right] \quad (g)$$

式中 c 是積分常數。此方程式可用來求 s_1, s_2, \dots 之連續值。在 $0 < t < T$ 之第一段時間內, 壓應力由 (c) 式求得, 使

$$s_0 = \sigma_0 e^{-(2\alpha t/T)} \quad (h)$$

代入方程式 (g)

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sigma_0 e^{-2\alpha[(t/T)-1]} - \frac{4\alpha}{T} e^{-(2\alpha t/T)} \left(\int \sigma_0 e^{2\alpha t/T} dt + C \right) \\ &= \sigma_0 e^{-2\alpha[(t/T)-1]} \left(1 - \frac{4\alpha t}{T} \right) - C \frac{4\alpha}{T} e^{-2\alpha t/T} \quad (k) \end{aligned}$$

積分常數 C 可由 $t = T$ 時撞擊端壓應力突增為 $2\sigma_0$ 之條件得之 (圖 245c)。因此, 由 (d) 式,

$$\left[\sigma_0 e^{-(2\alpha t/T)} \right]_{t=T} + 2\sigma_0 = \left\{ \sigma_0 e^{-2\alpha[(t/T)-1]} + \sigma_0 e^{-2\alpha[(t/T)-1]} \left(1 - \frac{4\alpha t}{T} \right) - C \frac{4\alpha}{T} e^{-(2\alpha t/T)} \right\}_{t=T}$$

由此式，

$$C = -\frac{\sigma_0 T}{4\alpha} (1 + 4\alpha e^{2\alpha})$$

將此代入 (k) 式，

$$s_1 = s_0 + \sigma_0 e^{-2\alpha[(t/T)-1]} \left[1 + 4\alpha \left(1 - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (1)$$

(g) 式中以 s_1 代 s_{n-1} ，同理可得，

$$s_2 = s_1 + \sigma_0 e^{2-\alpha[(t/T)-2]} \left[1 + 2(4\alpha) \left(2 - \frac{t}{T} \right) + 2(4\alpha^2) \left(2 - \frac{t}{T} \right)^2 \right] \quad (m)$$

同理可得

$$s_3 = s_2 + \sigma_0 e^{-2\alpha[(t/T)-3]} \left[1 + 2(6\alpha) \left(3 - \frac{t}{T} \right) + 2(3)4\alpha^2 \left(3 - \frac{t}{T} \right)^2 + \frac{2(2)3}{3(3)} 8\alpha^3 \left(3 - \frac{t}{T} \right)^3 \right] \quad (n)$$

餘類推 (註 1)。令 $\sigma_0 = 1$ 且 $\alpha = 1/6, 1/4, 1/2, 1$ 為四種不同比值 (註 2)，函數 s_0, s_1, s_2, \dots 可以圖 246 表示。由這些曲線撞擊端之壓力可由方程式 (d) 計算。當 $\sigma_0 = 1, \alpha = 1/4, 1/2, 1$ 時，應力曲線以圖 247 表之。其值在 $T, 2T, \dots$ 為跳躍不連續。應力最大值依 α 而定。若

(註 1) 此問題說明之連續反射結果可由 Laplace Transform 方法精確導出。參閱 W. T. Thomson, "Laplace Transformation," p. 123, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1959.

(註 2) 此曲線為 Saint-Venant 與 Flamant 算得。參閱 *Compt. Rend.*, pp. 127, 214, 281, and 353, 1883.

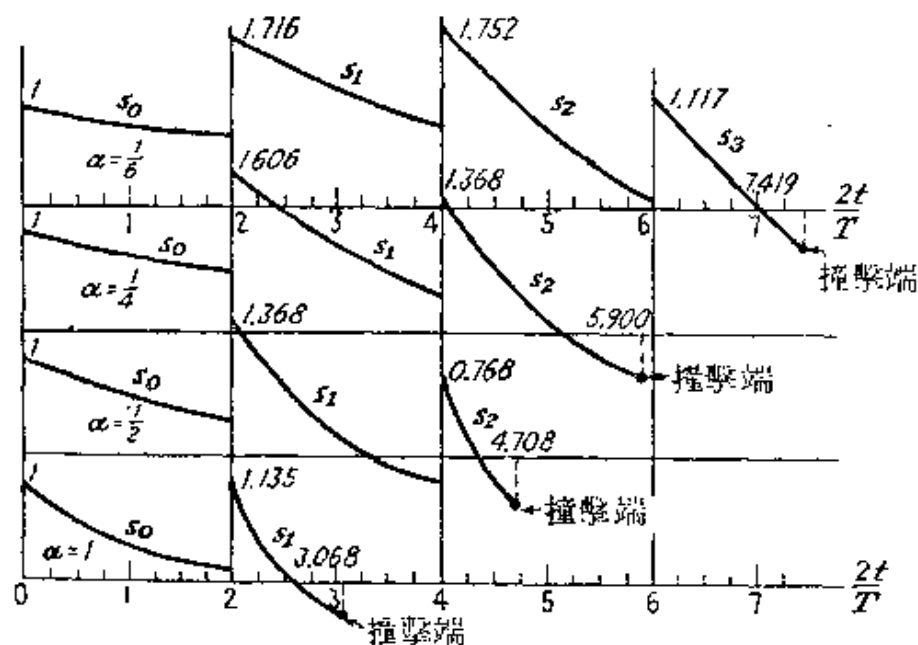


圖 246

$\alpha = 1/2$ 及 $1/4$ ，則於 $t = T$ 時，應力達最大值。若 $\alpha = 1/4$ ，則 $t = 2T$ 應力達最大值。當 σ 等於零時表撞擊終止。 α 減少則撞擊持續時間增加。由聖維南之計算得出下列持續時間。

$\alpha =$	1/6	1/4	1/2	1
$\frac{2t}{T} =$	7.419	5.900	4.708	3.068

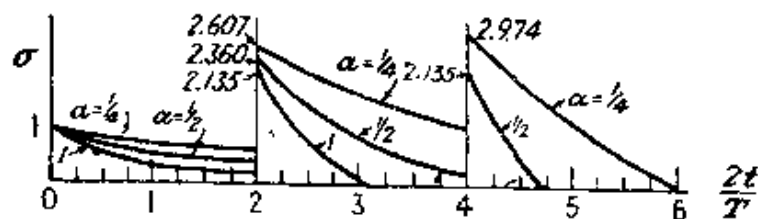


圖 247

若 α 甚小，接觸時間可由下基本公式得之

$$t = \frac{\pi l}{c} \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \quad (P)$$

此式是由完全忽略桿之質量，且假定撞擊持續時間為接觸物體簡單調

和振動週期之半得之。

由上所述之 s_1, s_2, s_3, \dots 函數亦可用來決定桿其它任意截面之應力。全部應力恆為兩 s 值之和〔(d) 式〕，一為向固定端進行之合成波，另一為向相反方向進行之合成波。當對應 s 最大值之波達固定端，即生反射（圖246中某一曲線之最高點）上述二波皆得其最大值：在此點全部應力此刻與撞擊時所產生者一樣大。由是可知撞擊最大應力產生於固定端且為 s 最大值之兩倍。由圖 246 立即可推論當 $\alpha = 1/6, 1/4, 1/2$ 及 1 時，最大應力分別為 $2 \times 1.752\sigma_0, 2 \times 1.606\sigma_0, 2 \times 1.368\sigma_0$ 及 $2 \times 1.135\sigma_0$ 。各種不同比值之 $\alpha = \frac{\rho l}{M}$ 得之 σ_{max}/σ_0 之值示於圖248中（註1）。為比較起見，由下式求得之拋物線亦在圖中表出

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{M}{\rho l}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\alpha}} \quad (q)$$

此式立即可由忽略全桿質量且使桿之應變能等於撞擊物體動能之初等方法求得。圖中虛線為拋物線（註2）由下式定義

$$\sigma = \sigma_0 \left(\sqrt{\frac{M}{\rho l}} + 1 \right) \quad (r)$$

可知 $1/\alpha$ 甚大時，可得甚佳之近似值。

以上發展之撞擊理論是基於假設桿端表面在撞擊發生時全部同時接觸。此情況甚不易實現。精心之預防是必需的，以保證獲得正確之桿端平面及桿之正直且使桿端間縫隙之空氣膜影響減至最小。則所觀察之波動與初等理論甚相符。由 Becker 與 Conway 之論文（註3）所得之圖249示一沿圓桿進行及由平面桿端反射波形之振動圓形，(c)

（註1）參閱 Saint-Venant 與 Flamant 論文，同第527頁註2。

（註2）此曲線為 Boussinesq 提出。見 *Compt. Rend.*, p. 154, 1883.

（註3）見 E. C. H. Becker and H. D. Conway, *Brit. J. Appl. Phys.*, vol. 15, pp. 1225-1231, 1964.

圖中忽略扭曲。早期實驗工作中 (註)，撞擊端被彎成球形且接觸部分依赫茲理論考慮。

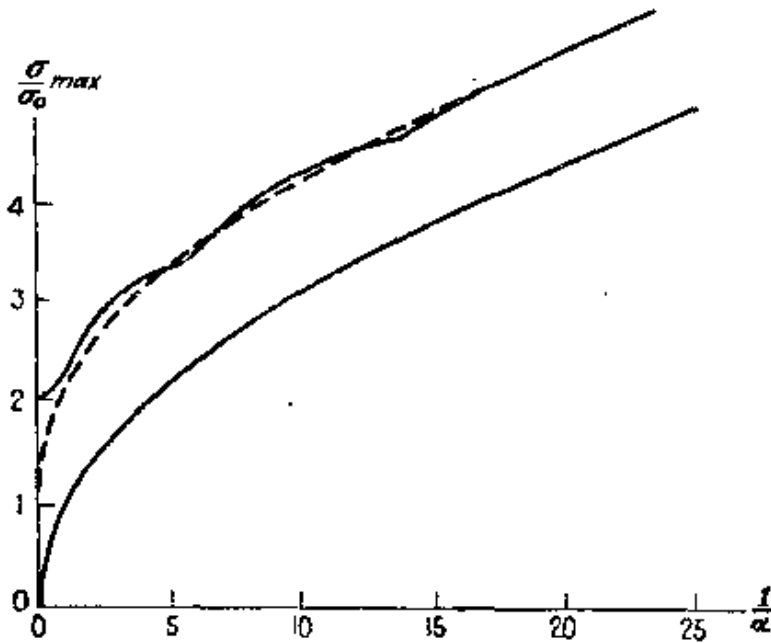


圖 248

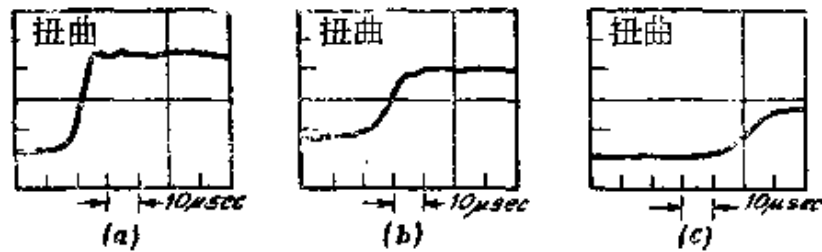


圖 249

應變計示器信號波動圖顯示痕跡之形成依撞擊速度而定。桿之直徑1/2吋，應變計示器距撞擊端30吋；撞擊時鎗速 (a) 6吋秒⁻¹ (b) 4吋秒⁻¹ (c) 3吋秒⁻¹。

(註) 此探討為 J. E. Sears 所作，見 *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 21, p. 49, 1908. 亦可參閱 J. E. P. Wagstaff, *Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 105, p. 544, 1924; 與 W. A. Prowse, *Phil. Mag.*, vol. 22, p. 209, 1936.

第一七〇節 瑞萊表面波

第166節及167節討論服從虎克定律之均質同向性介質中擾動之傳播，可以 c_1 波速之不轉動波與 c_2 波速之等體積波重疊得之。當起始條件限於內部區域（註1），即使波前之質點速度與應力為不連續，則 c_1 與 c_2 為無限介質中僅有之可能波速。

當有自由邊界（或兩介質之交界面）它種傳播速可能存在。“表面波”之出現其主要僅包含一表面薄層之運動。此與投石入水所生之漣漪相似，亦與負荷高頻交流電之導體“表面效應”近似。第一位指出表面波一般方程之解的 Lord Rayleigh（註2），指出

“此處探討之表面波在地震及彈性碰撞佔有重要之地位，因僅在二維方向擴張，距波源較遠處益增其重要性。”

地震震波記錄之研究支持芮雷之預期結果。

距波源甚遠處，波動所生之變形可視為二維者。設物體被 $y=0$ 平面包圍。取 y 軸正向指向物體內部，波動方向為 x 軸正向。位移可由合併擴張波〔(271)式〕與扭曲波〔(270)式〕得之。設於兩種情況中 $\omega=0$ ，(271)式之解表擴張波可取下式

$$u_1 = se^{-ry} \sin(pt - sx) \quad v_1 = -re^{-ry} \cos(pt - sx) \quad (a)$$

式中 p ， r 及 s 為常數，指數因子表若 r 為正實數，則波之振幅因深度 y 之增加而迅速減少。三角函數之引數 $pt - sx$ 表波在 x 方向傳播速度

（註1）見 A. E. H. Love, "Mathematical Theory of Elasticity," 4th. ed., pp. 295-297, Cambridge University Press, New York, 1927.

（註2）見 *Proc. London Math. Soc.*, vol. 17, pp. 4-11, 1885; or "Scientific Papers," vol. 2, pp. 441-447, Cambridge University Press, New York, 1900.

$$c_3 = \frac{p}{s} \quad (281)$$

將 (a) 式代入 (271) 式，知此方程組可滿足，若

$$r^2 = s^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda + 2G}$$

或用下式之符號

$$\frac{\rho p^2}{\lambda + 2G} = \frac{p^2}{c_1^2} = k^2 \quad (b)$$

得

$$r^2 = s^2 - k^2 \quad (c)$$

吾人取下式為方程式 (270) 之解表扭曲波

$$u_2 = A b e^{-by} \sin(pt - sx) \quad v_2 = -A s e^{-by} \cos(pt - sx) \quad (d)$$

式中 A 為常數， b 為正數。吾人可證得對應 (d) 式位移之體積膨脹為零且 (270) 可滿足，若

$$b^2 = s^2 - \frac{\rho p^2}{G}$$

或用符號

$$\frac{\rho p^2}{G} = \frac{p^2}{c_2^2} = k^2 \quad (e)$$

得

$$b^2 = s^2 - k^2 \quad (f)$$

合併 (a) 與 (d) 解，取 $u = u_1 + u_2$ ， $v = v_1 + v_2$ ，則可定 A ， b ， p ， r ， s 等常數以滿足邊界條件。物體邊界無外力，故在 $Y=0$ 處， $\bar{X}=0$ 及 $\bar{Y}=0$ 。將此代入 (130) 式，取 $l=n=0$ ， $m=-1$ ，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (g)$$

此方程組第一式表剪應力，第二式邊界上正應力，爲零。將以上 u ， v 式代入此方程組，得

$$2rs + A(b^2 + s^2) = 0$$

$$\left(\frac{k^2}{h^2} - 2\right)(r^2 - s^2) + 2(r^2 + Abs) = 0 \quad (h)$$

此處

$$\frac{k^2}{h^2} - 2 = \frac{\lambda}{G}$$

爲由 (b) 與 (e) 式得之。

由 (h) 式消去常數 A ，利用 (c) 與 (f) 式，得

$$(2s^2 - k^2)^2 = 4brs^2 \quad (k)$$

或由 (c)，(f) 得

$$\left(\frac{k^2}{s^2} - 2\right)^4 = 16\left(1 - \frac{h^2}{s^2}\right)\left(1 - \frac{k^2}{s^2}\right)$$

利用 (b)，(e) 及 (281) 式，此式所有之量皆可以擴張波速 c_1 、
扭曲波速 c_2 及表面波速 c_3 表之。得

$$\left(\frac{c_3^2}{c_2^2} - 2\right)^4 = 16\left(1 - \frac{c_3^2}{c_1^2}\right)\left(1 - \frac{c_3^2}{c_2^2}\right) \quad (1)$$

用符號

$$\frac{c_3}{c_2} = \alpha$$

且回顧

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

(1) 式成

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 8\left(3 - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\alpha^2 - 16\left[1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right] = 0 \quad (m)$$

若取 $\nu = 0.25$ 得

$$3\alpha^6 - 24\alpha^4 + 56\alpha^2 - 32 = 0$$

或 $(\alpha^2 - 4)(3\alpha^4 - 12\alpha^2 + 8) = 0$

此方程式三根爲

$$\alpha^2 = 4 \quad \alpha^2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \alpha^2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

此三根中僅最後者滿足 (c) 與 (f) 式所給之 r^2 與 b^2 爲正值之條件。因此

$$c_3 = \alpha c_2 = 0.9194 \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

取其極端情形 $\nu = 1/2$, (m) 式成

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 24\alpha^2 - 16 = 0$$

故得

$$c_3 = 0.9553 \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

在此兩種情況中，表面波波速略小於物體中傳播之扭曲波波速。有 α 後，物體表面水平與垂直位移振幅之比可甚易求得。如 $\nu = 1/4$ ，其比值爲 0.681。上述之表面波波速亦可由考慮物體介於兩平行平板間之振動得之 (註 1)。

第一七一節 無限介質中球對稱波

擾動，如球形孔隙中對稱爆炸，發出之波或脈動亦爲球面對稱。位移僅在軸向產生。此位移 u 爲球面軸向坐標 (註 2) r 與時間 t 之函數。由對稱知變形爲不轉動，且僅包含 c_1 之傳播速度，(273) 或 (277) 式。 u 之微分方程式可由考慮四個半徑所定義之典型體元素

(註 1) 見 H. Lamb, *Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 93, p. 114, 1917., 或 S. Timoshenko, *Phil. Mag.*, vol. 43, p. 125, 1922.

(註 2) 在第 12 章中此坐標以 R 表之， r 是圓柱系中軸坐標。

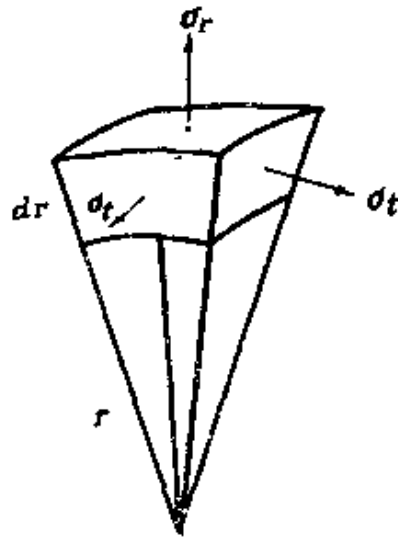


圖 250

半徑厚 dr 之“球方塊”求得，如圖250所示。軸向運動之動態方程為

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (a)$$

應力分量為

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \epsilon_t = \frac{u}{r} \quad (b)$$

由虎克定律得

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu \frac{u}{r} \right] \quad \sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (c)$$

將此代入 (a) 式，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (d)$$

對應於第166節中 (c) 式使用之函數 ϕ ，可寫

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (e)$$

將左端微分，甚易證得 (d) 式相當於

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) \right] = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (f)$$

此式表

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = F(t) \quad (g)$$

式中 $F(t)$ 爲任意函數。若其不爲零，可得 (g) 式之特別解，即僅爲 t 之函數 $\phi(t)$ 。但此對位移 (e) 式並無貢獻，故棄之。以 r 乘 (g) 式得

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi) \quad (282)$$

比較 (275) 及其解 (276) 式，(f) 之一般解爲

$$r\phi = f(r - c_1 t) + g(r + c_1 t) \quad (283)$$

此式之解釋與 (276) 同。函數 $f(r - c_1 t)$ 表外駛之波，而 $g(r + c_1 t)$ 表內駛之波。前者相當於爆炸問題，後者相當於擠壓問題，例如突施壓力於全部外表面，則波趨於有限球體中心。

第一七二節 球形孔隙中之爆炸壓力

(283) 式棄去函數 g ，則問題簡化爲決定單一函數 f 以滿足邊界條件及起始條件。

起始條件爲 $t = 0$ 時，具有球孔之無限介質各處位移及速度均爲零。 $t > 0$ 時，任意所給時間 t 函數之壓力作用於 $r = a$ 孔之表面。此爲邊界條件之一，另一邊界條件爲無窮遠處材料不受擾動。

因有一 $r = a$ 之邊界條件，故將 (283) 式取下列形式甚便，

$$\phi = \frac{1}{r} f(\tau) \quad \text{where } \tau = t - \frac{1}{c_1}(r - a) \quad (a)$$

在 $r = a$ ，吾人得 $\tau = t$ 。又， τ 爲測半徑 r 大於 a 處， $t = 0$ 時由半徑 a 處發出之訊號到達後之時間。寫成

$$f' = \frac{c_1}{d\tau} f(\tau)$$

由第171節 (c) 與 (e) 式，

$$u = -\frac{1}{c_1} \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f \quad (b)$$

$$\frac{1}{\rho c_1^2} (1-\nu) \sigma_r = (1-\nu) \frac{1}{c_1^2} \frac{1}{r} f'' + 2(1-2\nu) \left(\frac{1}{c_1} \frac{1}{r^2} f' + \frac{1}{r^3} f \right) \quad (c)$$

$$\frac{1}{\rho c_1^2} (1-\nu) \sigma_t = \nu \frac{1}{c_1^2} \frac{1}{r} f'' - (1-2\nu) \left(\frac{1}{c_1} \frac{1}{r^2} f' + \frac{1}{r^3} f \right) \quad (d)$$

孔在 $r=a$ 之邊界條件為 $\sigma_r = -p(t)$ 。將此 σ_r 之值代入 (c) 式左端，且於右端取 $r=a$ ，表 $\tau=t$ 。故邊界條件需為

$$f''(t) + \gamma f'(t) + 2\gamma \frac{c_1}{a} f(t) = -\frac{a}{\rho} p(t) \quad (e)$$

此處分號可視為對 t 之微分，且

$$\gamma = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{c_1}{a} \quad (f)$$

(e) 式為下列形式之常微分方程

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = F(t) \quad (g)$$

其中 a_1, a_0 為常數。此形式在動力學中有阻泥簡單物體—彈簧振動器之一般受力運動問題甚為熟悉。其一般解可表成

$$x(t) = \int_0^t F(\xi) g_1(t-\xi) d\xi + C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t} \quad (h)$$

此處 C_1, C_2 為輔助函數 (齊次方程之一般解) 之任意常數； α, β 為下列 z 之二次式兩根：

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (i)$$

(g) 式特別解之積分中，函數 $g_1(t-\xi)$ 由下式得

$$g_1(t) = \frac{1}{\alpha - \beta} (e^{\alpha t} - e^{\beta t}) \quad (j)$$

此僅為輔助函數其 C_1 與 C_2 需滿足

$$g_1(0) = 0 \quad g_1'(0) = 1 \quad (k)$$

對應於 (h) 式積分，(e) 式之特別解為

$$f(t) = -\frac{1}{\alpha - \beta} \frac{a}{\rho} \int_0^t p(\xi) [e^{\alpha(t-\xi)} - e^{\beta(t-\xi)}] d\xi \quad (1)$$

式中

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma(-1 \pm is) \quad s = \sqrt{\frac{1}{1-2\nu}} \quad (m)$$

且 s, r [由上 (f) 式得] 爲正實數。雖然此處 α, β 爲複數, (1) 式右端仍爲實數。

吾人可證特別解 (1) 是爆炸問題所需之全部。

$t=0$ 時由 (b) 式, 零位移之起始條件需

$$-\frac{1}{c_1} \frac{1}{r} f' \left(-\frac{r-a}{c_1} \right) - \frac{1}{r^2} f \left(-\frac{r-a}{c_1} \right) = 0 \quad \text{for } r \geq a \quad (n)$$

速度爲零之起始條件可以對 t 微分 (b) 式表之, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{c_1} \frac{1}{r} f''(\tau) - \frac{1}{r^2} f'(\tau)$$

然後在 τ 中令 $t=0$ 。故其條件爲

$$-\frac{1}{c_1} \frac{1}{r} f'' \left(-\frac{r-a}{c_1} \right) - \frac{1}{r^2} f' \left(-\frac{r-a}{c_1} \right) = 0 \quad (o)$$

至目前爲考慮函數 $f(t)$ 之引數 t 僅爲正值。但在起始條件 (n) 與

(o) 式中, 引數爲 $-\frac{(r-a)}{c_1}$, 其值在吾人討論之 $r > a$ 之區域爲負。

顯然地, 利用吾人可能有之引數 η , 對所有之正與負實數值 η 定義 $f(\eta)$ 。

考慮下列定義: 對正 η , $f(\eta)$ 如上述 (1) 式, 但以 η 代 t ; 當 η 爲負, $f(\eta)$ 爲零。

當 η 爲負, 導數 $f'(\eta), f''(\eta)$ 亦爲零, 且起始條件 (n) 與 (o) 可滿足。再者, 對正 τ , 由 (1) 式,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau) = 0 \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} f'(\tau) = 0 \quad (p)$$

因此，回顧方程式 (b)，在半徑 $r=a$ 處之位移直到 $t=(r-a)/c_1$ 時 (即至 $\tau=0$) 皆為零，然後連續不為零之值開始發展。此更進一步顯示材料在無窮遠處不受擾動。並且，若吾人考慮任意時間 r 之全部範圍，則如物理條件所要求者，位移無不連續。明顯地，給予 $f(\eta)$ 之定義可滿足問題之所有條件 (註1)。突施然後保持之孔壓力。

於此情形，在 $t>0$ 取 $p(t)=p_0=\text{常數}$ (註2)。於方程式 (1) 中令 $p(\xi)=p_0$ ，積分甚易求得。經以 τ 代 t 後，結果為

$$f(\tau) = -\frac{p_0 a^2}{2\rho r c_1} \left[1 - e^{-\gamma\tau} \left(\cos \gamma s\tau + \frac{1}{s} \sin \gamma s\tau \right) \right] \quad (\text{a})$$

今於方程式 (b)，(c) 及 (d) 中利用此式可求得位移及應力。S.C. Hunter (見註腳1) 求得孔應力比 $(\sigma_t - \sigma_r)/p_0$ 為無因次時間 $\bar{t} = c_1 t/a$ 之函數。於 $t=0$ ，即當突施壓力之時，應力比突昇至0.592。在 $\bar{t}=2.19$ 時更昇至1.75。然後漸降至1.5。此值與靜力問題對應。

(註1) 自1935年起用變換法求得之許多解記載於 H.G. Hopkins, *Dynamic Expansion of Spherical Cavities in Metals*, 對彈性塑性介質及大變形之更進一步探討，見 "Progress in Solid Mechanics," vol. 1, pp. 84-164, 1960.

(註2) 早期之解及有關問題，如衝擊壓力之參考文獻。見 p. 43 in J. N. Goodier and P. G. Hodge, "Elasticity and Plasticity," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.

附錄 彈性力學中有限差分方程式 之應用

第一節 有限差分方程式之引導

吾人已知彈性力學中問題通常需要解某些偏微分方程式及適應已知邊界條件。僅在簡單邊界情況下，方能以嚴密方式討論此等方程式解法。

謹嚴解常不能求得而必須求助於近似方法。此處吾人將討論者爲此種方法之一，其根據爲以對應之有限差分方程式以替代微分方程式（註1）。

如設一無突然變化之函數 $f(x)$ 在等間隔 $x=0, x=\delta, x=2\delta, \dots$

（註1）首先應用有限差分法於彈性方程式者似爲 C. Runge，彼曾用此法以解扭轉問題 (*Z. Math. Phys.*, vol. 56, p. 225, 1908)。彼將此問題化爲解一線性代數方程系統。繼續發展係由 L. F. Richardson 所爲，*Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. A. vol. 210, p. 307, 1910，彼用一種重複法於解代數方程式中，並獲重力及水壓力下壩內應力之近似值。另一重複法及其收斂證明係由 H. Liebmann 提出，*Sitzber. Bayer. Akad. Wiss.*, 1918, p. 385。此重複法用於調和及雙調和方程式之收斂性曾續由 F. Wolf, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 6, p. 118, 1926 及 R. Courant, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 6, p. 322 予以討論。有限差分法由 H. Marcus *Armiertes Beton* 1919, p. 107; H. Hencky, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 1, p. 81, 1921, vol. 2, p. 58, 1922 有效應用於薄板理論中。R.V. Southwell 及其門生對有限差分法更擴大其應用範圍，參閱 R.V. Southwell, "Relaxation Methods in Theoretical Physics," Oxford University Press, Fair Lawn, N.J., 1946。電子計算機幾分鐘內解數千線性獨立代數方程式，使此法實用範圍更爲推廣。

處值爲 y_0, y_1, y_2, \dots ，相減後可得第一差分 $(\Delta_1 y)_{x=0} = y_1 - y_0$ ，
 $(\Delta_1 y)_{x=\delta} = y_2 - y_1$ ， $(\Delta_1 y)_{x=2\delta} = y_3 - y_2, \dots$ 除以 δ ，吾人得各對應點
 上第一導數之近似值：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} \approx \frac{y_1 - y_0}{\delta} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\delta} \approx \frac{y_2 - y_1}{\delta}, \dots \quad (1)$$

用此各第一差分，吾人計算第二差分如下：

$$(\Delta_2 y)_{x=\delta} = (\Delta_1 y)_{x=2\delta} - (\Delta_1 y)_{x=\delta} = y_3 - 2y_2 + y_1$$

已知第二差分後，二次導數之近似值爲

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=\delta} \approx \frac{(\Delta_2 y)_{x=\delta}}{\delta^2} = \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{\delta^2} \quad (2)$$

如吾人有一兩變數之平滑函數 $w(x, y)$ ，可用類如 (1) 及 (2) 式以計算各偏導數之近似值。例如，設問題涉及圖 1 之矩形邊界，正
 方網各節點上函數 w 值爲已知，網邊長爲 δ ，則在 0 點上各偏導數之
 近似值可用以下各式

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &\approx \frac{w_1 - w_0}{\delta} & \frac{\partial w}{\partial y} &\approx \frac{w_2 - w_0}{\delta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &\approx \frac{w_1 - 2w_0 + w_3}{\delta^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &\approx \frac{w_2 - 2w_0 + w_4}{\delta^2} \end{aligned} \quad (3)$$

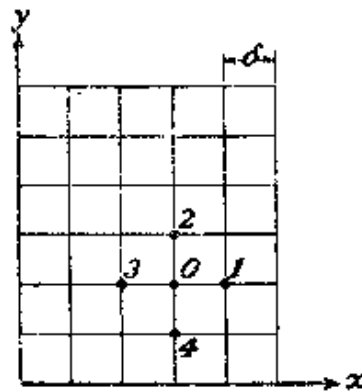


圖 1

高次偏導數亦可以類似方式寫出其近似值。已知此等近似式可將偏微
 分方程式換爲有限差分方程式。

第一例取稜體桿之扭轉。此問題可化爲以下所列偏微分方程式之積分

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (4)$$

內 ϕ 爲應力函數，其值沿斷面邊界須爲常數， θ 爲桿單位長度之扭角， G 爲剪性模數。用 (3) 各式，吾人可將以上微分方程式轉換爲有限差分方程式

$$\frac{1}{\delta^2}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0) = -2G\theta \quad (5)$$

設取一正方形斷面桿如圖 2 所示，斷面每邊長 a ，用正方形網邊長爲 $\delta = 1/4a$ 。由對稱條件知此例中取斷面八分之一即足夠，如圖中所

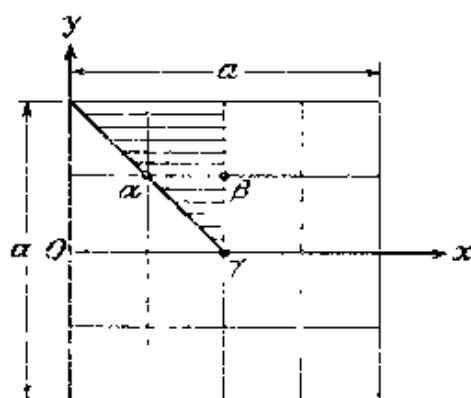


圖 2

示陰影部分。如吾人求得圖 2 中函數三點上值 α ， β ， γ ，即知函數在邊界內所有節點上值。故問題爲計算 α ， β ， γ 。爲此吾人可寫出 (5) 式之三個聯立方程式。注意對稱條件吾人得

$$2\alpha + \gamma - 4\beta = -2G\theta\delta^2$$

$$2\beta - 4\alpha = -2G\theta\delta^2$$

$$4\beta - 4\gamma = -2G\theta\delta^2$$

解出後，得

$$\alpha = 1.375G\theta\delta^2, \quad \beta = 1.750G\theta\delta^2, \quad \gamma = 2.250G\theta\delta^2$$

所需之應力函數因此即由以上各節點上數值及邊界上零值予以決定。

為計算應力函數各偏導數，設想一平滑曲面其在各節點上豎坐標為算出之數值。此面任何點上斜率將為對應扭轉應力之近似值。最大應力出現於正方每邊中點上。對此網所選少數節點所得結果之正確性予以檢討，現計算圖 2 中 O 點上剪應力。為求所需斜率，用一平滑曲線連結 x 軸各節點上算出之坐標 β, γ, β 。此等值除以 $1/4G\theta\delta^2$ 列於下表第二行中。其他各行為各次差分（註）。所需之平滑曲線則由牛頓內插法求出：

$$\phi = \phi_0 + x \frac{\Delta_1}{\delta} + x(x-\delta) \frac{\Delta_2}{1(2\delta^2)} + x(x-\delta)(x-2\delta) \frac{\Delta_3}{1(2)3\delta^3} + x(x-\delta)(x-2\delta)(x-3\delta) \frac{\Delta_4}{1(2)3(4\delta^4)}$$

$x =$	0	δ	2δ	3δ	4δ
$\phi =$	0	7	9	7	0
$\Delta_1 =$	7	2	-2	-7	
$\Delta_2 =$	-5	-4	-5		
$\Delta_3 =$	1	-1			
$\Delta_4 =$	-2				

取 ϕ 之導數並代入 $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ 表中之值乘以 $G\theta\delta^2/4$ ，吾人得，對 $x=0$ 時，

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{124}{48}G\theta\delta = 0.646G\theta a$$

將此結果與第 325 頁所得之正確值比較，其差距約為百分之 4.3。求較佳結果須用一較細網。例如取 $\delta = a/6$ ，圖 3，吾人須解六個聯立方程

（註）此處視差分均存在於各量一端並用於牛頓公式。

式，得

$$\alpha = 0.952(2G\theta\delta^2) \quad \beta = 1.404(2G\theta\delta^2) \quad \gamma = 1.539(2G\theta\delta^2)$$

$$\alpha_1 = 2.125(2G\theta\delta^2) \quad \beta_1 = 2.348(2G\theta\delta^2) \quad \gamma_1 = 2.598(2G\theta\delta^2)$$

現用沿 x 軸七個豎坐標並計算 O 點處斜率 (註 1)，得最大剪應力為

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0.661G\theta a$$

此結果之差誤約為百分之二。已有 $\delta = 1/4a$ 及 $\delta = \frac{1}{6}a$ 兩結果可用外插

法求一較佳近似值 (註 1)。應力函數 ϕ 之差誤 (註 2)，因採用差分方程替代微分方程所致，可以證明與所用之網邊長成正比，如此邊長為小值。如用 $\delta = 1/4a$ 時差誤為 Δ ，則用 $\delta = 1/6a$ 時差誤可設為 $\Delta(2/3)^2$ 。

用以上所得結果，吾人可用下式求 δ 值。

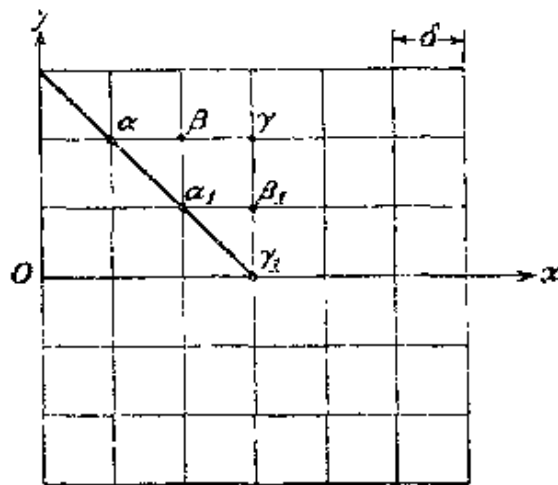


圖 3

$$\Delta - \Delta(2/3)^2 = 0.015G\theta a$$

由此知

$$\Delta = 0.027G\theta a$$

(註 1) 內插曲線斜率之計算用 W. G. Bickley 算得之表可大為簡化，此等表載 Southwell 書中，*op. cit.*

(註 2) 參考 Richardson, *loc. cit.*

較接近之應力值則為

$$0.646G\theta a + 0.027G\theta a = 0.673G\theta a$$

此與正確值 $0.675G\theta a$ 之差距小於百分之1/3。

第二節 逐步近似解法

由上節所舉之簡單例題知如增加有限差分法精確度，吾人須採用較細密之網。如此則所須解方程式數目則逐漸增多（註1），解此等方程式時應用逐步近似法可使手續大為簡化。為解釋此點取方程式（註2）

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

對應之有限差分方程式，由方程式（5），知為

$$\phi_0 = 1/4(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \quad (7)$$

此示在正方網任一節點O上函數值為其四鄰節點上函數值之平均數。此事實將利用以逐步計算函數之近似值，現仍取一正方邊界之簡單例如圖4所示，並設 ϕ 函數之邊界值於圖上。由此等值對豎向中線之對稱關係，吾人可設在區域內函數亦對同一軸對稱，因此僅須計算六個

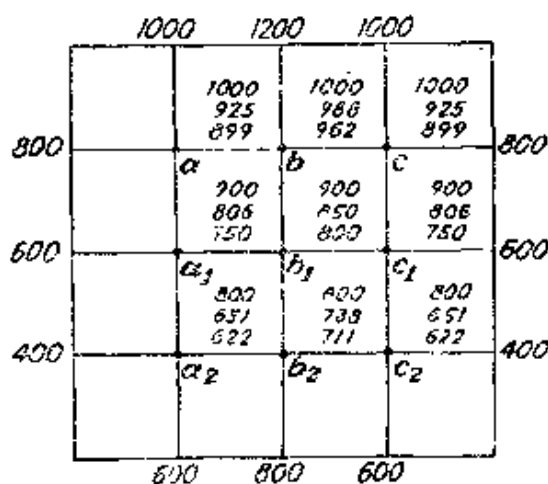


圖 4

（註1）電子計算機之應用見第10節。

（註2）前於第311頁證示可化為解此方程式帶邊界上預定 ϕ 值。

節點值，即 ϕ 之 a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 。寫出並解 (7) 式之六個方程式，其結果為 $\phi_a = 854, \phi_b = 914, \phi_{a_1} = 700, \phi_{b_1} = 750, \phi_{a_2} = 597, \phi_{b_2} = 686$ (註)。吾人可採另一方法如下：設予 ϕ 某些值，如圖 4 中每行最上部之數目。為求較近似值對每一節點用 (7) 式。取 a 點；第一次近似值為

$$\phi_a' = 1/4(800 + 1,000 + 1,000 + 900) = 925$$

計算 b 點第一次近似值時，用已求出之 ϕ_a' 及對稱條件，即 $\phi_c' = \phi_a'$ 。方程式 (7) 為

$$\phi_b' = 1/4(925 + 1,200 + 925 + 900) = 988$$

對所有內部節點均予相類之計算，吾人得第一次近似值，即每行中第二個數目，用此等數目可計算第二次近似值如

$$\phi_a'' = 1/4(800 + 1,000 + 988 + 806) = 899$$

$$\phi_b'' = 1/4(899 + 1,200 + 899 + 850) = 962$$

.....

第二次近似值亦記於圖 4 中並可看出逐次近似漸趨於上述之正確值。重複此種計算十次後，此例所得結果小於真解最後數目一單位而可視為滿意之近似解。

一般情形下獲得滿意近似值所需重複次數視最初選擇函數 ϕ 值而定。較佳之起始值將減少以後計算勞力。

開始時用少數節點疏粗之網較為便利。各節點上 ϕ 值可直接解 (7) 式或用上述之重複法求出。此後可進至較細密之網如圖 5，內重線代表較粗網。已知各節點上 ϕ 值，由圖中小圓圈表示，用方程式 (7)，計算用叉表示各點上值。現用圓圈及叉上兩集函數值由 (7) 式可得小黑圓所代表各點上之值。如此則細網上所有節點上值將予決定，現可對細網施以重複法。

(註) 吾人僅用三位數字並忽計分數。

代替直接求 ϕ 值，故人可計算最初假設 ϕ 值 ϕ^0 之修正 ψ (註1)。
如此則

$$\phi = \phi^0 + \psi$$

因函數 ϕ 適應 (6) 式， $\phi^0 + \psi$ 亦須適應，故

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial^2 \phi^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial y^2}\right) \quad (8)$$

沿邊界線 ϕ 值為已知，亦即該處修正項 ψ 為零。因此，現問題為尋一

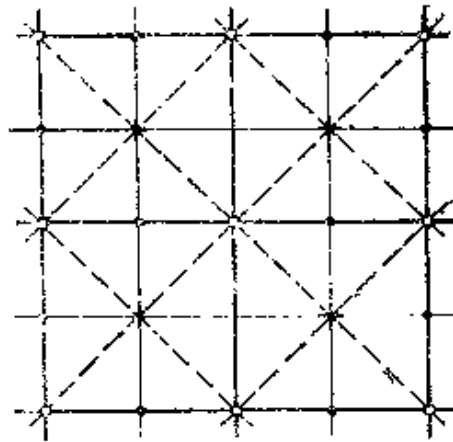


圖 5

函數在內部每一點上適應 (8) 式而在邊界上為零。用有限差分方程式替代 (8) 式，對正方網內任一點 O 上 (圖 1) 吾人得

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 = -(\phi_1^0 + \phi_2^0 + \phi_3^0 + \phi_4^0 - 4\phi_0^0) \quad (8')$$

用函數 ϕ 之假設值 ϕ^0 ，方程式右方可用於每一節點上以計算其值。故計算修正項 ψ 化為解如前節 (5) 之方程式系統，並可用重複法。

第三節 鬆弛法

對有限差分方程式，如 (8') 式所示者。索茲威爾 (R. V. Southwell) 曾發展一種解法稱為鬆弛法 (relaxation method)。索茲威爾由浦郎得薄膜類比開始 (註2)，其根為扭轉問題之微分方程式 (4)，

(註1) 此法簡化計算，因係對較小數目著手。

(註2) 參閱第 315 頁。

與均勻受拉側向荷力薄膜之位移方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad (9)$$

爲同一形式。此式中 w 爲由薄膜原平面 xy 之位移， q 爲分布荷力密度， S 爲薄膜邊界上單位長度之常數拉力。問題爲求以 x 及 y 爲函數之位移 w ，在薄膜每一點處適應方程式 (9) 而在邊界上爲零。

現求其對應之有限差分方程式。爲此目的吾人用一均勻收拉之正方線網以替代薄膜如圖 1。取 O 點並用 $S\delta$ 代表線內拉力，知 $O1$ 及 $O3$ 兩線施於圖 6 節點 O 一向上力等於 (註)

$$S\delta \left(\frac{w_0 - w_1}{\delta} + \frac{w_0 - w_3}{\delta} \right) \quad (10)$$

對另兩線 $O2$ 及 $O4$ 所施之力可得一相似算式。用 $q\delta^2$ 替代連續分布於薄膜上荷力，並設爲集中力作用於各節點上，現可寫節點 O 之平衡方程式如下：

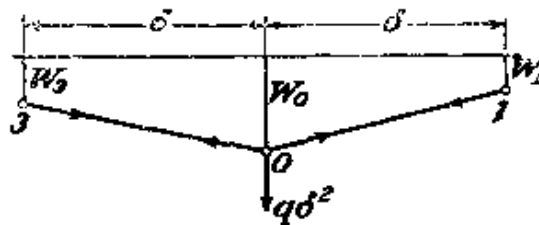


圖 6

$$q\delta^2 + S(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 4w_0) = 0 \quad (11)$$

此爲一有限差分方程式，對應於微分方程式 (9)。爲解此問題吾人須求位移 w 之一集值，使 (11) 式在每一節點上可被適應。

開始時選位移初值 $w_0^0, w_1^0, w_2^0, w_3^0, w_4^0, \dots$ 代入方程式 (11)，通常不能適應平衡條件，爲維持已設網之位移，需在節點處引用支點。如此則

(註) 設位移爲極小。

$$R_0 = q\delta^2 + S(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0 - 4w_0^0) \quad (12)$$

將代表傳遞於支承上之部分荷力。吾人稱此為剩餘力。設想各支承為螺旋起重式者，使節點上位移可隨意調整。如此則調整各節點至適當位移時可使所有剩餘力(12)均消失。對各支點位移所需之調整將代表必須加於最初所設 w_0^0 ， w_1^0 ， w_2^0 ， \dots 所需之修正量以得正確之 w 。

索茲威爾氏調整支點位移所用程序與克里西夫 (Calisev) (註) 對高度靜不定結構所發展之方法相似。首先對支點之一，如圖 6 中 O 點，予以位移，而保持其他支點固定。由方程式(11)知一向下位移 w_0' 將相當於一豎向力 $-4Sw_0'$ 作用於節點 O ，負號指此力係向上者。調整此位移使

$$R_0 - 4Sw_0' = 0 \quad \text{亦即 } w_0' = \frac{R_0}{4S} \quad (13)$$

吾人使剩餘力(12)為零而再無傳遞於支點 O 之壓力，但同時將有壓力 Sw_0' 轉移於各鄰近支點其剩餘力將增加此量。對其他各支點亦如此進行並重複此程序若干次，直至所有剩餘力均為可忽視之小值。支點上之總位移，在此項程序中所彙集者，代表對起始值 w_0^0 ， w_1^0 ， w_2^0 ， \dots 之修正量，用其適當正負號相加於起始值後即得受拉正方網之正確位移。

為簡化上述程序之計算，先用

$$w = \frac{q\delta^2}{S} \psi \quad (14)$$

於(11)式使成為無維式。如此得

$$1 + (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0) = 0 \quad (15)$$

內 ψ_0 ， ψ_1 ， \dots 為純數值。

(註) K.A. Calisev, *Tecnicki List*, 1922, 1923, Zagreb. 德譯見 *Publ. Intern. Asso. Bridge Structural Eng.*, vol. 4, p. 199, 1936. 類似方法見 Hardy Cross, *Trans. ASCE*, vol. 96, pp. 1-10, 1932.

問題規化為求一集 ψ 值適應網內各點。在邊界上 ψ 為零。吾人仍以上述方法進行，先取初值 $\psi_0^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \dots$ 此等值不能適應平衡方程式 (15)，通常將有剩餘量

$$r_0 = 1 + (\psi_1^0 + \psi_2^0 + \psi_3^0 + \psi_4^0 - 4\psi_0^0) \quad (16)$$

此時為純數值。

現須對設定值 $\psi_0^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \dots$ 加以修正量以消去所有剩餘量。加修正量 ψ_0' 於 ψ_0^0 即加 $-4\psi_0'$ 於剩餘量 r_0 ，並於鄰近節點上剩餘量加以 ψ_0' 。取 $\psi_0' = r_0/4$ 將消去節點 O 之剩餘量而變更鄰接節點上剩餘量。對所有節點均以相同方式進行，重複此程序多次後，終至各剩餘值減小為可忽計之量並得足夠精確之 ψ 值。對應之 w 值可由 (14) 式求得。

為例釋此項程序，設取第一節已討論之正方形扭轉問題。此例微分方程式為 (4) 式。為使其成為無維式，取

$$\phi = \frac{2G\theta\delta^2}{1,000} \psi \quad (17)$$

有限差分方程式 (5) 變為

$$1,000 + (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0) = 0 \quad (18)$$

用 1000 於 (17) 式中為分母為使各 ψ 為大值使最後可僅取整值。為使此例題為最簡開始用圖 2 中所示粗網。如此則則僅需求三內點之 ψ 值而其正確答案為已知 (閱第 543 頁)。用大尺吋之正方網使有足夠空間將所有中間計算置於圖中 (圖 7)。計算由假設 ψ 之初值開始。此等初值寫於每節點之左上方。各值 700, 900, 及 1100 有意取與前所得之正確值不同。代此等值及邊界上之零值於方程式 (18) 中，計算所有節點上剩餘力。此等力值寫於每一節點之右上方。最大之剩餘力，等於 200 出現於網中點上，故吾人由此點開始鬆弛法。加於假設值一修正量 50，寫於圖中 1,100 之上，即立可消去中點剩餘力。因此劃去 200

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 = -1,000 - 2$$

剩餘值 -2 與 $-1,000$ 較當為可接受者。欲求各 ψ 值，加所有引進修正量於開始假設值，得

$$700 - 6 - 3 - 2 - 1 = 688 \quad 900 - 12 - 6 - 3 - 2 - 1 = 876$$

$$1,100 + 50 - 12 - 6 - 3 - 2 - 1 = 1,126$$

如此則方程式 (17) 所得之 ϕ 值為

$$\frac{688}{500} G\theta\delta^2 = 1.376G\theta\delta^2 = 0.0860G\theta a^2$$

$$\frac{876}{500} G\theta\delta^2 = 1.752G\theta\delta^2 = 0.1095G\theta a^2$$

$$\frac{1,126}{500} G\theta\delta^2 = 2.252G\theta\delta^2 = 0.1408G\theta a^2$$

此與前所得結果極為接近 (見第 544 頁)。

由茲知索茲威爾方法對解 (15) 式重複作業予吾人一物理觀念使對選擇網節點計劃有適宜之次序。

欲求較佳之近似值，須採用較細密之網。用圖 5 所解釋方法，用網邊為 $\delta = a/8$ 之起始 ψ 值。用標準鬆弛法較細密網之 ψ 值可以求得並可計算較精確之最大應力值。由對 $\delta = a/4$ 及 $\delta = a/8$ 兩種最大應力，用外插法可得較近似值，如第一節所解釋。

第四節 三角及六角網

以上討論採用正方形網，但有時宜用三角形或六角形網，如圖 8a 及 8b。取三角形網，圖 8a，吾人知由虛線六角形內分布荷力將傳遞於節點 O 上。如 δ 代表三角邊長，六角形邊長為 $8/\sqrt{3}$ ，六角形面積為 $\sqrt{3}\delta^2/2$ ，故每節點所受力為 $\sqrt{3}\delta^2 q/\sqrt{2}$ 。此力將由 $O1, O2, \dots, O6$ 各網線內之力維持平衡。為使線網對應於一拉緊薄膜，每線中拉力應與薄膜中經六邊形一邊所傳遞之力相等。現用前節相同方法，得

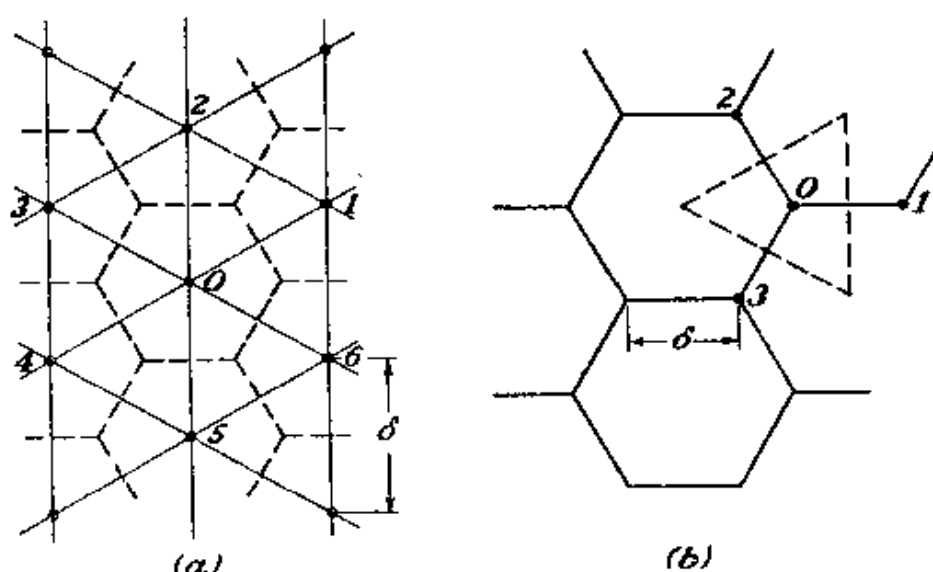


圖 8

節點 O 以下平衡方程式：

$$\frac{w_1 + w_2 + \dots + w_6 - 6w_0}{\delta} - \frac{S\delta}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}q\delta^2}{2} = 0$$

或

$$w_1 + w_2 + \dots + w_6 - 6w_0 + \frac{3}{2} \frac{q\delta^2}{S} = 0 \quad (19)$$

引用一無維函數 ψ ，其定義為

$$w = \frac{3}{2} \frac{q\delta^2}{S} \psi \quad (20)$$

有限差分方程式變為

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_6 - 6\psi_0 + 1 = 0 \quad (21)$$

對每一內節均可寫出此一方程式，而對此等方程式之求解，仍如前同，可用重複法或鬆弛法。

如為六邊形網，圖 8b，分布於等邊三角形上荷力，即圖中虛線所示者，將傳遞於節點 O 。用 δ 代表網孔邊長，虛線三角形邊長為 $\delta\sqrt{3}$ ，其面積為 $3\sqrt{3}\delta^2/4$ 。對應荷力為 $3\sqrt{3}q\delta^2/4$ ，此力將由網線 $O1, O2, O3$ 中拉力均衡之。為使線網對應於受拉薄膜，取線中拉力等於 $S\delta\sqrt{3}$ 。

平衡方程式將為

$$\frac{w_1 + w_2 + w_3 - 3w_0}{\delta} S \delta \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}q\delta^2}{4} = 0$$

或

$$w_1 + w_2 + w_3 - 3w_0 + \frac{3}{4} \frac{q}{S} \delta^2 = 0 \quad (22)$$

為求扭轉問題之有限差分方程式，須在 (19) 及 (22) 式中以 $2G\theta$ 代替 q/S 。

舉一例，設取斷面為等邊三角形桿之扭轉問題 (註1)，圖9。此問題之嚴密解見第311頁。

用鬆弛法，此例自然應取一三角形網，開始時用一粗網，取網孔每邊長 δ 等於三角形邊長 a 三分之一。如此則僅有一個內節點 O ，而應力函數 ϕ 在所有鄰近節點 1, 2, ..., 6 均為零，因此等點均在邊界上。節點 O 處之有限差分方程式可由方程 (19) 中以 ϕ_0 代 w_0 及 $2G\theta$ 代 q/S 求出，即

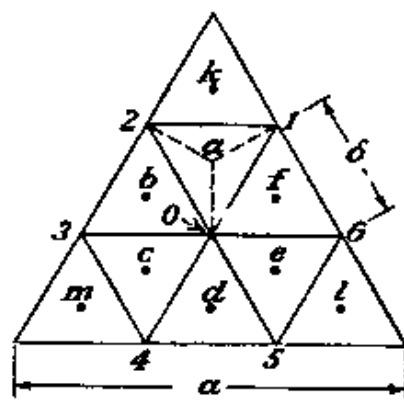


圖9

$$6\phi_0 = 3G\theta\delta^2 = \frac{G\theta a^2}{3}$$

(註1) 此例題在索茲威爾書中 (Southwell, R. V. "Relaxation Methods of Theoretical Mechanics", Oxford University Press) 有詳盡之討論。

或

$$\phi_0 = \frac{G\theta a^2}{18} \quad (23)$$

現改用一較細網。對此網之起始值試考慮 a 點——三角形 $12O$ 之形心。設此點連接於節點 $0, 1, 2$ ，則網線 $aO, a1, a2$ 各長 $\delta/\sqrt{3}$ 。視 a 為六邊網一節點，圖 8b 以 $\delta/\sqrt{3}$ 替代 δ ， $2GJ$ 替代 q/S 並代入 (22) 式中，並取 $w_1 = w_2 = 0, w_3 = \phi_0, w_0 = \phi_a$ ，得

$$\phi_a = \frac{1}{3} \left(\phi_0 + \frac{G\theta\delta^2}{2} \right) = \frac{G\theta a^2}{27} \quad (24)$$

對圖 9 中各點 b, c, d, e ，及 f ，應力函數亦可取相同值。為求應力函數在 k, l, m 各點值，再用 (22) 式，並知此例中

$$w_1 = w_2 = w_3 = 0$$

故得

$$\phi_k = \phi_m = \phi_l = \frac{G\theta a^2}{54} \quad (25)$$

如此可求得圖 10 中小圓點處各節點之 ϕ 值。由此圖知在 a, c ，及 e

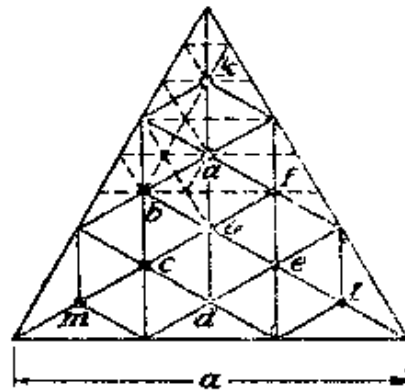


圖 10

每一節點上均有六網線，即圖 8a 三角形網所需者。但其餘節點線數則較六為少。為適應三角形網所有內節點上條件，吾人以圖 10 中上部虛線所示方式進行。此時三角形斷面分為小三等邊角形每邊長 $\delta = a/9$ 。

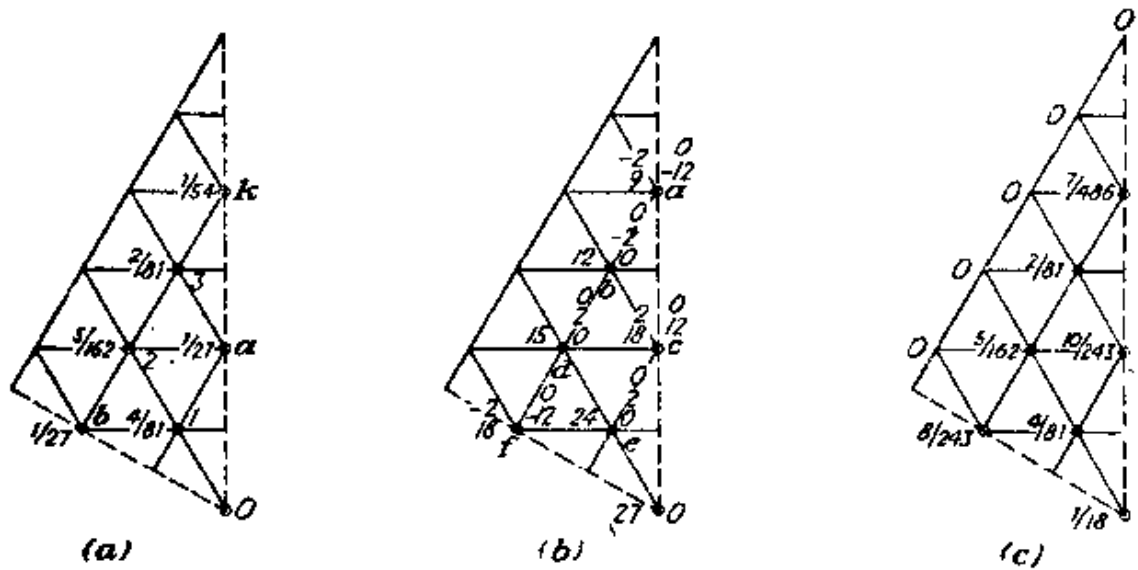


圖 11

由對稱條件知取斷面六分之一即已足夠，如圖11a所示。節點 O, a, b, k 處 ϕ 值業已決定。現需求點 1, 2, 3 處 ϕ 值。此可用 (22) 式及三鄰近節點值算出。例如，對點 1，吾人將得

$$\phi_0 + \phi_b + \phi_a - 3\phi_1 + \frac{3}{4} 2G\theta \left(\frac{a}{9}\right)^2 = 0$$

代入 ϕ_a, ϕ_b, ϕ_0 前已算出之值，結果為

$$\phi_1 = 4/81 G\theta a^2 \tag{26}$$

用同一方式可算出 ϕ_2 及 ϕ_3 值。各值均寫於對應節點之左方，圖 11a (註1)。此等值將用為鬆弛程序之起始值。

在扭轉問題中，(19) 式將換寫為以下方程式

$$\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_6 - 6\phi_0 + 3G\theta \frac{a^2}{81} = 0$$

為使為純數值式，引用以下符號 (註2)

$$\phi = \frac{G\theta a^2 \psi}{486} \quad \text{或} \quad \psi = \frac{486\phi}{G\theta a^2} \tag{27}$$

(註1) 常數 $G\theta a^2$ 在圖中省略。

(註2) 引進數目486使僅對整數計算。

因此得

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_6 - 6\psi_0 + 18 = 0 \quad (28)$$

由方程式 (27) 所算出 ψ 之起始值，寫於圖 11b 節點左方。代此等值於 (28) 式左方，得對應之餘值為

$$R_0 = \psi_1^0 + \psi_2^0 + \dots + \psi_6^0 - 6\psi_0^0 + 18 \quad (29)$$

如此所得之餘值，於圖 11b 中寫於每一節點之右方。對此等餘值之清除將自 a 點開始。予此點一位移 $\psi_a' = -2$ ，加 [(29)式] $+12$ 於 a 處餘值及 -2 於所有各鄰點。如此 a 處餘值消除而 b 處出現一餘值 -2 。吾人不必注意邊界上餘值，因該處為永久支點。現取 c 點並引進位移 $+2$ ，吾人使該處餘值為零並加 $+2$ 於 b ， d ，及 e 。現於 f 點上置一位移 -2 可使所有餘值為零，加所有記錄之修正量於 ψ 之起始值，得所需之 ψ 值。由方程式 (27) 可得 ϕ 值。此等值，除以 $G\theta a^2$ 後，示於圖 11c 上。結果與第 311 頁上嚴密解所得者相符。

第五節 整塊及整組鬆弛

前此所用清除餘值作業方式係針對各別節點，視其餘各點為固定者。有時同時移動一組節點甚為適當。例如，設圖 12 代表正方形網之一部分，並予陰影部分面積內各點一單位之位移而其餘節點保持固

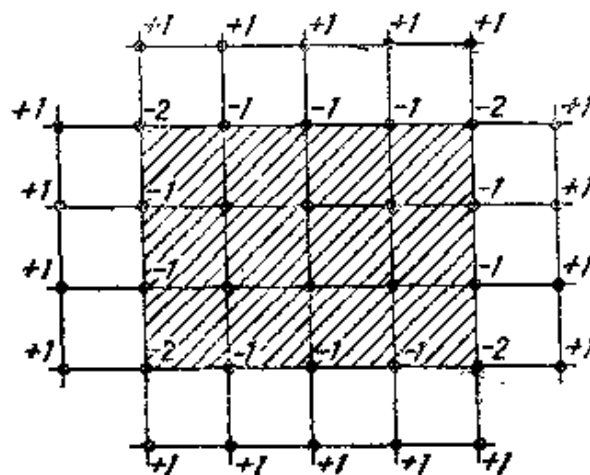


圖 12

定。吾人可設想陰影全體節點繫於一絕對剛體無重平板上，而予此板一單位位移，垂直於板面。由對平衡之考慮（圖6），知上述位移將更換繫陰影部分於網其餘部分各線端點上餘值。如 O 及 1 代表一線之兩端。由位移 w_0 及位移 w_1 所提供之餘值為

$$R_0 = -S \delta \frac{w_0 - w_1}{\delta} \quad \text{及} \quad R_1 = S \delta \frac{w_0 - w_1}{\delta}$$

現如保持 1 固定並予 O 點外加位移 Δw_0 ，得餘力增量

$$\Delta R_0 = -S \Delta w_0 \quad \Delta R_1 = S \Delta w_0$$

引用無維量及前用符號

$$\frac{R}{q \delta^2} = r \quad w = \frac{q \delta^2}{S} \psi$$

得 $\Delta r_0 = -\Delta \psi_0 \quad \Delta r_1 = \Delta \psi_0$

故 ψ_0 之單位增量所生餘值變更為

$$\Delta r_0 = -1 \quad \Delta r_1 = +1$$

此等變更均示於圖上。網中其他節點餘值保持不變。如 n 代表繫陰影板於其他部分網之線數，板單位位移使網陰影部分餘力總和減少 n 。選一位移使合力為零，吾人所得餘力自成平衡，而使繼續使用鬆弛法

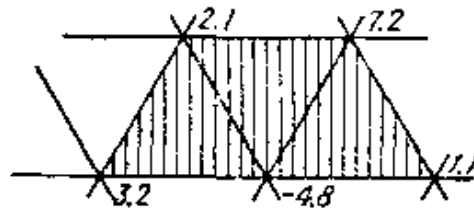


圖 13

較易於清理。在實際應用上更換塊位移與點鬆弛之序列較為有利。例如，設圖13代表三角形網之一部分。繫此部分於網其他部分之線數為16，餘值總和為8.8如圖所示。故此時適宜之塊位移為 $8.8/16 = 0.55$ 。經此位移後，作用於陰影部分網上餘力之總和為零，繼續點上鬆弛餘值之清除將可加速。

除對想像板予以垂直方向位移並對板中各節點為常數外，吾人亦可對板中一軸轉動此板。節點之對應位移及餘值更改可立即算出。故吾人不僅可清除想像板之餘力，亦可清除對板平面任一軸之力矩和。

吾人亦可捨棄想像板之觀念而選擇任意位移予指定之點組。如對網之位移曲面形式有若干觀念，吾人可選組位移以加速清除程序。

第六節 多重連結斷面桿之扭轉

前曾說明（註）桿為多重連結斷面時，應力函數 ϕ 不僅須適應方程式（4），沿每一孔口邊界必需有

$$-\int \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 2G\theta A \quad (30)$$

A 代表孔之面積。

用薄膜類比時，對應之方程式為

$$-S \int \frac{\partial w}{\partial n} ds = qA \quad (31)$$

其意義為平均分布於孔口荷力係由薄膜張力予以均衡。現用有限差分方程並取一正方形網，設 $S\delta$ 為線中拉力， w_0 為孔口邊界位移， w_i 為孔鄰近 i 節點位移。方程式（31）應寫為

$$S\delta \sum \frac{(w_i - w_0)}{\delta} + qA = 0$$

或

$$S \left(\sum_{i=1}^n w_i - n w_0 \right) + qA = 0 \quad (32)$$

n 為繫於孔口及網間線數。平衡方程式（11）僅為（32）式之特例，其中 $n=4$ 。

斷面上有若干孔數即可寫同數之方程式（32）。此等方程式連同正方形網第一節點之（11）式足夠決定所有節點位移及孔口邊界之位

（註）參閱第343頁。

移。

舉一正方形管爲例，其斷面爲圖14所示。取一粗線，並考慮對稱條件，知此時僅須計算五個點值， a ， b ， c ， d ，及 e 。需用之方程式爲 (32) 及對節點 a ， b ， c ， d 所寫之四個 (11) 式。將 q/S 代以 $2G\theta$ ， $n=20$ ， $A=16\delta^2$ ，此等方程式爲：

$$20e - 8b - 8c - 4d = 16(2G\theta\delta^2)$$

$$2b - 4a = -2G\theta\delta^2$$

$$a - 4b + c + e = -2G\theta\delta^2$$

$$b - 4c + d + e = -2G\theta\delta^2$$

$$2c - 4d + e = -2G\theta\delta^2$$

此等方程式可立即解出，其中

$$e = \frac{1,170}{4882} G\theta\delta^2$$

其他 a ， b ， c ， d 亦類似求得。

此等值，係用粗網所得，不能由其獲應力足夠精確值，較細之網將爲必要。較精密計算，用鬆弛法，見索茲威爾書中。

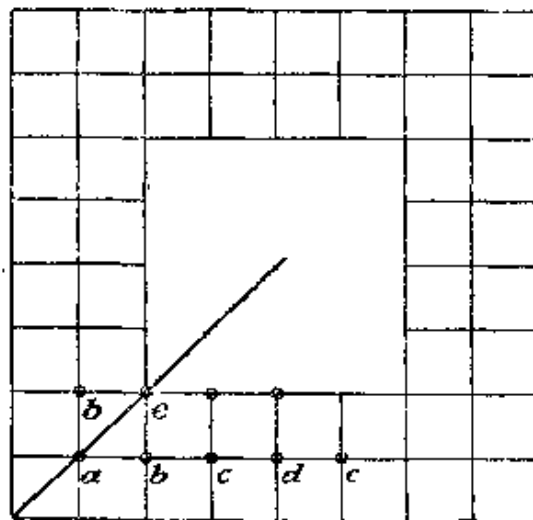


圖 14

第七節 近邊界點

以前各例中網節點恰落於邊界上，對所有各點均用相同之標準鬆弛程序。鄰近邊界各點常由較短線接於邊界上。因線長差異關係平衡方程式 (11) 及 (9) 須作更改。現取圖15討論需要之修正。具半圓形槽溝之平板試樣兩端上受均勻分布拉力。設每點上主應力差均經偏光彈性實驗決定，如第五章所解釋。吾人須另求主應力和，如前已知 (見第27頁) 須適應微分方程式 (6)。對邊界上各點，兩主力之一



圖 15

為已知，用偏光彈性試驗結果，可算出另一主應力，故沿邊界兩主應力和即可決定。因此吾人須解微分方程式 (6)，沿邊界 ϕ 為已知。用有限差分法並取正方形網，由對稱條件知可僅考慮試樣四分之一部分。圖16為此四分之一部分及 ϕ 之邊界值。取圖中 A 點，知該處有三

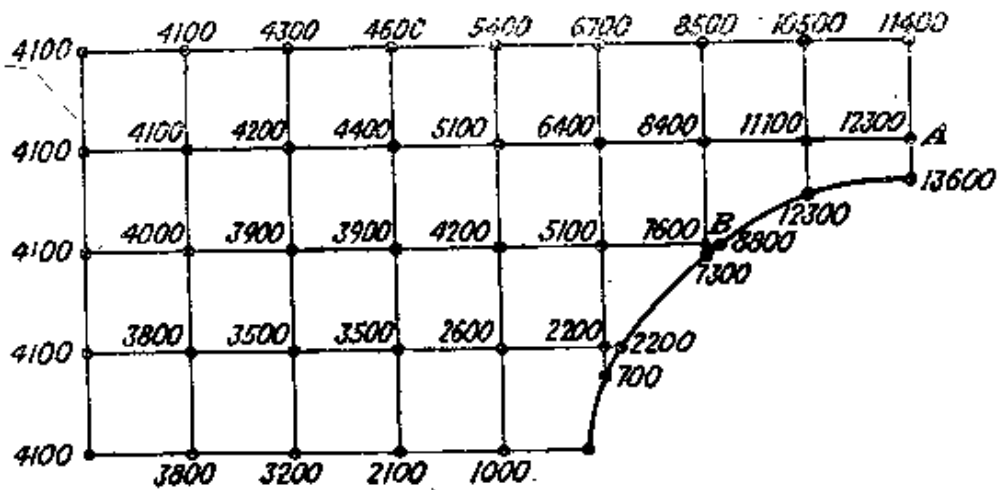


圖 16

線為標長 δ ，另一較短線長 $m\delta$ (此例中 $m \approx 0.4$)。對 A 點導平衡方程式時此點應予考慮。此方程式應如下寫法：

$$S\delta\left(\frac{\phi_a - \phi_1}{\delta} + \frac{\phi_a - \phi_2}{\delta} + \frac{\phi_a - \phi_3}{\delta} + \frac{\phi_a - \phi_4}{m\delta}\right) = 0$$

或
$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \frac{1}{m}\phi_4 - \left(3 + \frac{1}{m}\right)\phi_a = 0$$

使用標準鬆弛法於 A 點並予 ϕ_A 增量一單位，引進之餘值變更見圖 17a。清除 A 點餘值時必需用此型式。考慮 B 點時，知該處有兩較短線。用 $m\delta$ 及 $n\delta$ 代表其長度， B 處餘值之清除則為 17 圖 b 所示之型式。在距邊界近距離處引用此等變更，在其他各點上用標準鬆弛程序，將得圖 16 所示函數 ϕ 值 (註 1)。

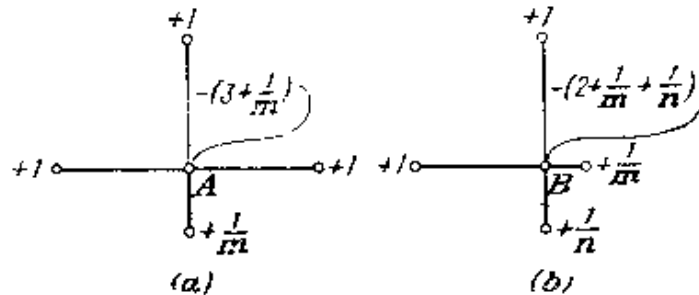


圖 17

在一較普遍例中，須用 (9) 式及各節點有外力作用時，吾人用 $m\delta, n\delta, r\delta, s\delta$ 代表一正方網中不規則點 O 上各線長，並取在 O 點上對應於壓力 q 之荷力為 $1/4q\delta^2(m+n+r+s)$ 。平衡方程式將為 (註 2)

(註 1) 此例中，對 B 用另一近似法，曾由 R. Weller 及 G. H. Shortley 討論，見 *J. Appl. Mech.*, vol. 6, pp. A-71-78, 1939. 所用方程式導法，見 S. H. Crandall, "Engineering Analysis", p. 263, McGraw Hill Book Company, New York, 1956.

此類問題完整數值應力分析，及與較早索茲威爾所得結果比較，見 D.S. Griffin 及 R.S. Varga, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 2, pp. 1047-1062, 1963.

(註 2) 索茲威爾求得等角不等長線節點之方程式 (見第 540 頁註 1)。式 (33) 為 $N=4$ 之特例。

$$\frac{q\delta^2}{4}(m+n+r+s) + S\left[\frac{w_1}{m} + \frac{w_2}{n} + \frac{w_3}{r} + \frac{w_4}{s} - w_0\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)\right] = 0 \quad (33)$$

當 $m=n=r=s=1$ ，此方程式與前對正常點所得方程式 (11) 相符。用 (33) 式，類似圖17之適當型式可以求得。

用此節所討論之更改，鬆弛法可引申於近邊界處有不規則點之例中。

第八節 雙調和方程式

吾人知二維彈性問題中 (見第28頁)，如無體積力及邊界上力為已知時，應力可由一應力函數規定，此函數適應雙調和微分方程式

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (34)$$

及邊界條件 (20)，在此例中為

$$\begin{aligned} l \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2} - m \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y} &= \bar{X} \\ m \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2} - l \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y} &= \bar{Y} \end{aligned} \quad (35)$$

已知分布於邊界之力，吾人可由積分 (35) 式求邊界上 ϕ 值。如此則問題為求 (34) 式適應邊界內每一點之 ϕ 值，而在邊界上，連同其一次導數，具預定值。用有限差分法，設取一正方形網 (圖18)，並將 (34) 式轉換為有限差分方程式。已知二次導數為

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_0 &= \frac{1}{\delta^2}(\phi_1 - 2\phi_0 + \phi_3) \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_1 &= \frac{1}{\delta^2}(\phi_5 - 2\phi_1 + \phi_0) \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_3 &= \frac{1}{\delta^2}(\phi_0 - 2\phi_3 + \phi_4) \end{aligned}$$

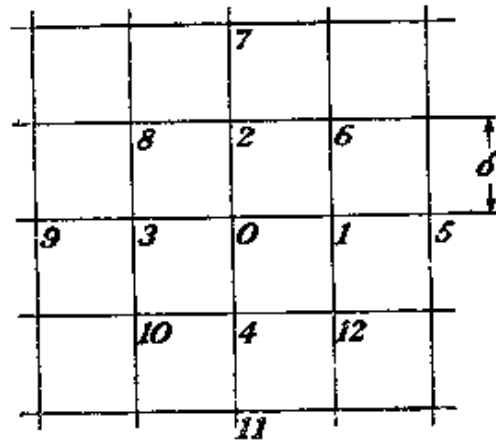


圖 18

由此得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right)_0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{\delta^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_1 - 2\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_3 \right] \\ &= \frac{1}{\delta^4} (6\phi_0 - 4\phi_1 - 4\phi_3 + \phi_5 + \phi_9) \end{aligned}$$

類此另得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} &= \frac{1}{\delta^4} (6\phi_0 - 4\phi_2 - 4\phi_4 + \phi_7 + \phi_{11}) \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{\delta^4} 4[\phi_0 - 2(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \phi_6 + \phi_8 + \phi_{10} + \phi_{12}] \end{aligned}$$

代入 (34) 式中，吾人得所需之有限差分方程式

$$\begin{aligned} 20\phi_0 - 8(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + 2(\phi_5 + \phi_6 + \phi_{10} + \phi_{12}) \\ + \phi_7 + \phi_8 + \phi_9 + \phi_{11} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

在板之邊界內此方程式須在網之每一個節點上均予適應。為求應力函數之邊界值，對 (35) 式積分。由圖 (20) 知

$$l = \cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad m = \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}$$

可將 (35) 式另寫如下：

$$\frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \bar{X}$$

$$-\frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \bar{Y} \quad (37)$$

積分後得

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \int \bar{Y} ds \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \int \bar{X} ds \quad (38)$$

為求 ϕ ，用以下關係

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

部分積分後，得 (註)

$$\phi = x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} - \int \left(x \frac{d}{ds} \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{d}{ds} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) ds \quad (39)$$

將 (37) 及 (38) 式之導數值代入此式，可以計算 ϕ 之邊界值。計算 (38) 式之一次導數時，兩常數 A 及 B 將出現，(39) 式之積分式內將引進另一常數 C ，故 ϕ 之最後形式將含一線性函數 $Ax + By + C$ 。因應力分量係由二次導數所代表。此線性函數將不影響應力分布，故常數 A, B, C 可取任意值。

自 ϕ 之邊界值及其一次導數可計算鄰近邊界網節點之近似值，如圖19中 A, C, E 各點。例如，已知在 B 點上 ϕ_B 及 $(\partial \phi / \partial x)_B$ ，可得

$$\phi_C = \phi_B + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_B \delta \quad \phi_A = \phi_B - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_B \delta$$

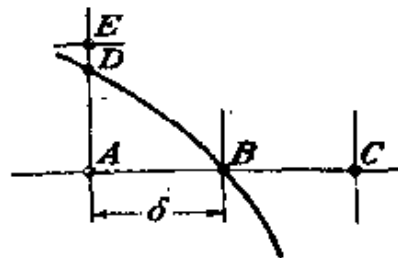


圖 19

對 E 點可寫類似公式。以後對此等值可得較佳之近似值，因繼續

(註) 請見正文第59節公式 (d) 與 (e)。

計算時，代表應力函數 ϕ 之曲面變為接近已知。

已求得鄰近邊界節點近似 ϕ 值，並寫出邊界內其餘各節點 (36) 式之方程式，將得一系統之線性方程足夠計算所有節點上之 ϕ 值。由 ϕ 之第二次差分可用於計算應力之近似值。

方程式 (36) 系統可以直接解出，或用前述方法之一求近似值，各種解法將由圖 20 所示 (註) 之正方形板為例予以說明。

取坐標軸如圖所示，由原點開始計算 ϕ 之邊界值。自 $x=0$ 至 $x=0.4a$ 邊界上無作用力；因此

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

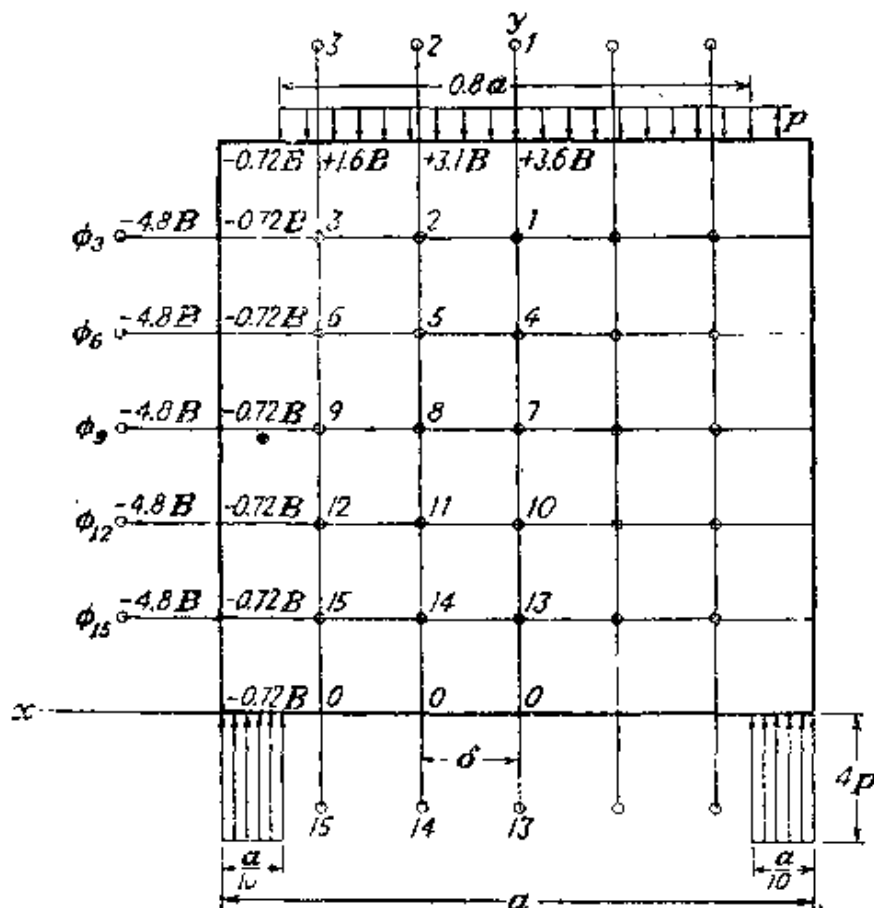


圖 20

(註) 參考 L. Chow, H. D. 及 Conway G. Winter, *Proc. Am. Soc. Civil Eng.*, vol. 78, 1952.

積分後得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = A \quad \phi = Ax + B \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = C$$

此處為沿 x 軸常數，由前所云知可任意選擇其值。吾人設 $A = B = C = 0$ 。如此則沿板底邊無外力處為零，並保證對 y 軸 ϕ 之對稱。由 $x = 0.4a$ 至 $x = 0.5a$ ，有均勻分布力 $4p$ 作用，方程式 (38) 為

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= - \int 4p dx = -4px + C_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

第二次積結果為

$$\phi = -2px^2 + C_1x + C_2$$

積分常數可由邊界兩部分共點 $x = 0.4a$ 處， ϕ 及 $\partial\phi/\partial x$ 必需同值之條件算出。因此

$$(-4px + C_1)_{x=0.4a} = 0 \quad (-2px^2 + C_1x + C_2)_{x=0.4a} = 0$$

故得

$$C_1 = 1.6pa \quad C_2 = -0.32pa^2$$

應力函數 ϕ ，自 $x = 0.4a$ 至 $x = 0.5a$ 處，將由下式代表

$$\phi = -2px^2 + 1.6pax - 0.32pa^2 \quad (\text{a})$$

在板之轉角處應力函數為

$$(\phi)_{x=0.5a} = -0.02pa^2 \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x=0.5a} = -0.4pa \quad (\text{b})$$

沿板之豎邊無外力作用，由 (38) 式知沿此邊 $\partial\phi/\partial x$ 及 $\partial\phi/\partial y$ 值必須與其在下部轉角處值同，亦即

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -0.4pa \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

由此可知沿板豎邊 ϕ 保接為常數值。此常數須等於 $-0.02pa^2$ ，如對

底角處所算。

沿板頂邊未荷力部分 ϕ 之一次導數爲常數其值與上部轉角處 (c) 值同，因此應力函數 ϕ 爲

$$\phi = -0.4pax + C$$

因在上部左方轉角處 ϕ 須爲前所算值 $-0.02pa^2$ ，故 $C = 0.18pa^2$ ，而應力函數爲

$$\phi = -0.4pax + 0.18pa^2 \quad (d)$$

現取頂邊之受力部分，知沿此邊 $ds = -dx$ ， $\bar{Y} = -p$ ， $\bar{X} = 0$ ，由(38)式得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -px + C_1 \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = C_2$$

對 $x = 0.4a$ ，此等值須與 (c) 式值相符。因此 $C_1 = C_2 = 0$ ，而應力函數應爲

$$\phi = -\frac{px^2}{2} + C$$

對 $x = 0.4a$ 時，其值必須與 (d) 式所得者相等。故 $C = 0.1pa^2$ 及

$$\phi = -\frac{px^2}{2} + 0.1pa^2 \quad (e)$$

此應力函數爲一對 y 軸對稱之拋物線。此完成對 ϕ 邊界值及其一次導數之計算，因右首邊界上此等值均可由對稱條件求得。

用符號

$$\frac{pa^2}{36} = B$$

吾人可寫出所有算出之邊界值 ϕ 如圖20所示。

其次，由外括法，吾人計算取自邊界外節點上 ϕ 之值。仍由板之底邊開始並知 $\partial\phi/\partial y$ 沿此邊爲零，鄰近邊界處，外點 ϕ_{13} ， ϕ_{14} ， ϕ_{15} 可取與內點同值，沿板頂採類似步驟。沿板之豎邊斜率爲

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x=0.5a} = -0.4pa$$

故外點近似值可由鄰近邊界點減去

$$0.4pa(2\delta) = \frac{0.4pa^2}{3} = 4.8B$$

求得，如圖20所示。

現可開始計算網內節點之 ϕ 值。用差分方程式直接解法，在此對稱例中須對15個點寫出 (36) 式。此等方程式所解出之 ϕ 值見下表：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ϕ/B	3.356	2.885	1.482	2.906	2.512	1.311	2.306	2.024	1.097	1.531	1.381	0.800	0.634	0.608	0.396

現計算沿 y 軸正交應力 σ_x 。此應力值得自二次階數 $\partial^2 \phi / \partial y^2$ 。用差分方程式，在頂點上得 ($y=a$)

$$(\sigma_x)_{y=a} \approx \frac{[3.356 - (2)3.600 + 3.356]B}{\delta^2} = -\frac{0.488pa^2}{36\delta^2} = -0.488p$$

在底點上 ($y=0$) 為

$$(\sigma_x)_{y=0} = \frac{(0.634 - 0 + 0.634)B}{\delta^2} = 1.268p$$

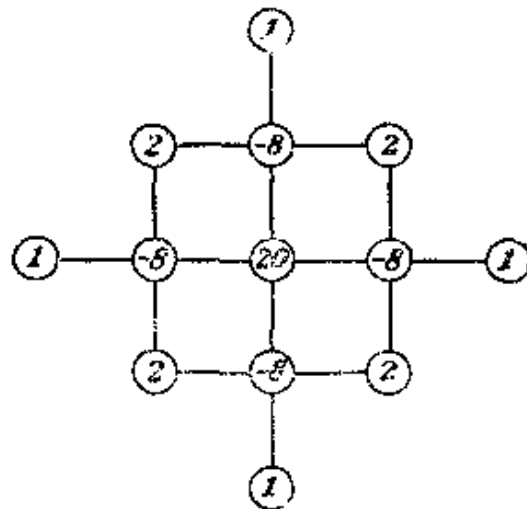


圖 21

如視板爲一梁支承於兩點上並設中斷面 ($x=0$) 中爲線性分布之 σ_x ，則 $(\sigma_x)_{\max} = 0.60p$ 。因此如此尺度之板通用之梁公式極不適用。

用重複法解有限差分方程式 (36)，先設應力函數 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{15}$ 之起始值。代於 (36) 式後，得所有各內節點上之餘值，然後以鬆弛法清除之。通常作業型式，由 (36) 式，示於圖 21 中，內因 ϕ_0 單位變更所得之餘值變更均算出。用此法於上述正方板時，須知沿邊界上 ϕ 值已受邊界條件之拘束，亦即邊界上餘值力不需清除。

吾人可再進至較細之網，用粗網所得結果爲 ϕ 之起始值。

對非對稱荷力如圖 22a 所示情況中，可將荷力分開爲圖 22b 及 22c 之對稱及反對稱荷力。在後兩種情況中，吾人均可取板之一半，因對稱時 $\phi(x, y) = \phi(-x, y)$ 而反對稱時 $\phi(x, y) = -\phi(-x, y)$ 。

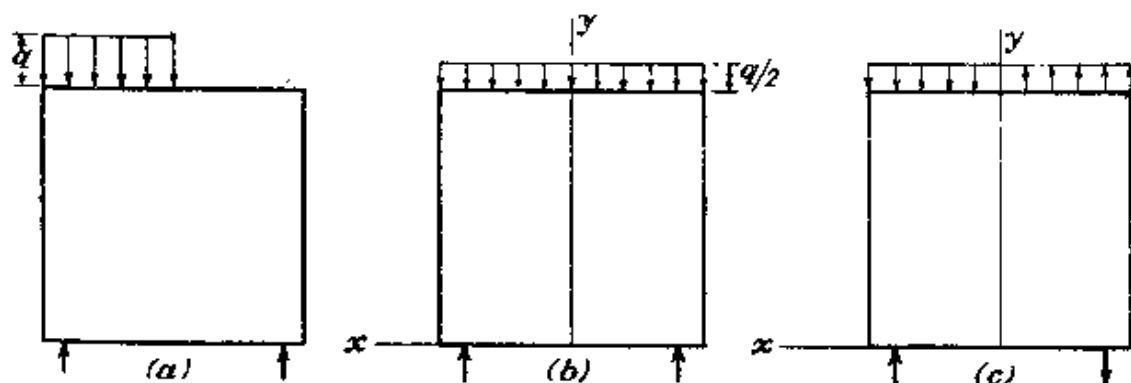


圖 22

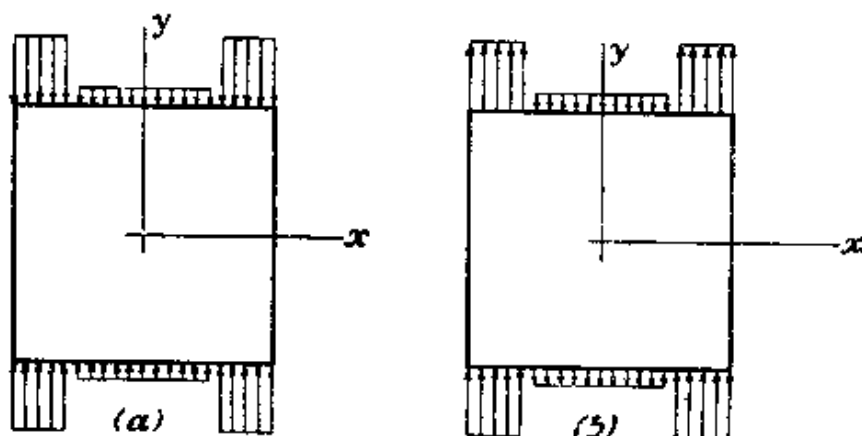


圖 23

考慮矩形板對水平軸之對稱可再簡化計算工作。圖20所示荷力可分解為對稱及反對稱如圖23所示。每一此等情況時，計算應力函數數值僅取板四分之一即可。

第九節 直徑變化圓軸之扭轉

此種例中，吾人已知（見第 355 頁）問題為求一應力函數之微分方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (40)$$

於軸之斷面上，圖24，而在斷面邊界上為常數，僅在少數簡單例中可得嚴整解，在實際情況中通常須用近似解法。

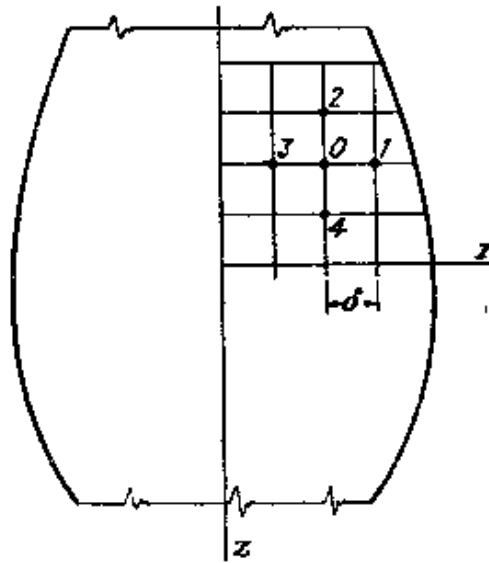


圖 24

用有限差分法，設取一正方形網。取節點 O ，圖24，(40) 式內二次導數如前所得。對一次導數可取

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=r_0} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta} + \frac{\phi_0 - \phi_3}{\delta} \right) = \frac{\phi_1 - \phi_3}{2\delta}$$

如此 (40) 式之有限差分方程式為

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 - \frac{3\delta}{2r_0} (\phi_1 - \phi_3) = 0 \quad (41)$$

問題為求 ϕ 之一集值，使網內每一節點上均可適應 (41) 式，而在邊界上 ϕ 為已定之常數值。直接解 (41) 式或用重複法均可得問題解。

舉一例，取圖25所示之例，在直徑突變之區域內將有複雜之應力集中，但在距填角足夠遠處，簡單之庫倫解即夠精確，而應力分布將與 z 無關。方程式 (40) 此時變為

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (42)$$

其普遍解為

$$\phi = Ar^4 + B \quad (43)$$

對應之應力分量為 (見第 357 頁)

$$\tau_{z\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{d\phi}{dr} = 4Ar \quad \tau_{r\theta} = 0$$

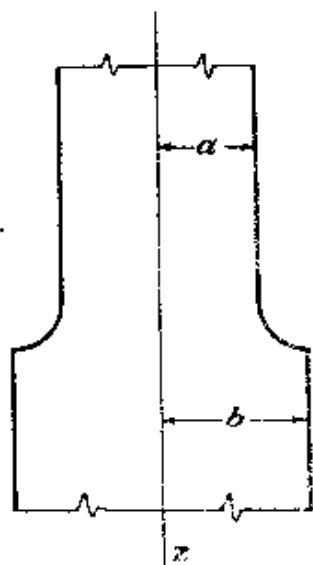


圖 25

將此結果與庫倫解比較，得

$$4A = \frac{M_t}{I_p}$$

M_t 為轉矩， I_p 為軸斷面之極慣性矩。不計 (43) 式常數 B ，因與應力分布無關，吾人得對填角足夠距離處應力函數

$$\phi_a = \frac{M_t}{2\pi a^2} r^4 \quad \phi_b = \frac{M_t}{2\pi b^2} r^4 \quad (44)$$

沿軸中線上此等值爲零而在邊界上爲一共同常數 $M_t/2\pi$ 。此值亦可用於填角處。因此，解 (41) 式時選擇邊界值常數相當於設一固定轉矩值。

解 (41) 式時，仍可應用薄膜類比。吾人由可用 (42) 式各點開始。對應之有限差分方程式爲

$$\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_0 - \frac{3\delta}{2r_0} (\phi_1 - \phi_3) = 0 \quad (45)$$

此方程式與受拉力對 r^3 成反比柱體薄膜撓度方程式相同。爲證此設取網中三鄰接點，如圖26所示。對應位移由 w_3, w_0, w_1 代表之。

線3O及O1中點之拉力將爲

$$\frac{S\delta}{(r_0 - \delta/2)^3} \approx \frac{S\delta}{r_0^3} \left(1 + \frac{3\delta}{2r_0}\right)$$

及

$$\frac{S\delta}{(r_0 + \delta/2)^3} \approx \frac{S\delta}{r_0^3} \left(1 - \frac{3\delta}{2r_0}\right)$$

點O上之平衡方程式爲

$$\frac{S\delta}{r_0^3} \left(1 - \frac{3\delta}{2r_0}\right) \frac{w_1 - w_0}{\delta} + \frac{S\delta}{r_0^3} \left(1 + \frac{3\delta}{2r_0}\right) \frac{w_3 - w_0}{\delta} = 0$$

或

$$w_1 - 2w_0 + w_3 - \frac{3\delta}{2r_0} (w_1 - w_3) = 0$$

此與 (45) 式相同。

類此，在一般情況下，因薄膜拉力與 z 向無關，可得下列方程式

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 4w_0 - \frac{3\delta}{2r_0} (w_1 - w_3) = 0 \quad (46)$$

與 (41) 式相符。故吾人可計算薄膜位移之應力函數，薄膜受非均勻拉力在邊界上有常數位移 $M_t/2\pi$ ，及在遠距填角處 (44) 式之位移。設節點上 w 之起始值，代於 (46) 式左方，並計算其餘值。現問題爲

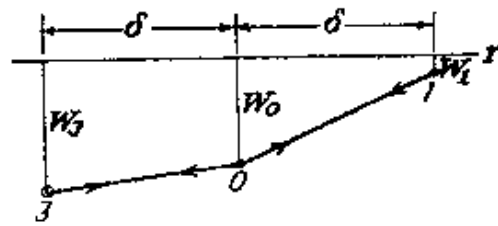


圖 26

用鬆弛法清除所有餘值。由圖26知予 O 點一單位位移將加於1及3兩點餘值

$$\frac{S}{r_0^3} \left(1 - \frac{3\delta}{2r_0}\right) \quad \text{及} \quad \frac{S}{r_0^3} \left(1 + \frac{3\delta}{2r_0}\right)$$

此示鬆弛過程係如圖27。此種計算見索茲威爾及亞倫著述中 (註1)。

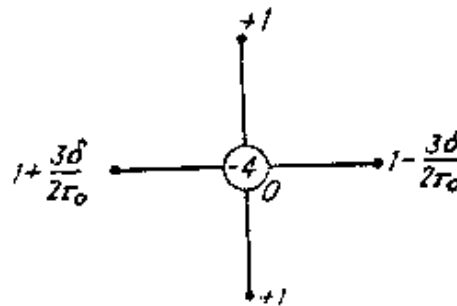


圖 27

第一〇節 數位電子計算機解 (註2)

平面及軸對稱問題中，如邊界形式及荷力條件較吾人所舉例更為繁複時，有限差分方程式數目將過多而不適於人工計算。如此則宜用

(註1) *Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, vol. 183, pp. 125-134. 另閱 Southwell, *op. cit.*, p. 152.

(註2) 此節係根據 D. S. Griffin 及 R. B. Kellogg 論文 A Numerical Solution for Axially Symmetrical and Plane Elasticity Problems, *Intern. J. Solids Struc.*, vol. 3, pp. 781-794, 1967, 圖 28及29係此論文准許轉載。非線性彈性問題計算機程序見 B. Alder, S. Gernbach, and M. Rötenberg (eds.), "Methods in Computational Physics," Academic Press Inc., New York, 1964, 特別第三卷中 M. L. Wilkins, "Calculation of Elastic-Plastic Flow." 另閱第 576 頁註 1。

一數位計算機計劃求解。

計劃須依對此等系統方程式求解之某一基本方法進行。鬆弛法不直接適用於自動計算。高斯消除法或克拉瑪可以應用，但方程式數目仍受限制。重複法(註1)卻可有效解數千未知數，如方程式矩陣係數具適當性質。此項需要使針對位移較針對應力函數更為適宜。

一具 525 個內部及邊界上節點非均勻網結果示於圖28中。問題為求圓柱體受內部壓力之應力，堆角經一填角改變如圖29所示。在此軸對稱問題中每點上有兩個位移分量，共約求1,050個未知數。填角處表面上應力如曲線所示。圓圈與小正方為偏光彈性結果以作比較(註2)。

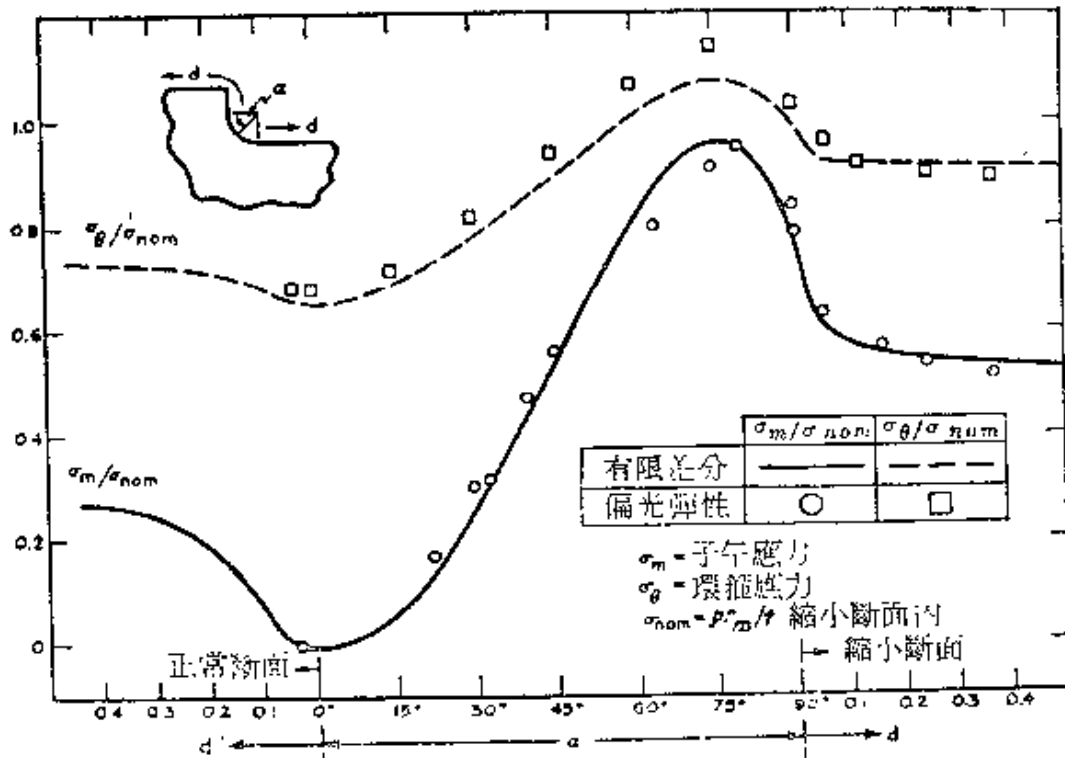


圖 28

(註1) 參閱(1) G. E. Forsythe 及 W. R. Wasow 著 "Finite Difference Equations for Partial Differential Equations." John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960; (2) R. S. Varga, "Matrix Iterative Analysis," Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1962.

(註2) 為 M. M. Leven 所用。

由計算機求解之有限差分方程式可經不同方式導得。本附錄第一節中例釋聯體偏微分方程式之數學轉換。另可用變分法，例如，圖29所示問題位能可用節點位移和代表之，然後予以最小化。第3節例示由聯體(薄膜)至均勻緊拉線網之物理轉換。有限差分方程式可視為網中有限單元之物理方程式，類似方法用於結構學有限單元法中(註)。

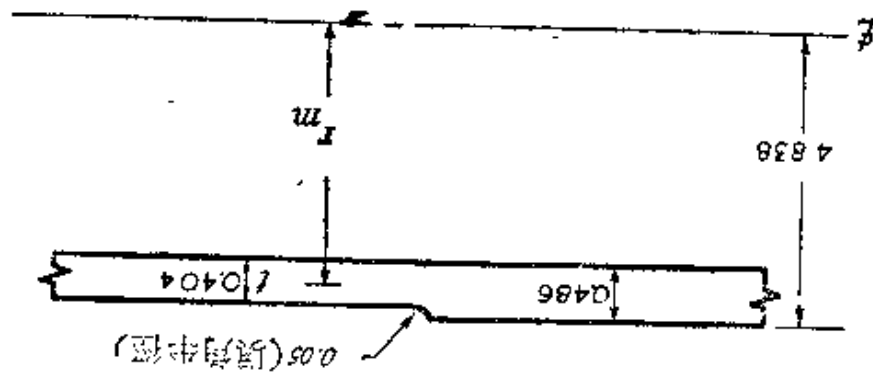


圖 29

(註) 例如，(1) R. W. Clough, *The Finite Element Method in Strucral Mechanics*, O. C. Zienkiewicz & G. S. Hollister, "Stress Analysis", John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. 85-119, 1965; (2) J. H. Argyris, *J. Roy. Aeron. Soc.*, vols. 69, 70, 1965, 1966.

人名索引

- Abrahamson, G. R. 阿拜漢孫... 56
 Abramson, H. N. 阿拜姆孫... 170
 Airy, G. B. 阿瑞
 Alder, B. 阿耳戴 ... 574
 Allen, D. N. de G. 阿林
 Almansi, E. 阿耳曼西 ... 500
 Alwar, R. S. 阿耳瓦 ... 62
 Ancker, C. J. 安克... 452
 Anderson E. W. 安德孫 ... 328
 Anthes, H. 安哲絲... 315
 Argyris, J. H. 阿哥瑞 ... 278
 Arndt, W. 阿林得 ... 361

 Babinet, J. 巴比耐 ... 519
 Barenblatt, G. I. 巴崙勃拉 ... 264
 Barjansky, A. 巴占司基 ... 209
 Barker, L. H. 巴克 ... 470
 Barton, M. V. 巴頓 ... 258
 Bassali, W. A. 巴薩利 ... 328
 Basu, N. M. 巴祖 ... 331
 Bay, H. 佰義 ... 56
 Beadle, C. W. 佰得耳 ... 339
 Becker, E. C. H. 佰克 ... 529
 Belajef, N. M. 佰拉傑夫 ... 435
 Benthem, J. P. 賓再姆 ... 149
 Berndt, G. 拜倫特 ... 432
 Bertholf, L. D. 拜造夫... 517
 Beschkine, L. 拜欣金 ... 273
 Betser, A. A. 拜特斯 ... 119
 Betti, E. 拜蒂 ... 282
 Beyer, K. 拜耶 ... 60
 Bickley, W. G. 拜克萊... 98
 Bidwell, J. B. 比得威耳 ... 438
 Biezeno, C. G. 比郎諾 ... 338
 Billevicz, V. 拜里維茲 ... 75
 Biot, M. A. 拜奧 ... 496
 Bisshopp, K. E. 比夏普 ... 84
 Bleich, F. 布里希 ... 55
 Borchardt, C. W. 包哈特... 474
 Born, J. S. 包恩 ... 61
 Boussinesq, J. 包新尼斯克 ... 250
 Bredt, R. 布萊特... 346
 Brewster, D. 布魯司特... 168
 Byerly, 拜耳利 ... 54

 Calisev, K. A. 克里西夫 ... 549
 Carothers, S. D. 卡魯茲 ... 111
 Carslaw, H. S. 卡斯魯 ... 323
 Carter, W. J. 卡特... 380
 Cauchy, A. L. 庫希 ... 174

- Cheng, D. H. 陳, D. H.501
- Chow, L. 周, L.566
- Chree, C. 克里, C.406
- Churchill R. V. 邱吉爾214
- Chawalla, E. 查瓦拉273
- Clapeyron, B. P. E. 克拉派 ...356
- Clebsch, A. 克萊希285
- Close L. J. 克羅西431
- Clough R. W. 克勞576
- Coker E. G. 卡克200
- Conway H. D. 康威339
- Cornu, M. A. 康農299
- Cottrell, A. H. 卡特瑞259
- Coulomb, C. A. 庫倫302
- Courant, R. 庫郎540
- Cox, H. L. 庫克司278
- Craemer, H. 克拉梅60
- Craggs, J. W. 克萊格448
- Crandall S. H. 克蘭道562
- Cross Hardy 克勞司, 哈代549
- Crowley, J. M. 克勞萊170
- Cushman, P. A. 克希曼338
- Dale, R. 特爾50
- Davidenkoff, N. 特維頓珂夫 ...491
- Davids, N. 特維茲141
- Davies, R. M. 特維絲517
- Den Hartog J. P. 頓哈道166
- Deresiewicz, H. 戴瑞絲威茲 ...499
- Dinnik, M. 丁尼克325
- Donath, L. H. 頓那茲84
- Dougall, J. 道格爾395
- Drucker, D. C. 卓克爾167
- Duhamel, J. M. C. 都哈勛464
- Duncan, W. J. 鄧肯333
- Durelli, A. J. 都利170
- Edward, R. H. 愛得華501
- Eichelberg, G. 伊豈拜格458
- Eubanks, R. H. 尤班克416
- Fadle, J. 費得爾61
- Farnham K. A. 法倫漢445
- Fillunger, P. 費隆格146
- Filon, L. N. 費郎56
- Fischer, A. 費希爾84
- Flamant, A. L. 佛拉曼527
- Flügge, W. 佛魯格355
- Föppl, A. 費泊爾, A.231
- Föppl, L. 費泊爾, L.231
- Forsythe, G. E. 佛塞575
- Freiberger, W. 佛瑞柏格450
- Frocht, M. M. 佛勞希143
- Fuchs, S. 佛哈司431

- Garlerkin, B. 格榮金.....250 | Hengst, H. 亨司特..... 98
 Galin, L. A. 格林.....427 | Hertz, H. 海茲.....427
 Gatewood, B. E. 格特烏.....507 | Hetényi, M. 海汀伊.....156
 Gernbach, S. 格倫巴.....574 | Heywood, R. B. 赫吳得.....165
 Gilmann, J. J. 吉爾曼.....262 | Hieke, M. 海克.....483
 Girkman, K. 克可曼.....121 | Higgins, J. J. 海金絲.....328
 Göhner, O. 古那.....452 | Hildbrand, F. B. 希爾得伯蘭...399
 Goldberg, M. A. 勾得伯.....406 | Hill, R. 希爾.....256
 Golovin, H. 高勞文..... 74 | Hodge, P. G. 赫奇.....427
 Goodier, J. N. 古帝.....257 | Hoersch, V. A. 郝希.....435
 Coursat, E. 高薩.....178 | Holl, C. L. 郝爾.....328
 Grashof, F. 格拉司赫夫..... 47 | Hollister, G. S. 郝李司特.....576
 Green, A. E. 格林.....200 | Hondo, M. 本德.....341
 Greenhill, A. G. 格林希.....325 | Honegger, E. 亨乃格.....476
 Greenspan M. 格林司班.....209 | Hopkins, J. 赫甫金.....474
 Griffin, D. S. 格利芬.....574 | Horvay, G. 郝爾威.....352
 Griffith, A. A. 格利弗.....201 | Hosakawa, Y. 細川.....143
 Grüber, M. 格魯伯..... 84 | Howland, R. C. J. 賀蘭..... 97
 Grunberg, G. 格倫伯.....476 | Hsu, M. C. 許, M. C. 98
 Guernsey, R. Jr. 格倫賽.....105 | Huber M. C. 修伯爾.....256
 Gunder, D. F. 干得爾.....384 | Huth, J. H. 胡茲.....337

 Hadji-Argyris, J. 海傑阿瑞司...278 | Ignaczak, J. 伊那茲克.....502
 Hamburger, M. 漢堡格.....440 | Inglis, C. E. 英格立可.....193
 Hencky, H. 漢克.....540 | Isida, M. 伊西達..... 98
 Hendry, A. W. 亨道.....119 | Iyengar, K. T. S. 英格爾..... 62

- Jacobsen, L. S. 傑寇孫 362
- Jaeger, J. C. 傑哥爾 458
- Jahsman, W. E. 佳絲曼 439
- Jeffery, G. B. 傑弗雷 96
- Johnston, B. G. 強絲登 337
- Juhasz, S. 屈赫茲 170
- Juvinall, R. C. 屈文那 435
- Kappus, R. 卡甫絲 390
- Kármán, R. von 卡門 120
- Kellogg, R. B. 凱洛格 574
- Kelvin, Lord, 克爾文 250
- Kent, C. H. 肯特 473
- Kikukawa 菊川 210
- Kirchhoff, G. 凱爾克夫 281
- Kirsch, G. 凱爾希 93
- Klichieff, J. M. 凱立契夫 395
- Koiter, W. T. 庫愛特 149
- Kolosoff, G. 庫羅索夫 182
- Kolsky, H. 庫爾絲克 516
- Korobov, A. 庫羅勃夫 404
- Ku, Ta-cheng 顧大成 83
- Kurshin, L. M. 庫爾新 136
- Lamb, H. 藍姆 120
- Lamé, G. 藍梅 187
- Landsberg, D. 藍司勃 105
- Larmor J. 拉瑪 340
- Laue, M. V. 勞 491
- Lebedev, N. N. 萊比帝夫 506
- Lees, C. H. 李斯 467
- Leibenson, L. S. 萊賓孫 333
- Lessells, J. M. 李賽爾絲 473
- Leven, M. M. 李文 168
- Levy, M. 李維 M. 49
- Liebman, H. 李勃曼 540
- Ling, C. B. 林治平 328
- Lipson, C. 李普孫 435
- Little, R. W. 李特爾 61
- Lode, W. 羅特 257
- Löffler, K. 勞弗李爾 80
- Lorenz, R. 勞倫司 469
- Loutzenheiser, C. B. 勞秦海翁 445
- Love, A. E. H. 羅夫 135
- Lundberg, G. 郎特勃 435
- Lyse, I. 萊西 337
- MacMillan, W. D. 麥克米倫 500
- McPherson, A. E. 馬弗爾孫 95
- Maisel, W. M. 米賽爾 483
- March, H. W. 瑪希 335
- Marcus, H. 瑪庫司 540
- Marguerre, K. 瑪玖黎 396

- Martin, H. M. 瑪丁 84
 Marthar, J. 瑪薩 143
 Mathieu, E. 瑪秋 60
 Maunsell, E. 瑪恩賽爾 104
 Maxwell, J. C. 馬克司威爾 155
 Meinesz, V. 閔尼茲 390
 Melan, E. 米蘭 136
 Mesmer, G. 米可邁 56
 Mesnager, A., 麥納哥 166
 Michell, J. H., 米其爾 130
 Miklowitz, J., 米克勞維茲 517
 Mindlin, R. D., 明德林 96
 Mirabel, J. A., 米勞拜耳 352
 Mises, R. von, 馮·米西司 256
 Miura, A., 三浦 115
 Mohr, O., 馬耳 231
 Morkovin, V., 馬寇文 269
 Morton, W. B., 馬耳頓 431
 Moynihan, J. R., 馬尼漢 352
 Muller, I., 繆萊 49
 Murphy, G., 莫非 23
 Muskhelishvili, N. I. 莫可希
 坦維里 178
 Myklestad, N. O., 邁可萊司特 501
 Nádai, A., 那地 318
 Naghdi, P. M., 那哥地 251
 Navier, C. L. M. H., 耐威 245
 Neményi, P., 尼麥伊 281
 Neuber, H., 牛佰 203
 Neumann, F. E., 諾日曼 474
 Nevill, G. E., 尼威耳 486
 Nishimura, G., 西村 99
 Nisida, M., 西口 341
 Nowacki, W., 諾瓦奇 483
 O'Donnell, W. J., 歐當耐 43
 Odqvist, K. G., 歐奎威司 435
 Okubo, H., 大久保 445
 Osgood, W. F., 奧司古 W.F. ... 54
 Osgood, W. R., 奧司古 W.R. ... 48
 Papcovitch, P. F., 派浦克威奇 250
 Paschoud, M., 柏紹特 339
 Pearson, C. E. 皮耳孫 C. E. ... 253
 Pearson, K., 皮耳孫 K. 250
 Peterson, R. E. 皮特孫 165
 Petrenko, S. N. 皮岑克 434
 Pickett, G., 皮克特 271
 Pigeaud, M., 皮高 56
 Pochhammer, L., 甫西哈麥 395
 Poisson, S. D., 柏松 524
 Pollard, C., 浦拉特 493
 Pólya, G., 浦雅 327
 Poritsky, H., 浦瑞司克 359
 Pöschl, T., 浦西耳 193

- | | | | |
|----------------------------------|-----|--------------------------------|-----|
| Prandtl, L., 浦藍特 | 306 | Schnadel, G., 史耐特 | 273 |
| Prowse, W. A., 浦西 | 530 | Shulz, K. J. 舒爾茲 | 98 |
| Purser, F., 滌爾西 | 352 | Scruton, D. 司庫頓 | 390 |
| Quest, H., 奎可特 | 338 | Sears, J. E. 西爾司 | 440 |
| Rademaker, J. M., 雷特麥克 | 338 | Seegar, M. 西格爾 | 385 |
| Radok, J. R. M., 雷達克 | 200 | Seewald, F. 西瓦特 | 121 |
| Rankin, A. W., 蘭琴 A. W. ... | 47 | Sen, B. 孫 B. | 209 |
| Rayleigh, Lord, 瑞萊, 功爵 | 282 | Seth, B. R. 賽茲 | 384 |
| Redheffer, R. M., 萊特海弗 | 265 | Sezawa, K. 世澤 | 99 |
| Reissner, E., 瑞可那 E. | 146 | Shaw, W. S. 蕭 W. S. | 304 |
| Reissner, H., 瑞司那 H. | 143 | Shepherd, W. M. 謝彼特 | 384 |
| Résal, H., 瑞薩 | 75 | Shortley, G. H. 蕭特萊 | 562 |
| Ribière, C., 瑞白瑞 | 55 | Smith, F. C. 史密司 | 95 |
| Richardson, L. F., 瑞卡孫 | 540 | Sneddon, I. N. 史耐頓 | 444 |
| Ripperger E. A., 瑞派格 | 141 | Snively, H. D. 史尼威萊 | 105 |
| Ritz, W., 瑞茲 | 269 | Sokolnikoff, I. S. 索克羅可夫 | 245 |
| Rock, D. H., 洛克 | 384 | Sonntag, G. 桑塔格 | 149 |
| Rongved, L., 郎格威 | 416 | Soroka, W. W. 索勞克 | 338 |
| Rötenberg, M. 郎發拜 | 574 | Southwell, R. V. 索茲威爾 | 390 |
| Runge, C., 郎奇 | 361 | Stecher, M. 司太奇爾 | 170 |
| Saad, C., 沙特 | 119 | Sternberg, E. 斯坦伯 | 149 |
| Sadowsky, M., 索道斯基 | 406 | Stevenson, A. C. 史提文生 | 193 |
| Saint-Venant, Barréde, 聖維南 | 327 | Stodola, A. 史塔都拉 | 468 |
| Savin, G. N., 薩汶 | 200 | Stokes, G. G. 史塔克 | 117 |
| Schleicher, F., 史萊徹 | 256 | Straubel, R. 史楚拜爾 | 299 |
| | | Strauch, F. 史楚奇 | 143 |
| | | Symonds, P. S. 賽蒙茲 | 200 |

- Tagami, S. 田上 98
 Tait, P. G. 塔特 339
 Takemura, K. 竹村 143
 Tanimura 泰尼穆勒 352
 Taylor 泰勒 259
 Teodorescu, P. P. 泰邵萊司庫 200
 Terazawa, K. 寺澤 423
 Theocaris, P. 西奧克瑞司 170
 Thibodeau, W. E. 西拔都 99
 Thomas, G. B. 托馬司 G. B. ... 381
 Thomson W. T. 湯姆生 527
 Timoshenko, S. 提摩盛科 141
 Tinpe A. 提派 137
 Todhunter, I. 陶得亨特 250
 Tranter, C. J. 特倫特 445
 Trayer, C. W. 特耶爾 335
 Trefftz, E., 楚弗茲 318
 Tuzi, Z. 杜齊 97

 Varga, R. S. 吳爾格 562
 Vlatsev, V. Z. 弗拉索夫 258
 Volterra, V. 弗爾泰瑞 281

 Wagstaff, J. E. P. 威格司托夫 530
 Wah, Thein 瓦, 濟 273
 Wahl, A. M. 瓦爾 452
 Wallace, C. E. 瓦勒司 506
 Waner, N. S. 瓦那 338
 Wang, C. K. 王 C. K. 98
 Wasow, W. R. 瓦索 575
 Way, S. 威 S. 423
 Weber, C. 威伯 210
 Weibel, E. E. 威伯爾 162
 Weigand, A. 魏淦 334
 Weinel, E. 魏耐 209
 Weller, R. 威勒 562
 Wennagel, J. 溫那格爾 359
 Westergaard, H. M. 威可特哥特 231
 Whittemore, H. L. 惠特茂 434
 Wiegardt, K. 威哈特 141
 Wigglesworth, L. A. 威格爾
 吳茲 384
 Wilhoit, J. C. Jr. 威爾荷特 138
 Wilkins, M. L. 威爾金絲 574
 Willers, F. A. 威萊爾司 361
 Wilson, C. 威爾遜 117
 Winkler, E. 溫克爾 452
 Winter, G. 溫特爾 566
 Wolf, F. 吳爾夫 F. 540
 Wolf, K. 吳爾夫 K. 200
 Wood, L. A. 吳特 99

584 彈性力學理論 (全一册)

Wylie, C. R. 威利.....106	Young, Thomas, 楊, 托馬司 ...520
Yau, W. F. 姚 W. F.445	Zerna, W. 左那
Young D. H. 楊 D. H.....267	Zienkiewicz, O. C. 晉克威茲 ...576

論題索引

- Additional curvature of beams, 梁之附加曲率
- Additional deflection due to shearing force, 剪力造成附加撓度
- Analytic functions, 解析函數
- Analyzer, 分析器
- Angle of twist per unit length, 單位長扭角
- Anisotropy, 非同向性
- Annealing, removal of stresses by, 淬火, 消除應力
- Axisymmetric strain, 軸對稱應變
- Anticlastic surface, 反向曲面
- Axisymmetric strain, 軸向對稱應變
- Axisymmetric, torsionless, 軸向對稱, 無扭轉
- Beams: 梁:
- bending of, 撓曲
 - concentrated force acting on, 受集中力作用力
 - continuously distribute load on, 受連續分布荷力
 - curvature of, 曲率
 - deflection of, 撓度
 - distortion of cross sections of, 斷面形變
 - shearing stress in (*see* Shearing stress in beams) 剪應力
(閱梁內剪應力)
- Bending: 撓曲:
- of beams, 梁
 - of circular plate, 圓板
 - of curved bar, 曲桿

586 彈性力學理論 (全一冊)

of ring section, 環

pure (see Pure bending), 純 (閱純撓曲)

Bending of beams: 梁之撓曲:

cantilever, of any section, 懸臂梁, 任何斷面

of narrow rectangular cross section: 窄矩形斷面

by concentrated force, 集中力

by distributed load, 分布力

by own weight, 自身重

by terminal load, 一端荷力

by uniform load, 均勻荷力

of particular forms of cross section: 特重斷面

circular, 圓形

elliptic, 橢圓形

other forms, 其他形式

rectangular, 矩形

triangular 三角形

semi-inverse method in, 半逆轉法

solution by soap-film analogy, 皂膜類比解

Body forces, 體力

Boundary conditions: 邊界條件

in terms of displacements, 位移表示

in three-dimensional problems, 三維問題中

in torsion, 扭轉中

in two-dimensional problems, 二維問題中

Buckling, 側撓

Cantilever: 懸臂梁

deflection of, 撓度

distortion of cross section of, 斷面形變

of particular forms of cross section: 特種斷面

circular, 圓形

elliptic, 橢圓形

other forms, 其他形式

rectangular, 矩形

stresses in, 應力

Castigliano's theorem, 克司蒂哥里奴

Cauchy principal value, 庫希主值

Cauchy-Reimann equations, 庫希—黎曼方程式

Cavity: 洞孔

ellipsoidal, 橢球體

spherical, 球體

Center: 中心:

of compression, 壓力

of flexure, 撓曲

of shear, 剪刀

of twist, 扭轉

Central line, extension of, 中線, 伸長

Circular cylinder: 圓柱:

bending of, 撓曲

strained symmetrically, 軸對稱應變

Circular disk: 圓盤:

under forces in its plane, 受盤面力作用

rotating, 旋轉

thermal stresses in, 熱應力

Circular hole: 圓孔:

effect on stresses in plates, 平板應力影響

in rotating disk, 旋轉盤

588 彈性力學理論 (全一冊)

in twisted shaft, 扭轉軸

Circular plate, bending of, 圓盤, 撓曲

Circular ring: 圓形環

compressed by two opposite forces, 兩反向壓力

general solution for, 通解

Circular shaft: 圓軸

in torsion 扭轉

of variable cross-section, 變化斷面

Compatibility conditions: 配合條件:

in three dimensional problems, 三維問題

in two dimensional problems, 二維問題

Complex potentials, 複位函數

Complex variable, functions of, 複變數, 函數

Components: 分量

of strain, 應變

of stress, 應力

in curvilinear coordinates, 曲線坐標

Compression by concentrated force: 集中壓力下

of disk, 盤

of rectangular plates, 矩形板

of rollers, 軋軸

of solid bodies,

of spheres, 球體

of wedge 楔

Conduction of heat, stresses due to, 熱傳導, 應力

Cone in torsion, 抽轉錐體

Conformal mapping 保角映像

for elliptic hole, 對橢圓孔

constants, elastic, 常數, 彈性

contact, surface of 接觸面

Contact, stresses between bodies in compression, 接觸, 物體
相壓應力

Cooling: 冷卻

non-uniform, stresses due to, 非均勻, 造成應力

in plates, 平板中

in shafts, 軸內

Coordinates: 坐標

bipolar, 雙極

curvilinear, 曲線

cylindrical, 圓柱

elliptic, 橢圓

polar, 極坐標

spherical, 球面

Cracks, reduction of strength due to: 裂縫, 造成強度降低

tension member, 拉桿

torsion member, 扭轉桿

Curved bar: 曲桿

bending of, 撓曲

deflections of, 撓度

stresses in, 應力

Curvilinear or thogonal coordinates, 正交曲線坐標

components of stress in terms of, 應力分量表示

Cylinder: 柱體:

band of pressure on, 帶壓力

circular: with eccentric bore, 圓柱: 偏心洞

symmetrical deformation in, 對稱變形

590 彈性力學理論 (全一册)

thermal stresses in, 熱應力

thick, under pressure, 厚, 壓力下

Cylindrical body of any cross section: 任何斷面柱體

in bending, 撓曲

in torsion, 扭轉

in tension, 受拉

Dams. stresses in, 壩, 應力

Deflection of beams, 梁之撓度

additional, due to shearing force, 撓力附加

effect of shearing force on, 撓力效應

Deflection of foundations, 基礎之撓度

Deformation: 變形:

homogenous, 均勻

irrotational, 非旋轉

plastic, 塑性

Differential equation of equilibrium: 平衡微分方程式

in terms of displacements, 以位移表示

in three dimensions, 三維

in two dimensions, 二維

Digital computer, solutions by, 數位計算機, 解

Dilatation, wave of, 膨脹, 波

Disk: 盤

concentrated force on, 集中力作用

rotating, 轉動

thermal stresses in, 熱應力

of variable thickness, 厚度變化

Dislocation: 脫節:

edge, 邊緣

strain energy of, 應變能

in thermal stress, 熱應力

equivalent cuts, 相當割裂

screw, 螺旋

Displacements: 位移

in bending of bars, 撓曲桿

discontinuity, 繼續

general solutions for, 通解

in semi-infinite plates, 半無限板內

in three-dimensional problems, 三維問題

in torsion of bars, 扭轉桿

in two dimensional problems, 二維問題

Distortion: 畸變

of cross sections: of bent beam, 斷面之: 撓曲梁

of twisted bar, 扭轉桿

strain energy of, 應變能

waves of, 波

Divergence theorem, 發散定理

Double force: 雙力

acting on infinite body, 作用於無限體

acting on a plate, 作用於平板上

Earthquake waves, 地震波

Effective width of wide beam flanges, 寬緣梁有效寬度

Eigensolutions: 特徵解

for strips, 長條

for wedges and notches, 楔及凹口

Elastic layer on rigid smooth base 剛體光面上彈性層

Elasticity, 彈性

Electric current, analogy with twisted shaft of variable diameter, 電流, 變化直徑與扭轉軸對比

Electric-resistance strain gauge, 電阻應變錶

Ellipsoid, stress, 橢球體, 應力

Elliptic coordinates: 橢圓坐標

two dimensional problems in, 二維問題

Elliptic cylinders: 橢圓柱體

under bending, 撓曲下

under torsion, 扭轉下

Elliptic hole: 橢圓孔

mapping function for, 映像函數

in plate, 板中

in twisted shaft, 扭轉軸中

End effects, 末端效應

Energy: 能

of elastic waves, 彈性波

potential, 位

of strain, 應變

Equilibrium: 平衡

in case of nonuniform heating, 非均勻加熱例

in cylindrical coordinates, 圓柱坐標

general equations of, 一般方程式

in polar coordinates, 極坐標

in terms of displacements, 位移表示

Expansion: 膨脹

thermal, 熱

- volume, 體積
- Eyebar, stress in, 眼桿, 應力
- Failure, stress at, 裂壞, 應力
- Fatigue cracks, 疲勞裂縫
- Filletts, stress concentration at: 填角, 應力集中
 in bending and tension of plates, 板之撓曲與受拉
 in pressurized cylindrical shell, 壓力下柱體壳
 in shafts of variable diameter, 直徑變化軸
 in torsion of bars, 扭轉桿
- Film, 薄膜
- Finite-difference equations: 有限差分方程式:
 boundary conditions, 邊界條界
 for digital computer, 數位計算機
 points near boundary, 近邊界點
- Finite element method, 有限單元法
- Flanges, effective width of, 翼緣, 有限寬度
- Flexural center, 撓曲中心
- Flexural rigidity of plates, 板之撓曲剛度
- Foundations: 基礎:
 deflection of, 撓度
 pressure distribution on, 壓力分布
- Fourier series, application of: 傅立葉級數, 應用
 in bending problems, 撓曲問題
 in torsional problems, 扭轉問題
 in two dimensional problems, 二維問題
- Fracture, 斷裂
- Fringe value, 條紋值

594 彈性力學理論 (全一册)

Groove: 槽溝:

hyperbolic, 雙曲線

semicircular, in shaft, 半圓形, 軸中

Harmonic function, 調和函數

Helical spring: 螺旋彈簧

tension in, 張力

torsion in, 扭轉

Hertz contact problem, 赫茲衝擊問題

Holes: 孔:

circular, in plate, 圓形, 平板內

eccentric, 偏心

elliptic, 橢圓形

stress concentration at, 應力集中

in twisted shaft, 扭轉軸內

of various shapes in plate, 平板內各種形式

Hollow shaft, torsion of, 空心軸, 扭轉

Homogenous deformation, 均勻變形

Homogenous material, 均質材料

Hooke's law, 虎克定律

Hydrodynamical analogies, 流體動力學類比

Hyperbolic groove, 雙曲線槽溝

Hyperbolic notches, 雙曲線凹口

Impact: 衝擊

duration of, 期間

longitudinal, of bars, 縱向, 桿

with rounded ends, 圓端

- of spheres, 球體
- stresses produced by, 造成應力
- transverse, of bars, 側向, 桿
- Inclusions, 填塞
- Index notation, 指標符號
- Influence line, 影響線
- Initial stress: 起始應力
 - general equations for determination of, 決定之一般方程式
 - in glass plates, 玻璃板中
 - method of strain suppression, 應變阻遏法
 - in rings, 環內
 - volume change, 體積變更
- Invariant of stress, 應力不變量
- Irrotational deformation, 無轉動變形
- Isochromatic lines, 同色線
- Isoclinic lines, 等傾線
- Isotropic materials, 同向性材料

- Lamé's problems, 藍姆問題
- Laplace's equation, 拉普拉司方程式
- Layer, elastic, on rigid smooth base, 層, 彈性, 剛性光面上
- Least work, principle of, 最小功原理
 - application of, 應用
- Legendre's equation, 黎金芝方程式
- Lines of shearing stress in torsion, 扭轉剪應力線
- Local stresses: 局部應力
 - at circular hole, 圓孔上
 - at spherical cavity, 球孔隙

596 彈性力學理論 (全一冊)

in torsion, 扭轉

Longitudinal waves, 縱波

Membrane analogy: 薄膜類比

with bent beam, 撓曲梁

determination of stresses in beams, 梁內應力決定

measurement of torsion stresses by, 扭轉應力度量

in photoelasticity, 偏光彈性

solution for stresses by: 應力解

in narrow rectangular cross sections, 窄矩形斷面

in rolled profile sections, 軋製斷面

in thin twisted tubes, 薄壁扭轉管

in torque calculation, 扭矩計算

with twisted shaft, 扭轉軸

Mesh side, 網邊

Modulus of elasticity: 彈性模數

in shear, 剪力

in tension (Young's Modulus), 拉力 (楊氏模數)

Modulus of rigidity, 剛性模數

Modulus of volume expansion, 體脹模數

Mohr's circle, 馬氏圓

Moiré method, 波紋法

Multiply-connected bodies, 多重連結體

Net: 網

hexagonal, 六面

square, 正方

triangular, 三角形

Neutral surface, 中和面

Newton's interpolation formula, 牛頓內差法

Nicol prism, use of, in photoelastic work, 尼可稜體, 用於偏光彈性

Notches: 凹口:

angular, 角形

assignable shapes, 指定形式

hyperbolic, 雙曲線

semicircular, 半圓

Particle velocity in wave motion, 波動中質點速度

Potoelasticity, stress measurement by, 偏光彈性, 應力度量

three dimensional, 三維

Plane harmonic functions, 平面調和函數

Plane strain, 平面應變

compatibility equations for, 配合方程式

Plane stress: 平面應力

equilibrium for, 平衡方程式

stress at a point in, 一點上之應力

stress function for, 應力函數

Plane waves, 平面波

Planes, principal, of stress, 主應力面

Plastic deformation: 塑性變形:

initial stress due to, 起始應力

in twisted shafts, 扭轉軸

Plates: 平板

bent by couples, 受力偶撓曲

circular, symmetrically loaded, 圓形, 對稱荷力

quarter wave, 四分之一波

598 彈性力學理論 (全一冊)

Poisson's ratio, 柏松比

determination of, 決定

Polar coordinates: 極坐標

in three dimensional problem, 三維問題

in two dimensional problems, 二維問題

Polariscope: 偏光鏡

circular, 圓形

plane, 平面

Polarized light, use of, in stress measurements, 偏光, 應用,

應力量量

Polarizer, 偏光器

Polynomials: 多項式

in axisymmetric stress distribution problems, 對稱應力分布
問題

Potential energy, 位能

maximum, 最大值

minimum, 最小值

stationary, 靜止值

Pressure: 壓力

distribution over surface of contact, 分布於接觸面

hydrostatic, 流體靜力

in spherical container, 球體容器內

stresses produced by, 造成之應力

in thick cylinder, 厚壁柱體

produced by rigid die, 剛體模造成

Principal axes: 主軸

of strain, 應變

of stress, 應力

- Principal directions, 主向
- Principal planes, 主面
- Principal strain, 主應變
- Principal stress, 主應力
determination of, 決定
- Principle: 原理
of least work, 最小功
of Saint-Venant, 聖維南
of superposition, 重疊
of virtual work, 虛功
- Propagation of waves: 波之傳遞
in bars, 桿內
in elastic solid, 彈性體
over surface of body, 物體表面
- Pure bending: 純撓
of curved bars, 曲桿
of plates, 平板
of prismatical bars, 稜體桿
- Pure shear, 純剪
- Radial displacement, 徑向位移
- Radial strain, 徑向應變
- Radial stress, 徑向應力
distribution, 分布
- Rayleigh waves, 瑞萊波
- Recciprocal theorem, 倒轉定理
- Rectangular bar: 矩形桿
in bending, 撓曲
in torsion, 扭轉

Reentrant corner, stress concentration at: in I-beams, 凹角,

應力集中; I-梁

in plates, 平板

in shafts, 軸內

in tubes, 管內

Relaxation, block and group, 鬆弛, 塊及組

Relaxtion method, 鬆弛法

Residual stresses in cold-drawn tubes, 冷拉管餘應力

Residuals, 餘值

Rigid-body displacement superposable upon displacement

determined by strain, 應變所造成位移與剛體位移之疊加

Rigidity: 剛性

modulus of, 模數

torsional, 扭轉

Ring sector: 環之一段

in bending, 撓曲

in twist, 扭轉

Rolled profile sections in torsion, 扭轉下軋製斷面

Rollers, compression of, 軋軸, 壓力下

Rolling contact phenomena, 滾動接觸現象

Rotation, components of, 轉動, 分量

Rupture, hypothesis concerning conditions of, 破損, 條件假設

Saint-Venant: 聖維南

principle of, 原理

problem of, 問題

Sector of circle, torsional problem of, 部分圓, 扭轉問題

Seismic waves, 地震波

Semicircular notches, 半圓形凹口

- Semi-infinite body: 半無限體
concentrated force on, 集中力
distributed load on, 分布力
- Semi-infinite plate, 半無限板
- Semi-inverse method: 半反法
in bending, 撓曲
in torsion, 扭轉
of shafts of variable diameter, 變化直徑軸
- Shear, pure, 純剪
- Shear center, 剪心
- Shear circulation theorem, 剪環流定理
- Shear lag, 剪落後
- Shearing strain, 剪應變
- Shearing stress, 剪應力
in beams, 梁內
components of, 分量
distribution in beams: circular, 梁內分布: 圓形
elliptic; 橢圓形
I-T-section, I-T-斷面
of narrow rectangular section, 窄矩形斷面
rectangular 矩形
effect of, on deflection of beams, 梁撓度效應
lines of, 線
maximum, 最大
- Single-valued displacements, 單值位移
- Soap-film method, 皂膜法:
in bending problems, 撓曲問題
in torsional problems, 扭轉問題

602 彈性力學理論 (全一册)

Solution, uniqueness of, 解, 唯一性

Spherical bodies under compression, 壓力下球體

Spherical cavity: 球形孔

in infinite solid, 無限體

local stress at, 局部應力

Spherical container: 球體容器

under external or internal pressure, 外壓或內壓力下

thermal stresses in, 熱應力

Spherical coordinates, 球面坐標

Stability of equilibrium, 平衡穩定性

Strain: 應變

plane, 平面

at a point, 一點上

compatibility of, 配合

components of, 分量

Mohr circle of, 馬氏圓

in polar coordinates, 極坐標

principal axes of, 主軸

principal planes of, 主面

surface, measurement of, 表面, 度量

radial, 徑向

Strain energy, 應變能

of volume change and distortion, 體積變更及畸變

Strain energy methods, applications of, 應變能方法, 應用

Strain gauge, electric resistance, 應變錶, 電阻

Strain rosette, 應變

Stream function, 流線函數

Strength theory of brittle materials, 脆性材料強度理論

potential energy as basis of, 位能根據

Stress: 應力

axisymmetric, 軸對稱

components of, 分量

in curvilinear orthogonal coordinates, 正交曲線坐標

deviatoric, 偏差

discontinuities in a ring, 環中斷續

due to temperature change, 溫度變化造成

in eye bar, 眼桿中

at failure, 破損

invariants of, 不變量

mean, 平均

normal and tangential, 法向與切向

at point, 點上

principal, 主值

determination of, 之決定

radial, 徑向

distribution of, 分布

Stress concentration: 應力集中:

hydrodynamical analogy in determination of, 流體動力類比

at spherical cavity, 球形孔隙上

Stress-director surface, 應力指向面

Stress ellipsoid, 應力橢圓體

Stress functions, 應力函數

Stress-optical coefficient, 應力—光學係數

Stress-strain relation (*see* Hooke's law)

Superposition, principle of, 重疊, 原理

Surface of contact, 接觸面

Surface energy, 表面能

Surface forces, 表面力

Symmetrical and antisymmetrical loadings, 對稱與反對稱荷力

Temperature, stress due to non-uniform distribution of, 溫度, 非均勻分布所造成應力

Temperature fluctuation, stress produced by, 溫度變化, 所生應力

Tension: 拉力

by concentrated forces, 由集力

by distributed forces, 由分布力

by gravity, 由重力

uniform, 均勻

Thermal expansion, 熱膨脹

Thermal stress, 熱應力

in cylinders, 柱體

in disks, 盤中

general equations for, 一般方程式

solutions for, 解

in infinite solid 無限體內

in long strips, 長條中

method of strain suppression, 應變阻遏法

in plates, 平板中

reciprocal theorem 倒轉定理

in spheres, 球體內

in steady heat flow, 穩定熱流中

in temperature fluctuation 變化溫度中

Thermoelastic cavity volume change 熱力空隙體積變更

- Thermoelastic deflection of cantilever, 懸臂梁熱彈性撓度
- Thermoelastic displacement: 熱彈性位移
- with internal heat generation, 內部發熱
 - of points in infinite solid, 無限體內各點
 - of points in semi-infinite solid, 半無限體內各點
 - of surface of semi infinite solid, 半無限體表面
- Thermoelastic displacement potential, 熱彈性移位函數
- Thermoelastic extension of bar, 桿之熱彈性拉長
- Thermoelastic flexural rotation in bar, 桿之熱彈性撓曲轉動
- Thermoelastic plane strain, 熱彈性平面應變
- Thermoelastic plane stress, 熱彈性平面應力
- Thermoelastic torsional rotation of bar, 熱彈性桿扭轉轉動
- Thermoelastic volume change, 熱彈性體積變更
- Thin tubes, torsion of, 薄壁管, 扭轉
- Tore, incomplete: bending of,
- torsion of, 扭轉
- Torque: 扭矩
- calculation by membrane analogy, 薄膜類比計算
 - in twisted bar, 扭轉桿
- Torsion: 扭轉
- approximate methods for, 近似法
 - boundary conditions in, 邊界條件
 - circular shaft in, 圓軸
 - conducting sheet analogy for, 導電薄膜類比
 - cone in, 錐體
 - cylindrical body of any cross section in, 任何斷面柱體
 - displacement in, 位移
 - elliptical cylinder in, 橢圓柱體

606 彈性力學理論 (全一冊)

fillets in, 稜角

hollow shaft in, 空心軸

lines of shearing stress in, 剪應力線

local stresses in 局部應力

of prismatical bars, 稜體桿

semi-inverse method in, 半反法

of shafts of variable diameter, 直徑變化軸

stress function for, 應力函數

of thin tubes, 薄壁管

of tore, 環

of various form of cross section, 各式斷面

rectangular, 矩形

rolled profile, 軋製斷面

Torsional rigidity, 扭轉剛度

Trajectories of principal stresses, 主應力規線

Transmission of concentrated force 集中力之傳遞

on beam, 梁上

on disk 盤上

in infinite body, 無限體內

on infinite plate, 無限平板上

on semi-infinite body, 半無限體上

on semi-infinite plate, 半無限平板上

in strip, 長條內

on wedge, 楔上

Transverse waves, 側波

Triangular prism, 三角形稜體

in bending, 撓曲

in torsion, 扭轉

Tubes, 管

submitted to internal and external pressure, 受內壓力及外
壓力

torsion of, 扭轉

Twist: 扭轉

center of, 中心

of circular ring sector 部分圓環

Uniqueness of solution, 解之唯一性

Unit elongation, 單位拉長

Velocity of waves, 波速

of dilatation, 膨脹

of distortion, 畸變

longitudinal, in bars, 縱向, 桿內

at surface 表面上

Virtual displacement, 虛位移

Virtual work 虛功

application in torsional problems, 應用於扭轉問題

principle of, 原理

Vorticity 旋度

Warping 翹曲

Warping of cross sections of bars in torsion, 扭轉桿斷面之翹曲

Waves, 波

of dilatation, 膨脹

of distortion, 畸變

equivoluminal, 等體積

608 彈性力學理論 (全一册)

explosive, 爆炸

implosive, 擠壓

irrotational, 非旋轉

method of Laplace transforms, 拉普拉司轉換

plane, 平面

Rayleigh, 瑞萊

reflection of 反射

seismic, 地震

superposition of, 重疊

surface, 表面

transverse, 側向

Wedge, loaded: at end, 楔, 荷力, 一端上

along faces, 沿各面

Weight: 重量:

bending of beam by own 梁撓曲, 自重

torsion of bars by own, 桿扭轉, 自重

Work, virtual, principle of, 功, 虛功, 原理

Young's modulus, 楊氏模數